

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗУБА ЗВЕЗДОЧКИ ЦЕПНОЙ ПЕРЕДАЧИ

Введение. Актуальность задачи.

Общеизвестно, что основной причиной выхода из строя цепных втулочно-роликовых передач является абразивный износ шарниров цепи [1]. Однако во многих случаях на первый план выходит проблема ускоренного абразивного износа рабочих профилей зубьев звездочек. К таким случаям относятся:

- передачи сельскохозяйственного и горного машиностроения, работающие в условиях повышенной запыленности [2];
- передачи со втулочными цепями без роликов, часто применяемые в автомобилестроении с целью экономии массы;
- звездочки ведущих колес гусеничной техники [3] (по своей геометрии и кинематике они аналогичны цепной втулочной передаче).

Поэтому разработка новых профилей зубьев звездочек цепных передач и ведущих колес, обеспечивающих уменьшение проскальзывания ролика (или цевки для гусеничного движителя) и, соответственно, снижение интенсивности износа, является актуальной научно-практической задачей современного машиностроения.

Постановка задачи.

Рабочий профиль зуба звездочки втулочно-роликовой цепи в настоящее время стандартизован по ГОСТ 591-69 [4]. По этому стандарту он описывается дугами окружностей, которые образуют выпуклый профиль на головке зуба и вогнутый во впадине. Такой профиль не отвечает требованиям теории зацеплений, поэтому при работе происходит неравномерная передача нагрузки и быстрый износ зубьев.

Цепные втулочно-роликовые передачи (также как и цевочные) относятся к передачам зацеплением, особенностью которых является известная заранее круглая форма контактирующей поверхности одного из элементов зацепления. Для цевочной передачи это цевочное колесо, а для цепной – втулка или ролик цепи. Еще одной особенностью цепной передачи является наличие, помимо фаз входа и выхода зуба из зацепления, фазы выстоя. Для осуществления правильного зацепления в передаче должно выполняться не только основное уравнение зацепления [5], но и соблюдаться условие плавного пересопряжения зубьев, которое обеспечивается единством мгновенного центра скоростей шатуна заменяющего четырехзвенного механизма [6, 7] и общей центроидой.

Если рассмотреть профиль зуба звездочки (рис. 1), то на нем можно выделить три основных участка:

- головка I с выпуклым профилем, которая в наибольшей мере подвержена износу;
- переходная вогнутая дуга II, служащая для сопряжения головки и впадины;
- впадина между зубьями III, служащая для размещения ролика или втулки цепи

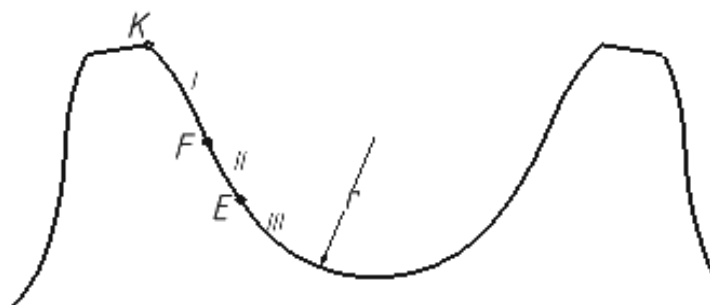


Рис. 1 – Схема профиля зуба звездочки цепной втулочно-роликовой передачи:

I+II – активный профиль; III – впадина

© С.В Андриенко, 2014

в фазе выстоя. Профиль впадины выполняется по дуге окружности и при любом подходе к синтезу ее радиус r должен быть равным или несколько большим радиуса втулки или ролика.

Сумма участков I и II представляют собой активный профиль зуба звездочки.

В процессе решения задачи синтеза требуется найти профиль зуба на участках I и II и обеспечить плавное сопряжение активного профиля и впадины в граничной точке E .

