

УДК 539.3

*Ткачук Н.Н., канд. техн. наук, Скрипченко Н.Б., Литвиненко А.В., канд. техн. наук,  
Ткачук А.В., Крюков С.Д., Богач А.С., канд. техн. наук*

## **ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ НА КОНТАКТНЫЕ ДАВЛЕНИЯ В СОПРЯЖЕНИИ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ**

**Введение.** Значительное количество машиностроительных конструкций содержит узлы, основное силовое воздействие в которых передается посредством контакта сложнопрофильных тел (СПТ). Это и зубчатые передачи с модификацией формы рабочих поверхностей, и кулачки различных видов, и роликоподшипники с модификацией боковых поверхностей, а также разнообразные конструкции транспортных, технологических, подъемных машин и т.п. При проектировании деталей данных конструкций производится расчет контактных давлений и напряженно-деформированного состояния (НДС) контактирующих тел. Однако традиционные методики, основанные на модели Герца или ее модификациях [1, 2], имеют ограниченные области применения, особенно для СПТ. Например, во многих случаях распределение первоначального зазора между контактирующими телами не может быть представлено в виде квадратичной формы от координат точек общей касательной плоскости к этим телам. В результате возникают недопустимые погрешности в решении задачи анализа НДС сложнопрофильных тел с учетом контактного взаимодействия, что приводит к назначению необоснованных проектных параметров СПТ. С другой стороны, применение современных пакетов для численного решения контактных задач [www.ansys.com, http://www.mscsoftware.com, http://www.3ds.com] приводит, во-первых, к ощутимому росту требуемых для этого вычислительных ресурсов, а, во-вторых, к аппроксимации контактирующих поверхностей, а, значит, и зазора между СПТ, функциями формы того или иного конечного элемента. Последнее приводит "нефизические" эффекты в получаемые распределения контактных давлений и напряжений в сложнопрофильных телах.

Таким образом, для сложнопрофильных тел существует т.н. "геометрический барьер", т.е. проблема выбора способа аппроксимации геометрической формы контактирующих участков поверхностей этих тел, который давал бы возможность избегать недопустимых погрешностей при анализе их контактного взаимодействия.

Кроме того, еще одним препятствием для применения упомянутых методов и моделей является неучет множества иных факторов, которые могут оказать значительное влияние на результаты решения контактной задачи для сложнопрофильных тел. В первую очередь это можно отнести к тому, что реальные детали машиностроительных конструкций не являются гладкими телами, как их принято представлять во многих расчетных моделях. Их поверхность – шероховатая, со сложным стохастическим распределением микронеровностей [3-5]. Соответственно, вклад податливости, порождаемой слоем шероховатости, в общую картину распределения контактных давлений можно оценить только вводя в рассмотрение какую-либо модель слоя шероховатости, а затем анализируя результаты расчетов. Однако корректные и точные модели для учета данного фактора, доведенные до численной реализации, в настоящее время отсутствуют.

В результате сложилась ситуация, когда противоречие между потребностями практики и возможностями науки в расчетах контактного взаимодействия сложнопрофильных тел является препятствием в совершенствовании технического уровня создаваемых машин. Это порождает, в свою очередь, актуальную и важную задачу разработки новых, более совершенных методов расчета.

© Н.Н. Ткачук, 2014

**Постановка задачі.** Целью работы является создание методов анализа контактных давлений между сложнопрофильными телами с учетом наличия между ними слоя шероховатости, а также установление закономерностей влияния формы поверхности этих тел и податливости шероховатого слоя на распределения и уровень контактных давлений.

Для решения поставленной задачи привлекается метод граничных интегральных уравнений (МГИУ) в варианте, предложенном в работах [6-9]. Для дискретизации разрешающих соотношений МГИУ в этом случае применяется подход метода граничных элементов (МГЭ) [10]. В результате, следуя [6-9], получаем систему разрешающих уравнений (рис. 1-3):

$$\sum_m C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta = 0, \text{ узел } J_n - \text{в контакте};$$

$$\sum_m C_{nm}^{\Sigma} p_m + h_n - \delta > 0, \text{ узел } J_n - \text{вне зоны контакта.}$$
(1)

Здесь  $p_m = p(x_m, y_m)$  – искомые узловые значения контактных давлений в узлах  $J_m$ ,  $h_n = h(x_n, y_n)$  – узловые значения первоначального зазора, а  $\delta = \delta_1 + \delta_2$  – суммарное сближение контактирующих тел.

