

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ РОТОРНОЙ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ С МАГНИТНЫМИ ПОДШИПНИКАМИ

Введение. Работа роторных машин (турбогенераторов, центробежных компрессоров, турбодетандеров, детандер-компрессорных агрегатов) сопровождается вибрацией, которая при достижении определенного уровня может привести к выходу из строя как самой машины в целом, так и ее конструктивных элементов: корпуса, вала, опор. Одной из причин повышенных вибраций является работа ротора на резонансных режимах, прямо связанных с критическими скоростями вращения. Снижение уровня вибраций обеспечивается использованием эффекта самоцентрирования ротора [1] уменьшением значения первой критической скорости вращения и обеспечением безопасного перехода через критические скорости в диапазоне до максимальных рабочих скоростей вращения [2]. Это достигается за счет уменьшения жесткости динамической системы «ротор – опоры», установкой ротора в упруго-демпферные опоры с заданными жесткостью и демпфирующими свойствами [2]. Одним из самых перспективных в настоящий момент видов упругих опор являются магнитные подшипники (МП) [3-4], которые характеризуются рядом преимуществ: отсутствием смазочных систем; сокращением потерь на трение [4]. Но при использовании этого вида опор кроме опасных режимов работы на критических скоростях возможно возникновение других резонансных режимов из-за нелинейной взаимосвязи механических величин, таких как перемещения и восстанавливающие силы в МП ввиду магнитной или электромагнитной природы последних.

1. Постановка задачи. К наиболее часто применяемым типам магнитных подшипников относятся активные магнитные подшипники (АМП) и пассивные магнитные подшипники на постоянных магнитах (МППМ) [4]. АМП являются управляемыми электромеханическими устройствами, в которых стабилизация положения ротора реализуется силами магнитного притяжения, что позволяет гибко варьировать характеристики опор за счет подбора вида и параметров закона управления токами в обмотках электромагнитов. МППМ не нуждаются в источниках электроэнергии, им не нужна система автоматического регулирования, которая составляет основную часть стоимости АМП, но они имеют относительно низкую жесткость, которая не может изменяться. Конструктивно МППМ выполняются с использованием двух или более магнитных колец с осевой или радиальной намагниченностью, а стабилизация положения ротора осуществляется силами магнитного притяжения или отталкивания. Кроме того возможна реализация полного магнитного подвеса ротора с одновременным применением МППМ и АМП, как показано на рис. 1. Такая схема наиболее перспективна для опирания высокоскоростных роторов, например, детандер-компрессорных агрегатов.