Для решения поставленной задачи представляется целесообразным применить метод синтеза так называемого эволютного зацепления на основе построения Бобилье, предложенный А.И. Павловым [7, 8]. Построение Бобилье заключается в замене зубчатого зацепления эквивалентным четырехзвенным шарнирно-рычажным механизмом, исследование которого существенно упрощает задачу синтеза. Также несомненным достоинством вышеуказанного метода является возможность получения профилей зубьев по заданным геометрико-кинематическим характеристикам передачи, в том числе и с учетом коэффициента трения в зацеплении.

Решение задачи синтеза выполняется в следующей последовательности.

1. Выполнение построения Бобилье для цевочного и цепного втулочно-роликового (втулочного) зацепления.

3. Задание начальных условий для синтеза.

2. Решение дифференциального уравнения, описывающего построение Бобилье.

Построение Бобилье для цевочного зацепления.

Это построение, справедливое и для цепного зацепления, выполнено в работах [9, 10]. На его основе получено следующее обыкновенное дифференциальное уравнение (ОДУ) 2-го порядка, описывающее профиль эволютного зуба, находящегося в зацеплении с цевкой или втулкой (ниже будем вести все рассуждения для случая цепной втулочной передачи, как наиболее подверженной износу профиля зуба):

$$\frac{1 + y_0'^2}{y_0''} = \frac{x_0}{y_0'} + \frac{r_0 k f}{(r_0 f - k)(1 - A y_0')}, \quad (1)$$

где x_0, y_0 – координаты точек профиля зуба звездочки в системе координат, центр которой совпадает с полюсом зацепления P , а ось x_0 является касательной к делительной окружности радиусом r_0 (рис. 2); f – коэффициент трения скольжения в зацеплении; $k = h \sin \alpha_0$ – так называемый коэффициент разновидности зацепления [8] (один из важнейших параметров, позволяющий управлять геометрическими характеристиками синтезируемой передачи, здесь h – расстояние между полюсом зацепления и центром вращения шатуна заменяющего механизма; α_0 – угол зацепления в полюсе);

$$A = \frac{k}{\sqrt{(r_0 - k/f)^2 + k^2}}.$$

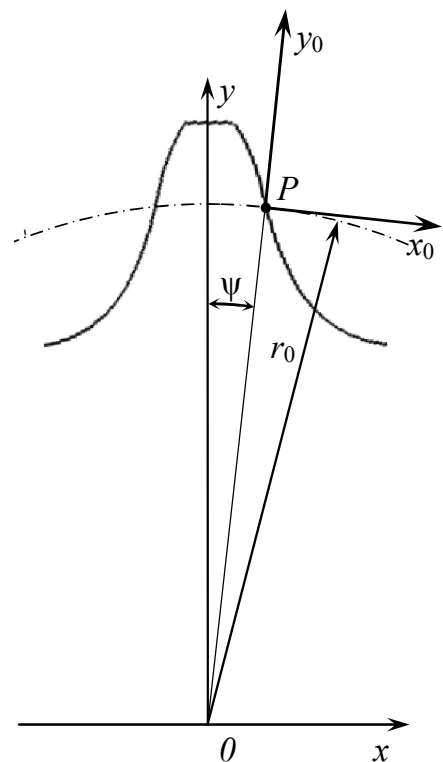


Рис. 2 – Системы координат, применяемые при синтезе профиля зуба звездочки:
 P – полюс зацепления;
 r_0 – радиус делительной окружности

Для удобства решения запишем ОДУ (5) в форме Коши,

$$y'' = \frac{y'(1 + y'^2)(r_0 f - k)(1 - Ay')}{x(r_0 f - k)(1 - Ay') + y'r_0 kf}, \quad (2)$$

и приведем его к системе двух ОДУ 1-го порядка,

$$\begin{cases} y' = y_1; \\ y'' = \frac{y'(1 + y_1^2)(r_0 f - k)(1 - Ay_1)}{x(r_0 f - k)(1 - Ay_1) + y_1 r_0 kf}. \end{cases} \quad (3)$$

В качестве начальных условий будем использовать прохождение кривой, описывающей профиль зуба звездочки, в начальный момент зацепления через полюс P . Значения коэффициента разновидности k выбираются из рекомендаций [8].