Коэффициенты матрицы влияния вычисляются как сумма

$$C_{nm}^{\Sigma} = C_{nm} + \lambda \delta_{nm}.$$
(2)

Здесь  $C_{nm}$  – коэффициенты влияния, характеризующие глобальную податливость контактирующих гладких тел исходя из их деформации как упругих полупространств,  $\lambda$  – локальная податливость, обусловленная наличием линейно упругого слоя, моделирующего шероховатость контактирующих поверхностей, а  $\delta_{nm} = \{1, \text{ если } n = m; 0, \text{ если } m \neq n\}$  – символ Кронекера.

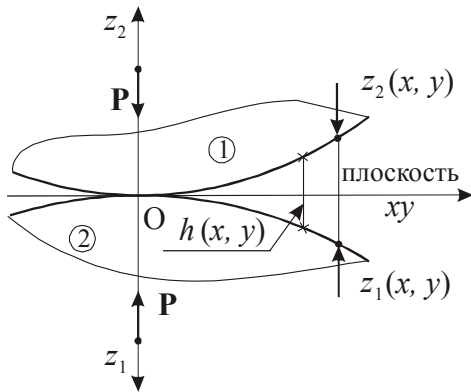


Рис. 1. Представление локального зазора между контактирующими телами

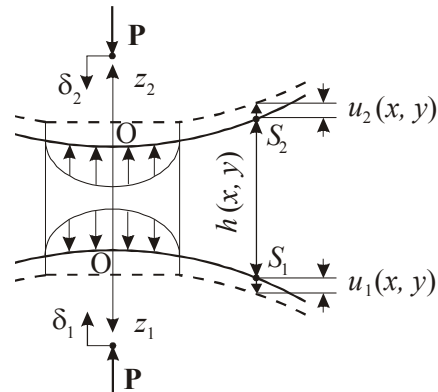


Рис. 2. Деформация тел и образование контактной площадки под действием нормального усилия

В данном случае использовалась модель шероховатости винклеровского слоя [5]:

$$u \sim = \lambda p.$$
(3)

Здесь  $u \sim$  – перемещение точек упругого слоя,  $\lambda$  – податливость слоя, а  $p$  – контактное давление.

Тогда, вводя в рассмотрение параметры  $L$  и  $\theta$ , запишем:

$$L = \lambda / C_{nn}; \operatorname{tg} \theta = L, \quad (4)$$

где  $C_{nn}$  – диагональные члены матрицы податливости  $C$  гладкого тела при принятой схеме дискретизации (см. (1), (2) и рис. 1-3), можно, варьируя  $L$  и  $\theta$ , анализировать получаемые распределения контактных давлений  $p$ . Для этого решается система соотношений (1), причем изменяемыми являются и  $L$  (или  $\theta$ ), и зазор между телами  $h = h(x, y)$  (в дискретном варианте – набор  $h_n$ , см.

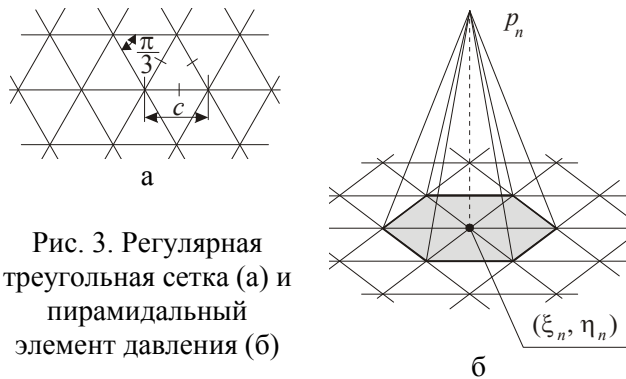


Рис. 3. Регулярная треугольная сетка (а) и пирамидальный элемент давления (б)

(1)). В результате варьирования этих параметров в процессе многовариантных расчетов можно установить параметрические семейства распределений контактных давлений

$$p = p(x, y, L, h) \text{ или } p = p(x, y, \theta, h). \quad (5)$$

**Результаты решения частных задач.** В соотношениях (5) присутствуют числовые параметры  $L$  и  $\theta$ , а также распределенный параметр  $h = h(x, y)$ . Во многих практических случаях, однако, геометрическая форма поверхностей сложнопрофильных тел задается всего несколькими параметрами. Так, для гидрообъемных передач (ГОП) [6, 11] таковыми являются радиусы скругления беговой дорожки и ее ширина (рис. 4, 5).