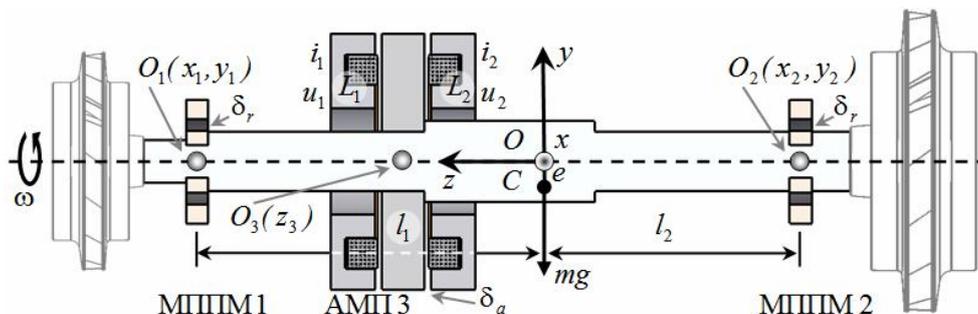


Рис. 1. Схема полного магнитного подвеса ротора турбодетандера

К целям данной работы относится обнаружение особенностей колебательных явлений, обусловленных нелинейной взаимосвязанностью электрических, магнитных и механических процессов в роторных системах с магнитными подшипниками разных типов. Решение этих задач позволит повысить достоверность прогнозирования вибрационного состояния роторных машин с МП с целью исключения повышенных вибраций и оценки опасности каждой критической скорости вращения или любого другого возможного резонансного режима. Для анализа динамического поведения жестких роторов в одном из наиболее рациональных вариантов полного магнитного подвеса, представленного на рис. 1, предлагается использовать аналитическую модель, предложенную в [5]. Кроме того, одной из целей является выявление преимуществ, связанных с применением этой математической модели по сравнению с другими для корректного описания динамики роторов при возможном возникновении супер- и субгармонических, комбинационных, хаотических и других нелинейных колебаний.

2. Объект исследований. На рис. 2а представлена лабораторная установка, реализующая полный магнитный подвес ротора, представленный на рис. 1, с двумя радиальными МППКМ 1,2 и одним осевым АМП 3 двустороннего действия с двумя обмотками $L_{1,2}$. Она включает в себя основание (1) с четырьмя стойками (2 и 3) для крепления неподвижных колец радиальных МППМ (4) и статоров осевого АМП (5), а также сам ротор из дюралюминия (6), на котором размещены диск осевого АМП (7) из ферромагнитного материала, кольцевые постоянные магниты с осевой намагниченностью радиальных МППМ, обеспечивающие самоцентрирование в радиальном направлении за счет сил отталкивания, и диск (8) системы регистрации (измерения). Силовые характеристики восстанавливающих сил в МППМ носят нелинейный характер (близкий к кубическому) по отношению к радиальным смещениям роторных магнитов [6]. На основании размещен блок управления осевым АМП (9) и электродвигатель (10), а на стойках радиальных МППМ – оптические датчики системы измерения осевого положения ротора (11). Статоры осевого АМП выполнены из стали, каждый с двумя полюсами – внутренним и внешним. Между полюсами статоров АМП в цилиндрических пазах размещены обмотки управления. Стабилизация положения ротора в осевом направлении осуществляется силами магнитного притяжения, а его устойчивость обеспечивается СУ с отрицательной обратной связью, реализующей принятый алгоритм управления, то есть алгоритм изменения управляющих напряжений $u_{1,2}$ [7]. Они подаются на обмотки АМП 3 в зависимости от положения ротора, которое определяется с помощью оптических датчиков. При центральном положении ротора, с которым связана неподвижная правая декартова система координат Ox_1y_2 (см. рис. 1), центры масс подвижных и неподвижных магнитов совпадают, а диск находится посередине между статорами.

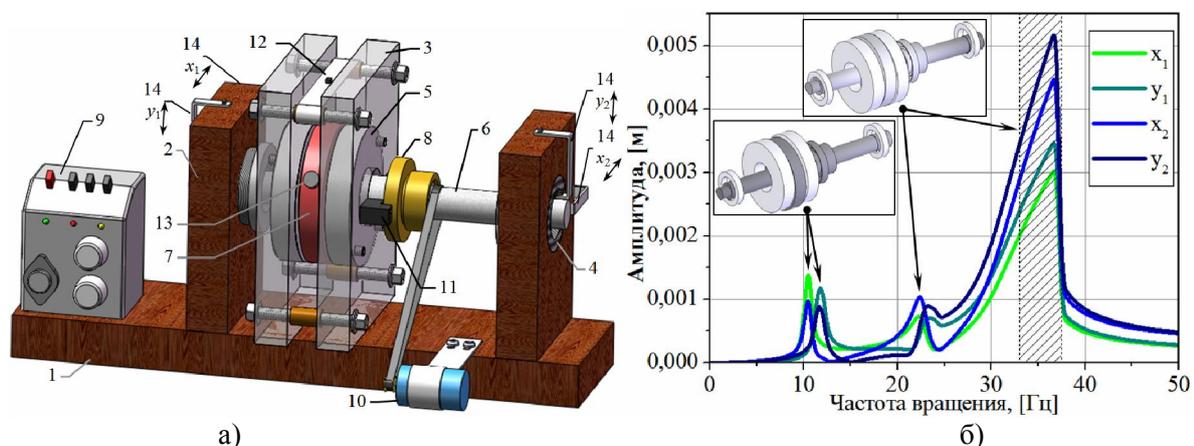


Рис. 2. Полная геометрическая модель лабораторной установки ротора в МП и экспериментально полученная амплитудно-частотная характеристика ротора