Решение дифференциального уравнения, описывающего построение Бобилье.

Для решения ОДУ (2) или равноценной системы (3) могут быть применены следующие методы.

1. Аналитические. Рассматриваться не будут, ввиду их громоздкости и неудобства дальнейшей компьютерной реализации при построении профилей звездочек и исследовании их геометро-кинематических и прочностных характеристик.

2. Приближенное решение в виде степенных рядов. Этот подход был успешно реализован А.И. Павловым при синтезе исходных контуров эволютных зубчатых передач, а в дальнейшем применен авторами для синтеза профиля зуба звездочки [8, 10]. В качестве средства программной реализации использовался комплекс "Vissim". Преимущество такого подхода заключается в простоте получения решения и удобстве построения профиля зуба, нахождения его кривизны и исследования характеристик. Недостаток – решение получается в виде полиномов высоких нечетных степеней (обычно 7-й степени), что приводит к его неустойчивости и большим отклонениям от теоретически точного профиля в приполюсной зоне (в особых точках и их окрестностях при смене знака кривизны профиля).

3. Численное решение на основе современных методов, таких как метод Рунге-Кутты [11]. Может быть выполнено при помощи программных пакетов, например Maple или MathCAD [12]. В этом случае решение представляет собой набор координат точек профиля зуба звездочки. Преимущество такого подхода заключается в простоте компьютерной реализации, а недостаток – в отсутствии уравнения профиля зуба, что не дает возможность напрямую исследовать характеристики зацепления. Однако этот недостаток может быть устранен двумя факторами:

- исследование контактного взаимодействия зуба и втулки целесообразно выполнять методом конечных элементов (МКЭ). Для его применения вполне достаточно иметь координаты точек профиля зуба;

- при исследовании качественных показателей зацепления (кривизны профиля, скоростей скольжения, контактных давлений, интенсивности износа и т.д.) можно применить подход, предложенный в работах [13, 14]. Он заключается в аппроксимации профиля сплайнами, например, кривыми Безье. В дальнейшем по этой аппроксимации можно получить значения кривизны профиля и других геометро-кинематических характеристик.

Таким образом, в дальнейшем исследованиях мы будем опираться на численное решение задачи синтеза. Для этого воспользуемся методом Рунге-Кутты IV порядка точности [11], как наиболее распространенного в наше время при решении ОДУ в связи с достаточной точностью и относительной простотой. Программная реализация будет выполняться в системе MathCAD [12] при помощи встроенной функции **Rkadapt**:

$$\mathbf{S}=\mathbf{Rkadapt}(y, x_1, x_2, n, \mathbf{F}),$$

которая возвращает матрицу решений **S** методом Рунге-Кутты IV порядка с адаптивной подстройкой шага интегрирования по требуемой точности решения для системы ОДУ с начальными условиями в векторе **y**; правые части уравнений записаны в символьном векторе **F**; x_1, x_2 – начальное и конечное значения интервала решения; n – число шагов.

В качестве примера на рис. 3 показан синтезированный по предложенной методике профиль зуба звездочки со следующими основными параметрами: число зубьев $z=20$; шаг цепи $t=25,4\text{мм}$; коэффициент трения скольжения $f=0,2$; коэффициент разности кривизны $k=-5$. Для удобства моделирования звездочки и передачи в целом профиль построен в системе координат x, y , центр которой совпадает с центром вращения колеса, а ось y совпадает с осью симметрии зуба (рис. 2),

$$\begin{cases} x = r \sin \psi + x_0 \cos \psi + y_0 \sin \psi; \\ y = r \cos \psi - x_0 \sin \psi + y_0 \cos \psi, \end{cases} \quad (4)$$

где ψ – центральный угол, соответствующий половине толщины зуба по дуге делительной окружности.