*Радиальная гидропередача ГОП-900 (ХКБМ)*

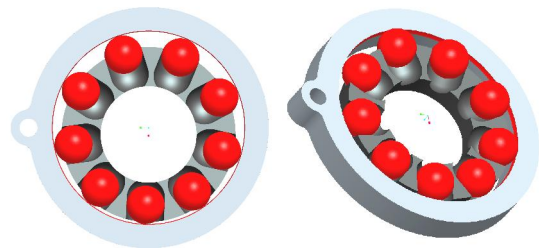
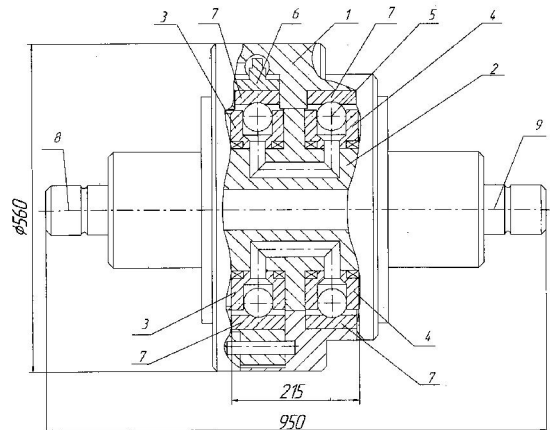


Рис. 4. Гидропередача ГОП-900 с шариковыми поршнями:  
 1 – корпус; 2 – блок цапфенных распределителей; 3 – блок цилиндров насоса (ротор);  
 4 – блок цилиндров гидромотора (ротор);  
 5 – шарик-поршень;  
 6 – статор насоса; 7 – обоймы (беговые дорожки) насоса и гидромотора;  
 8 и 9 – входной и выходной валы гидропередачи



Соответственно, можно, вводя, например, параметр, отражающий относительную разницу радиусов поршня и центральной части беговой дорожки  $\chi = (R_t - R_p) / R_p$ , где  $R_t$  – радиуса желоба, а  $R_p$  – радиус шарового поршня (см. рис. 5), провести анализ влияния физико-механических свойств поверхностного слоя, моделирующего шероховатость (за это отвечают параметры  $L$  и  $\theta$ ) и формы беговой дорожки (за это ответствен в (5) введенный

параметр  $\chi$ ) на распределение контактных давлений. Эта задача и была решена с использованием специализированного программно-модельного комплекса, реализующего разработанный в статье метод расчета.

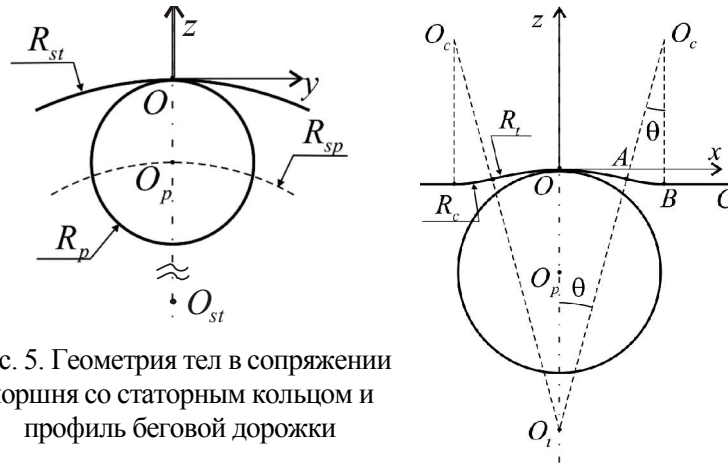


Рис. 5. Геометрия тел в сопряжении поршня со статорным кольцом и профиль беговой дорожки

На рис. 6 представлены характерные распределения контактных давлений, получаемые при варьировании  $\theta$  в пределах от 0 до 1,55,  $\chi$  – от -0,2 до 0,2. Результаты получены при значениях  $R_p = 0.03175$  м – радиус поршня,  $R_{sp} = 0.128$  м – радиус круговой траектории центра поршня,  $R_{st} = 0.15975$  м – радиус статорного кольца,  $R_{rot} = 0.145$  м – радиус корпуса ротора,  $\delta = 0.012$  м – максимальный эксцентриситет; упругие постоянные материала поршня и статора:  $E = 200$  ГПа – модуль упругости и  $\nu = 0.3$  – коэффициент Пуассона; а также при силе прижатия шара к тору силой  $P = 100$  кН. На рис. 7 – распределения контактных давлений вдоль большой оси пятна контакта при разных  $\chi$  и варьируемом  $L$ .

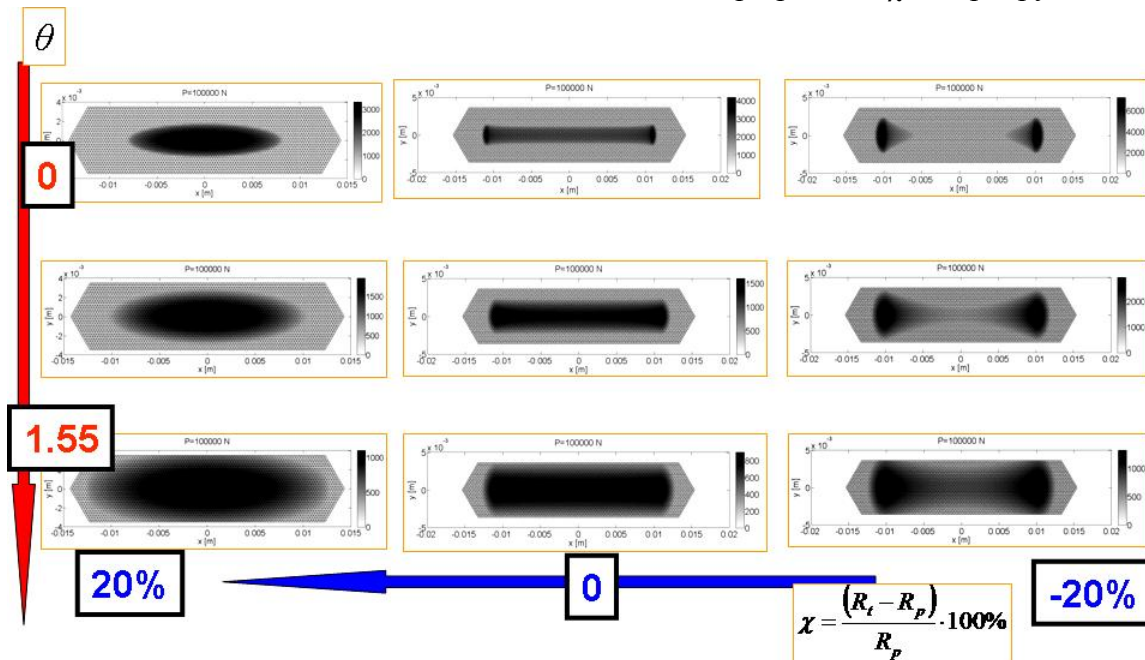


Рис. 6. Характерные распределения контактных давлений в сопряжении шарового поршня радиальной ГОП с тороидальной беговой дорожкой (см. рис. 4, 5)

**Анализ результатов.** Как видно из полученных результатов, распределение контактных давлений  $p$ , расположенное в левом верхнем углу мозаичной картины (см. рис. 6), практически совпадает с распределением, получаемым в модели Герца. Здесь  $\theta = 0$ , а

$\chi = 0,2$ , и применима модель Герца. Получаем эллипсоидальное распределение  $p(x, y)$ .

С ростом  $\theta$  характер распределения  $p(x, y)$  изменяется, приближаясь к параболаидному. При этом, однако, пятно контакта во многом напоминает эллипсовидное (в модели Герца – эллипс), хотя с ростом  $\theta$  увеличивается, а, подходя к границам детали, приобретает вид прямоугольника со скругленными краями. Однако, как и в первом случае, максимум давлений – в центре пятна контакта, а на границе – давления обнуляются.

При уменьшении  $\chi$  от 0,2 до -0,2 происходит постепенная трансформация овального пятна контакта в две изолированных каплевидных области, а, соответственно, видоизменяются и распределения контактных давлений. В частности, они приобретают форму двух шатров с максимумами в средней части двух каплевидных пятен контакта ближе к периферии контактирующих поверхностей.