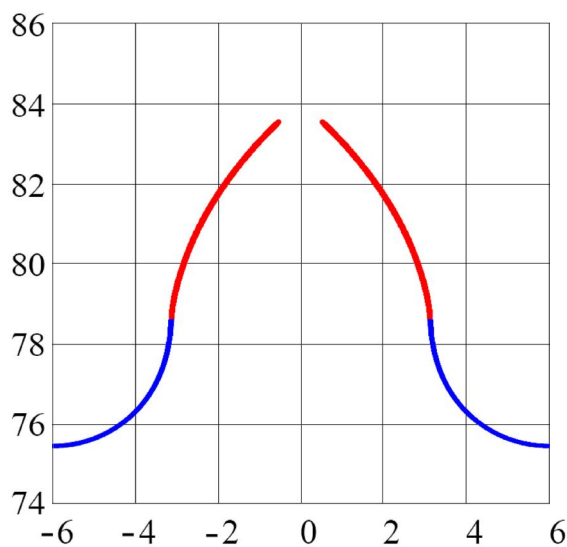


Рис. 3 – Синтезированный профиль зуба звездочки:
 $z=20; t=25,4\text{мм}; f=0,2; k=-5$

Аппроксимация профиля зуба кривыми Безье.

Как известно [11], любую кривую, представленную как аналитически, так и таблично, можно аппроксимировать с достаточной степенью точности различного вида сплайнами. В качестве универсального описания предлагаются кривые и поверхности Безье, которые широко используются в системах автоматизированного проектирования и обладают целым рядом свойств, удобных для построения математических моделей управляемого синтеза и оптимизации передач зацеплением. Более подробно использование кривых Безье описано в работах [13, 14].

Запишем уравнения кривой Безье третьего порядка в следующем виде:

$$\begin{cases} x_i = (1 - \lambda_i)^3 x_0 + 3(1 - \lambda_i)^2 \lambda_i x_1 + 3(1 - \lambda_i) \lambda_i^2 x_2 + \lambda_i^3 x_3; \\ y_i = (1 - \lambda_i)^3 y_0 + 3(1 - \lambda_i)^2 \lambda_i y_1 + 3(1 - \lambda_i) \lambda_i^2 y_2 + \lambda_i^3 y_3, \end{cases} \quad (4)$$

где x_i, y_i – текущие координаты точек кривой; λ_i – текущий параметр, изменяющийся в пределах $0 \leq \lambda_i \leq 1$ и соответствующий i -й точке кривой; x_0, y_0, x_3, y_3 – координаты на-

чальной P_0 и конечной P_3 опорных точек кривой; x_1, y_1, x_2, y_2 – координаты управляющих точек P_1, P_2 .

При задании кривой табличным способом нам известны координаты точек x_i, y_i , полученные в процессе численного решения задачи синтеза профиля зуба. В случае аппроксимации кривой Безье третьего порядка неизвестными являются координаты управляющих точек P_1, P_2 и значения λ_i , соответствующие i -м точкам кривой. Для их нахождения необходимо применить один из алгоритмов оптимизации.

В нашем случае управляемыми параметрами являются координаты управляющих точек. Перебирая значения x_1 и x_2 из первого уравнения системы (4), определяем значения $\lambda_i = f(x_i, x_1, x_2)$.

Целевую функцию запишем, используя метод наименьших квадратов,

$$S = \sum_{i=1}^n \delta_i^2 = \min, \quad (5)$$

где δ_i – отклонение текущих значений координат y_{iB} кривой Безье, полученных из второго уравнения системы (4), от заданных табличных значений y_i ,

$$\delta_i = y_i - y_{iB} = y_i - \left[(1 - \lambda_i)^3 y_0 + 3(1 - \lambda_i)^2 \lambda_i y_1 + 3(1 - \lambda_i) \lambda_i^2 y_2 + \lambda_i^3 y_3 \right].$$

Для определения оптимальных значений координат управляющих точек использовался метод главных осей, разработанный Р.П. Брентом [15] и являющийся одним из лучших среди семейства методов оптимизации, не требующих информации о градиенте функции.