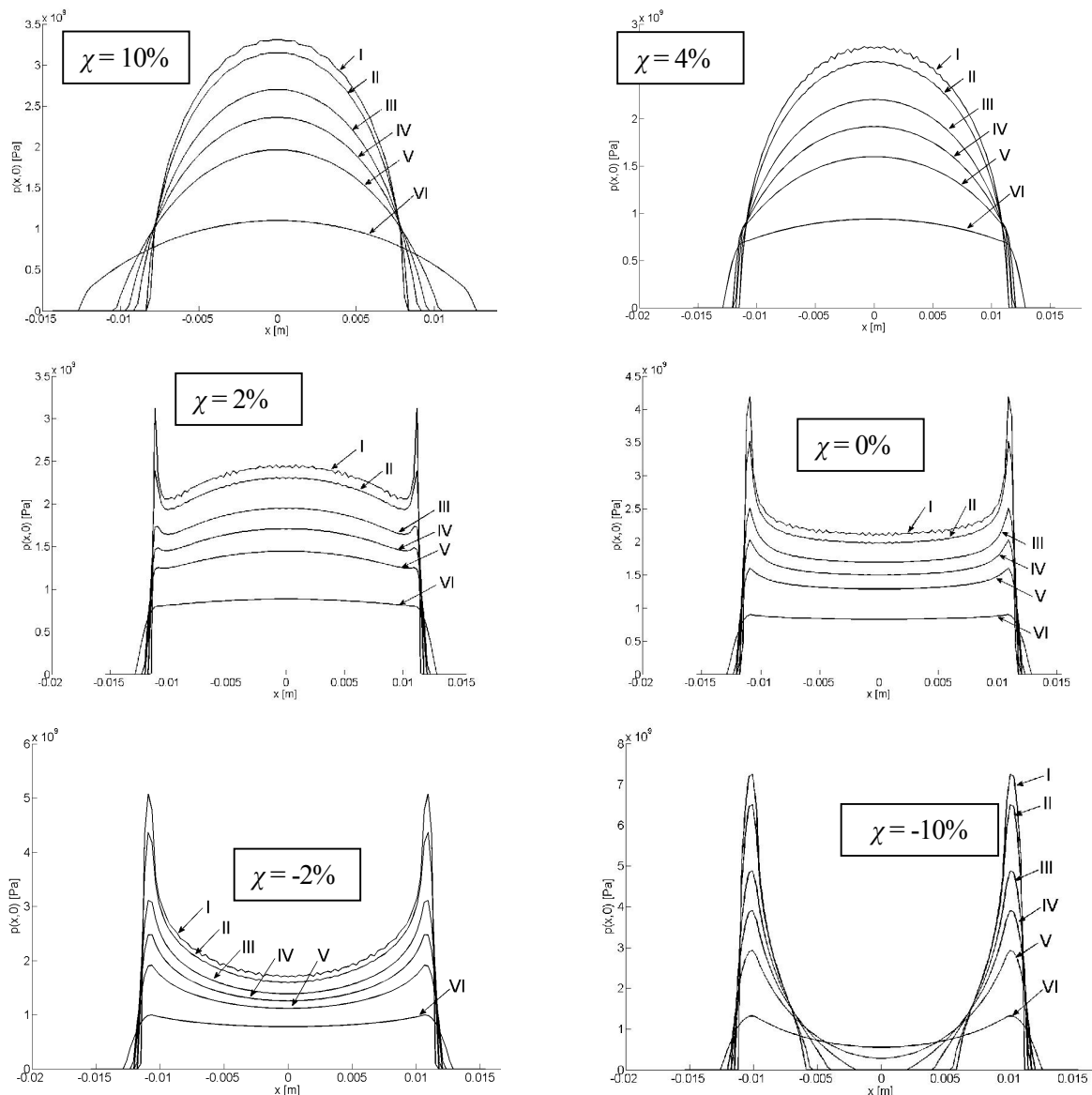


Рис. 7. Картины распределение контактных давлений для различных значений  $\chi$  при варьировании параметра податливости  $L$  упругого слоя, имитирующего шероховатость контактирующих поверхностей поршня и статора ГОП:  
**I** –  $L = 0$  ; **II** –  $L = 1$ ; **III** –  $L = 5$ ; **IV** –  $L = 10$ ; **V** –  $L = 20$ ; **VI** –  $L = 100$

При одновременном уменьшении  $\theta$  и  $\chi$  (на рис. 6 – вдоль диагонали слева вниз на-

право) контактное пятно из овального превращается в гантелеобразное, а, кроме максимума в центре, появляются и возрастают, становясь доминирующими, локальные максимумы на периферии.