Рассмотренный метод был реализован одним из авторов в виде программы "Аппроксимация кривыми Безье" [16], ее интерфейс представлен на рис. 4. Исходными данными являются текущие координаты точек кривой x_i, y_i , а результатом расчета – координаты x_{iB}, y_{iB} аппроксимированного профиля с заданной частотой сетки.

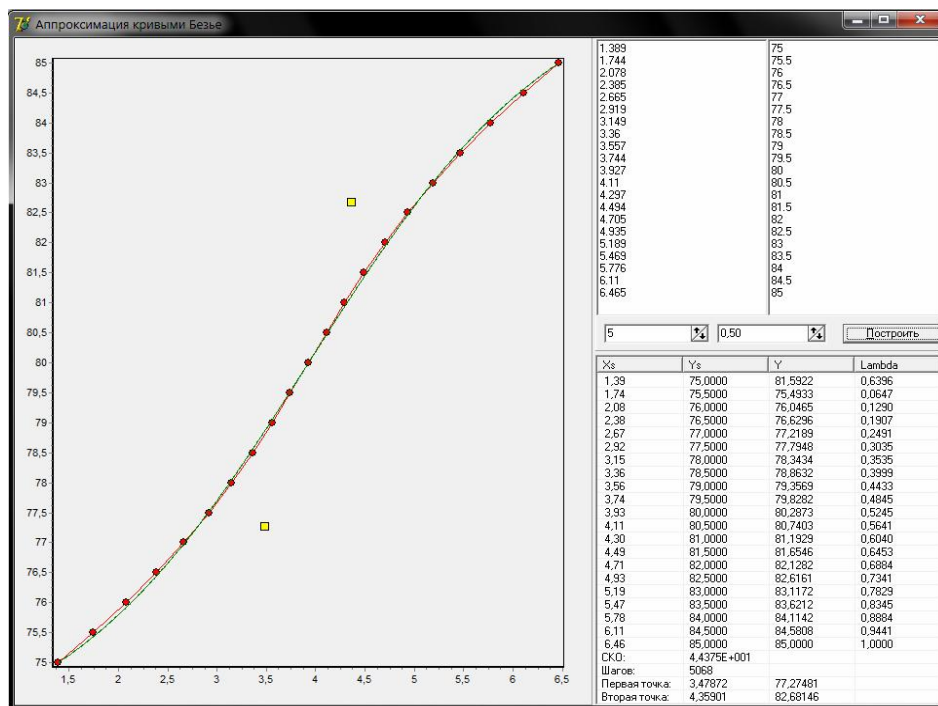


Рис. 4 – Интерфейс программы аппроксимации кривыми Безье

Выводы.

1. Разработана методика численного моделирования профиля зуба звездочки цепной втулочной передачи. Ее достоинствами являются:

- относительная простота решения задачи синтеза цепного зацепления с требуемыми характеристиками;
- возможность аппроксимации уравнения профиля с целью получения на ее основе значений кривизны профиля и скоростей скольжения в точке контакта.

2. В дальнейшем применение разработанной методики планируется:

- в процессе исследования контактного взаимодействия зуба с роликом на основе формулы Герца и методом конечных элементов;
- при разработке математической модели износа профиля зуба и ролика.