Таким образом, можно заключить, что путем варьирования геометрической формы поверхности и физико-механических характеристик винклеровского слоя, моделирующего шероховатость этих контактирующих поверхностей, можно в широких диапазонах изменять уровень контактных давлений, а также форму контактных пятен и распределения давлений между сложнопрофильными телами.

#### **Выводы.**

1. В статье предложен метод расчета контактного взаимодействия сложнопрофильных тел с учетом влияния локальной податливости слоя шероховатости.

2. Анализ полученных распределений контактных давлений и формы контактных пятен показывает, что при изменении и формы сложнопрофильных тел, и свойств податливости винклеровского слоя, моделирующего шероховатость поверхностей контактирующих СПТ, они кардинально видоизменяются. При этом получаемые картины и характеристики оказываются не просто не совпадающими, а резко отличающимися от предсказываемых при использовании моделей Герца и ей подобных.

3. В получаемых при помощи предложенного варианта МГЭ распределениях контактных давлений отсутствуют резкие локальные нефизичные всплески, что отличает в положительном смысле применяемый численный метод дискретизации от других, например, метода конечных элементов.

Область применимости предложенного метода расчета достаточно широка, а точность – удовлетворительна, что дает возможность применять его в дальнейших исследованиях для анализа контактного взаимодействия сложнопрофильных тел разнообразной формы и с различной шероховатостью контактирующих участков поверхностей.

Полученные результаты планируется в дальнейшем применить при проектных исследованиях широкого класса машиностроительных конструкций, содержащих шероховатые сложнопрофильные тела, находящиеся в условиях силового контакта.

**Литература:** 1. Hertz H. *Über die Berührung fester elastischer Körper* / H. Hertz // *J. Reine Angew. Math.* – 1881. – Vol. 92. – S. 156-171. 2. Джонсон К. *Механика контактного взаимодействия* / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Крагельский И.В. *Основы расчетов на трение и износ* / И.В. Крагельский, М.Н. Добычин, Камбалов В.С. – М.: Машиностроение, 1977. – 576 с. 4. Демкин Н.Б. *Контактирование шероховатых поверхностей* / Н.Б. Демкин. – М.: Наука, 1970. – 228 с. 5. Решетов Д.Н., Портман В.Т. *Точность металлорежущих станков* / Д.Н. Решетов, В.Т. Портман. – М.: Машиностроение, 1986. – 336 с. 6. Ткачук Н. Н. *Методы и модели для исследования контактного взаимодействия шарового поршня с беговой дорожкой в радиальной гидropередаче* / Н. Н. Ткачук // *Вестник НТУ „ХПИ“*. – Харьков: НТУ „ХПИ“. – 2008. – Вып. 2. – С.159–166. 7. Ткачук Н.Н. *Анализ контактного взаимодействия сложнопрофильных элементов машиностроительных конструкций с кинематически сопряженными поверхностями: дисс... канд. техн. наук: спец. 05.02.09.* – Харьков, 2011. – 203 с. 8. *Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения* / Н.Н. Ткачук, И.Я. Мовшиович, Н.А. Ткачук и др. // *КШП. ОМД.* – М.: ООО „Тисо Принт“, 2014. – № 3 – С. 3-10. 9. *Анализ контактного взаимодействия гладких и шероховатых тел методом граничных элементов: модели и разрешающие уравнения* / Н.Н. Ткачук, И.Я. Мовшиович, Н.А. Ткачук и др. // *КШП. ОМД.* – М.: ООО „Тисо Принт“, 2014. – № 4 – С. 3-8. 10. Крауч С., Старфилд А. *Методы граничных элементов в механике твердого тела.* – М.: Мир, 1987. – 328 с. 11. Аврунин Г.А. *Объемная гидropередача с шариковыми поршнями ГОП–900: характеристики и технический уровень* / Аврунин Г.А., Кабаненко И.В., Хавиль В.В. // *Механіка та машинобудування.* – 2004. – №1. – С.14-21.