Литература: 1. Глуценко И.П. Основы проектирования цепных передач с втулочно-роликовыми цепями. – Львов: Изд. Львовского ун-та, 1964. – 226с. 2. Детали машин и основы конструирования / Под ред. М.Н. Ерохина. – М.: КолосС, 2005. – 462с. 3. Платонов В.Ф., Леашвили Г.Р. Гусеничные и колесные транспортно-тяговые машины. – М.: Машиностроение, 1986. – 296с. 4. ГОСТ 591-69. Звездочки к приводным роликовым и втулочным цепям. Методы расчета и построения профиля зуба и инструмента. Допуски. – М.: Изд-во стандартов, 2001. – 70с. 5. Литвин Ф.Л. Теория зубчатых зацеплений. М.: Наука. – 1968. – 584с. 6. Павлов А.И. Обкатная цепная передача // Труды междунар. конф. "MicroCAD-98". – Харьков: ХГПУ, 1998. – С.127-129. 7. Павлов А.И. Особенности зацеплений с выпукло-вогнутым контактом для силовых зубчатых передач // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Технологии в машиностроении". – Харьков: НТУ "ХПИ", 2002. – Вып.6, т.1. – С.43-45. 8. Павлов А.И. Современная теория зубчатых зацеплений. – Харьков: ХНАДУ, 2005. – 100с. 9. Павлов А.И., Андриенко С.В. Построение рабочей поверхности зубьев звездочки цепной передачи // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Технологии в машиностроении". – Харьков: НТУ "ХПИ", 2003. – Вып.8, т.3.– С.43. 10. Андриенко С.В., Павлов А.И., Устиненко А.В. Моделирование профиля зуба звездочки цепной передачи на основе построения Бобилье // Вісник НТУ "ХПИ": Зб. наук. праць. Серія "Проблеми механічного приводу". – Харьков: НТУ "ХПИ", 2013. – №40(1013). – С.5-8. 11. Турчак Л.И., Плотников П.В. Основы численных методов. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002 – 304с. 12. Дьяконов В.П. Энциклопедия MathCAD 2001i, 11. Библиотека профессионала. – М.: Солон-Пресс, 2004. – 832с. 13. Бочарова І.А., Воронцов Б.С. Модифікація твірної поверхні з використанням кривої Безье третього порядку // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійська державна агротехнічна академія. – Вип.4, т.30. – Мелітополь: ТДАТА, 2005. – С.116-120. 14. Воронцов Б.С. Интерактивное управление синтезом зубчатых передач // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Проблемы механического привода". – Харьков: НТУ "ХПИ", 2005. – №40. – С.182-187. 15. Brent R.P. Algorithms for minimization without derivatives. – N.J.: Prentice-Hall. Inc., 1973. – 195p. 16. Воронцов Б.С., Бочарова І.А., Чаплинский Д.А. Унифікація геометрії робочих поверхностей зуб'єв при синтезі передач зацепленням // Вестник НТУ "ХПИ": Сб. научн. трудов. Тем. вып. "Проблемы механического привода". – Харьков: НТУ "ХПИ", 2008. – №29. – С.24-28.

Bibliography (transliterated): 1. Gluschenko I.P. Osnovyi proektirovaniya tsepnyih peredach s vtulochno-rolikovymi tsepyami. – Lvov: Izd. Lvovskogo un-ta, 1964. – 226s. 2. Detali mashin i osnovyi konstruirovaniya / Pod red. M.N. Erohina. – M.: KolosS, 2005. – 462s. 3. Platonov V.F., Leishvili G.R. Gusenichnyie i kolesnyie transportno-tyagovyie mashinyi. – M.: Mashinostroenie, 1986. – 296s. 4. GOST 591-69. Zvezdochki k privodnyim rolikovyim i vtulochnym tsepyam. Metodyi rascheta i postroeniya profilya zuba i instrumenta. Dopuski. – M.: Izd-vo standartov, 2001. – 70s. 5. Litvin F.L. Teoriya zubchatyih zatseplenyi. M.: Nauka. – 1968. – 584s. 6. Pavlov A.I. Obkatnaya tsepnaya peredacha // Trudyi mezhdunar. konf. "MicroCAD-98". – Harkov: HGPU, 1998. – S.127-129. 7. Pavlov A.I. Osobennosti zatseplenyi s vyipuklo-vognutyim kontaktom dlya silovyih zubchatyih peredach // Vestnik NTU "HPI": Sb. nauchn. trudov. Tem. vyip. "Tehnologii v mashinostroenii". – Harkov: NTU