**Bibliography (transliterated):** 1. Hertz H. *Über die Berührung fester elastischer Körper* / H. Hertz // *J. Reine Angew. Math.* – 1881. – Vol. 92. – S. 156-171. 2. Dzhonson K. *Механика контактного взаимодействия* / К. Джонсон. – М.: Мир, 1989. – 509 с. 3. Kragelskiy I.V. *Osnovyi raschetov na trenie i iznos* / I.V. Kragelskiy, M.N. Dobyichin, Kambalov V.S. – М.: Mashinostroenie, 1977. – 576 с. 4. Demkin N.B. *Kontaktirovaniye sherohovatyih poverhnostey* / N.B. Demkin. – М.: Nauka, 1970. – 228 с. 5. Reshetov D.N., Portman V.T. *Tochnost metallovezhushchih stankov* / D.N. Reshetov, V.T. Portman. – М.: Mashinostroenie, 1986. – 336 с. 6. Tkachuk N. N. *Metodyi i modeli dlya issledovaniya kontaktnogo vzaimodeystviya sha-rovogo porshnya s begovoy dorozhkoy v radialnoy gidroperedache* / N. N. Tkachuk // *Vestnik NTU „HPI”*. – Harkov: NTU „HPI”. – 2008. – Vyip. 2. – S.159–166. 7. Tkachuk N.N. *Analiz kontaktnogo vzaimodeystviya slozhnoprofilnyih elementov mashinostroitelnyih konstruksiy s kinematicheski sopryazhennyimi poverhnostyami: diss... kand. tehn. nauk: spets. 05.02.09.* – Harkov, 2011. – 203 с. 8. *Analiz kontaktnogo vzaimodeystviya gladkih i sherohovatyih tel metodom granichnyih elementov: modeli i razreshayuschie uravneniya* / N.N. Tkachuk, I.Ya. Movshovich, N.A. Tkachuk i dr. // *KShP. OMD.* – М.: ООО „Tiso Print”, 2014. – # 3 – S. 3-10. 9. *Analiz kontaktnogo vzaimodeystviya gladkih i sherohovatyih tel metodom granichnyih elementov: modeli i razreshayuschie uravneniya* / N.N. Tkachuk, I.Ya. Movshovich, N.A. Tkachuk i dr. // *KShP. OMD.* – М.: ООО „Tiso Print”, 2014. – # 4 – S. 3-8. 10. Krauch S., Starfeld A. *Metodyi granichnyih elementov v mehanike tverdogo tela.* – М.: Mir, 1987. – 328 с. 11. Avrunin G.A. *Ob'emnaya gidroperedacha s sharikovymi porshnyami GOP-900: harakteristiki i tehniceskij uroven* / Avrunin G.A., Kabanenko I.V., Havil V.V. // *Mehanika ta mashinobuduvannya.* – 2004. – #1. – S.14-21.

Ткачук Н.Н., Скрипченко Н.Б., Ткачук А.В., Литвиненко А.В., Крюков С.Д., Богач А.С.

#### ОЦЕНКА ВЛИЯНИЯ ШЕРОХОВАТОСТИ НА КОНТАКТНЫЕ ДАВЛЕНИЯ В СОПРЯЖЕНИИ СЛОЖНОПРОФИЛЬНЫХ ТЕЛ

В статье для определения распределения контактного давления между сложнопрофильными телами предлагается использовать метод граничных элементов. Влияние шероховатости поверхностей контактирующих тел моделируется с помощью винклеровского слоя. Установлены закономерности распределения контактного давления в зависимости от распределения зазора между телами и податливости винклеровского слоя.

Ткачук М.М., Скрипченко Н.Б., Ткачук Г.В., Литвиненко О.В., Крюков С.Д., Богач А.С.

#### ОЦІНКА ВПЛИВУ ШОРСТКОСТІ НА КОНТАКТНИЙ ТИСК У СПРЯЖЕННІ СКЛАДНОПРОФІЛЬНИХ ТІЛ

У статті для визначення розподілу контактного тиску між складнопрофільними тілами пропонується використовувати метод граничних елементів. Вплив шорсткості поверхонь контактуючих тіл моделюється за допомогою вінклеровського шару. Установлені закономірності розподілу контактного тиску залежно від розподілу міжтілового зазору та податливості вінклеровського шару.

Tkachuk N.N., Skripchenko N.B., Tkachuk A.V., Litvinenko O.V., Krukov S.D., Bogach A.S.

#### ASSESSMENT OF THE INFLUENCE OF ROUGHNESS ON CONTACT PRESSURE BETWEEN COMPLEX-SHAPED BODIES

In this paper boundary element method is proposed for the analysis of pressure distribution in the contact of complex-shaped bodies. The effect of surface roughness is modelled by Winkler elastic layer. The character of the contact pressure distribution is determined with respect to the gap geometry and the compliance of the Winkler layer.