"HPI", 2002. – Вып.6, т.1. – S.43-45. 8. Pavlov A.I. *Sovremennaya teoriya zubchatyih zatsepleniya*. – Harkov: HNADU, 2005. – 100s. 9. Pavlov A.I., Andrienko S.V. *Postroenie rabochey poverhnosti zubev zvezdochki tsepnoy peredachi // Vestnik NTU "HPI": Sb. nauchn. trudov. Tem. vyip. "Tehnologii v mashinostroenii"*. – Harkov: NTU "HPI", 2003. – Вып.8, т.3. – S.43. 10. Andrienko S.V., Pavlov A.I., Ustinenko A.V. *Modelirovanie profilya zuba zvezdochki tsepnoy peredachi na osnove postroeniya Bobile // VIIsnik NTU "HPI": Zb. nauk. prats. SerIya "Problemi mehanIchnogo privodu"*. – Harkov: NTU "HPI", 2013. – #40(1013). – S.5-8. 11. Turchak L.I., Plotnikov P.V. *Osnovyi chislennyih metodov*. – M.: FIZMATLIT, 2002 – 304s. 12. Dyakonov V.P. *Entsiklopediya MathCAD 2001i, 11. Biblioteka professionala*. – M.: Solon-Press, 2004. – 832s. 13. Bocharova I.A., Vorontsov B.S. *Modifikatsiya tvIrnoYi poverhni z vikoristannyam krivoYi BezE tretogo poryadku // Prikladna geometriYa ta Inzhenerna grafIka. PratsI / Tavriyska derzhavna agrotehniIchna akademiYa*. – Vip.4, т.30. – MellItopol: TDATA, 2005. – S.116-120. 14. Vorontsov B.S. *Interaktivnoe upravlenie sintezom zubchatyih peredach // Vestnik NTU "HPI": Sb. nauchn. trudov. Tem. vyip. "Problemy mehanicheskogo privoda"*. – Harkov: NTU "HPI", 2005. – #40. – S.182-187. 15. Brent R.P. *Algorithms for minimization without derivatives*. – N.J.: Prentice-Hall. Inc., 1973. – 195p. 16. Vorontsov B.S., Bocharova I.A., Chaplinskiy D.A. *Unifikatsiya geometrii rabochnih poverhnostey zubev pri sinteze peredach zatsepleniem // Vestnik NTU "HPI": Sb. nauchn. trudov. Tem. vyip. "Problemy mehanicheskogo privoda"*. – Harkov: NTU "HPI", 2008. – #29. – S.24-28.

Андрієнко С.В., Воронцов Б.С., Устиненко О.В.

ЧИСЕЛЬНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОФІЛЮ ЗУБЦЯ ЗІРОЧКИ ЛАНЦЮГОВОЇ ПЕРЕДАЧІ

У статті описано методику моделювання профілю зуба зірочки. Вона базується на побудові Бобил'є, складається з числового розв'язання диференціального рівняння, що описує профіль зуба та апроксимації отриманого рішення кривими Без'є. Її застосування дозволить суттєво спростити задачу створення ланцюгових передач з пониженою інтенсивністю зносу профілю зірочки.

Андрієнко С.В., Воронцов Б.С., Устиненко А.В.

ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОФИЛЯ ЗУБЦА ЗВЕЗДОЧКИ ЦЕПНОЙ ПЕРЕДАЧИ

В статье описана методика моделирования профиля зуба звездочки. Она базируется на построении Бобилье, состоит из численного решения дифференциального уравнения, описывающего профиль зуба и аппроксимации полученного решения кривыми Безье. Ее применение позволит существенно упростить задачу создания цепных передач с пониженной интенсивностью износа профиля звездочки.

Andrienko S.V., Vorontsov B.S., Ustinenko A.V.

NUMERICAL SIMULATION OF THE SPROCKET TOOTH PROFILE FOR CHAIN DRIVE

The article describes a technique for modeling the sprocket tooth profile. The technique is based on Bobillie constructing, consists of a numerical solution of the differential equation which describing the tooth profile and the approximation of the solution by the Bezier curves. Its application will greatly simplify the task of creating chain drives with reduced wear intensity of sprocket profile.