На данной установке были проведены экспериментальные исследования по изучению динамики модельного ротора при изменении угловой скорости вращения в диапазоне от 0 до 3000 об/мин. Для измерения частоты вращения ротора в системе используется датчик Холла (12), который выдает импульсы напряжения с частотой, пропорциональной скорости вращения ротора. Управляющим элементом является магнитная метка на диске осевого АМП. Определение горизонтальных (x_1 и x_2) и вертикальных (y_1 и y_2) отклонений центров опорных участков ротора в МППМ основано на измерении величины напряженности магнитного поля в зазорах этих подшипников с помощью датчиков Холла (14). Результатом серии экспериментов является амплитудно-частотная характеристика (АЧХ), которая представлена на рис. 2б. Она позволяет оценить наличие резонансных режимов в исследуемой области и вид движения ротора, соответствующего различным значениям частоты вращения. Так, обнаружено: раздвоение и первого ($\sim 10,5$ и ~ 12 Гц), и второго ($\sim 22,5$ и ~ 33 Гц) резонансов вследствие неодинаковой жесткости МППМ в горизонтальном и вертикальном направлениях (анизотропия опор) из-за разных положений статического равновесия ($x_{1ст}=x_{2ст}=0$, $y_{1ст}$ и $y_{2ст}\neq 0$) относительно центров подшипников, возникающих при действии силы тяжести; прямая ($\sim 10,5$ Гц) и обратная (~ 12 Гц) цилиндрические прецессии, а также прямая ($\sim 22,5$ Гц) и обратная (~ 35 Гц) конические прецессии (на рис. 2б показаны формы колебаний, соответствующие этим движениям); срыв колебаний с переходом с одного устойчивого режима на другой устойчивый режим (на рис. 2б заштрихованная область). Кроме того анализ результатов позволил выявить в системе, наряду с гармоническими колебаниями с частотой возбуждения (вращения), суб- и супергармонические колебаний, кратные суб- и суперрезонансы, а также обнаружить связь между радиальными и осевыми колебаниями. Более подробное описание этих результатов приведено в [8].

3. Математическое моделирование. Аналитическая нелинейная модель динамики жесткого ротора модельной установки с МП различных типов базируется на предложенном ранее в работах [5, 8] общем подходе. Она основана на дифференциальных уравнениях Лагранжа-Максвелла в форме Рауса относительно двух групп переменных – обобщенных координат x_1, \dots, z_3 (перемещений центров опорных участков ротора O_1, O_2, O_3) и потокосцеплений Ψ_{c1}, Ψ_{c2} (полных магнитных потоков через контуры катушек) (рис. 1). Примем, что все обобщенные координаты перемещения ротора x_1, \dots, z_3 , параметры неуравновешенности e_1, e_2 (линейные) и γ_1, γ_2 (угловые), а также зазоры в МП – δ_r (радиальный в МППМ), δ_a (осевой в АМП) – имеют одинаковый порядок малости. Тогда, учитывая это предположение о малости обобщенных координат и их производных, нелинейные слагаемые уравнений движения можно считать малыми по сравнению с линейными членами [8]. Исключая из рассмотрения слагаемые уравнений движения, порядок малости которых выше третьего, приходим к полностью связанной системе семи нелинейных дифференциальных уравнений (СДУ), описывающих динамику рассматриваемой электромагнитомеханической системы [5]:

$$\begin{cases} m_{11}\ddot{x}_1 + m_{12}\ddot{x}_2 + j(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + f_{x1}'' + f_{x1}''' + b_{x1}\dot{x}_1 = -F_{Mx}(x_1, y_1) + Q_{x1} + H_{x1}(t); \\ m_{22}\ddot{x}_2 + m_{12}\ddot{x}_1 - j(\dot{y}_1 - \dot{y}_2) + f_{x2}'' + f_{x2}''' + b_{x2}\dot{x}_2 = -F_{My}(x_1, y_1) + Q_{x2} + H_{x2}(t); \\ m_{11}\ddot{y}_1 + m_{12}\ddot{y}_2 - j(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_{y1}'' + f_{y1}''' + b_{y1}\dot{y}_1 = -F_{Mx}(x_2, y_2) + Q_{y1} + H_{y1}(t); \\ m_{22}\ddot{y}_2 + m_{12}\ddot{y}_1 + j(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) + f_{y2}'' + f_{y2}''' + b_{y2}\dot{y}_2 = -F_{My}(x_2, y_2) + Q_{y2} + H_{y2}(t); \\ m\ddot{z}_3 + f_{z3}'' + f_{z3}''' + b_{z3}\dot{z}_3 = -F_{Mz}(x_1, y_1, z_1) - F_{Mz}(x_2, y_2, z_2) - \frac{\partial W}{\partial z_3} + Q_{z3} + H_{z3}(t); \\ \dot{\Psi}_{c1} + r_{c1} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{c1}} = u_{c1}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3); \quad \dot{\Psi}_{c2} + r_{c2} \frac{\partial W}{\partial \Psi_{c2}} = u_{c2}(x_1, y_1, x_2, y_2, z_3); \end{cases} \quad (1)$$

где m – масса ротора; m_{ks}, j – инерционные и гироскопические коэффициенты; b_{x_1, \dots, z_3} – коэффициенты вязкости; f'' и $f'''(x_1, \dots, z_3)$ – нелинейные слагаемые уравнений движения, обусловленные силами инерции и потенциального поля второго и третьего порядка по отношению к обобщенным координатам и их производным по времени, т.е. порядка, сравнимого с порядком зависимостей магнитных сил в МППМ 1,2 $F_{Mx}(x,y), F_{My}(x,y), F_{Mz}(x,y,z)$ [6]; Q_{x_1, \dots, z_3} – другие обобщенные силы, в частности, сила тяжести; $H_{x_1, \dots, z_3}(t)$ – внешние гармонические возмущающие силы, вызванные линейной и угловой неуравновешенностями; ω – угловая скорость ротора; $r_{c1,2}$ – активные сопротивления в цепях обмоток АМП 3 (рис. 1); $W=W(x_1, \dots, z_3, \Psi_{c1}, \Psi_{c2})$ – магнитная энергия в АМП 3.

Выражения в уравнениях (1) внешних возмущающих сил, вызванных неуравновешенностью, а также инерционных и гироскопических коэффициентов имеют вид:

$$\begin{cases} m_{11}=(ml_2^2+J_1)/l^2; m_{12}=(ml_1l_2-J_1)/l^2; m_{22}=(ml_1^2+J_1)/l^2; j=\omega J_3/l^2; \\ H_{x1}(t)=M_{11}E_x+J\Gamma_x; H_{x2}(t)=M_{22}E_x-J\Gamma_x; \\ H_{y1}(t)=M_{11}E_y-J\Gamma_y; H_{y2}(t)=M_{22}E_y+J\Gamma_y; \\ E_x=e_1 \cos(\omega t)-e_2 \sin(\omega t); E_y=e_1 \sin(\omega t)+e_2 \cos(\omega t); \\ \Gamma_x=\gamma_1 \sin(\omega t)+\gamma_2 \cos(\omega t); \Gamma_y=\gamma_1 \cos(\omega t)-\gamma_2 \sin(\omega t); \\ M_{11}=ml_2\omega^2/l; M_{22}=ml_1\omega^2/l; J=\omega^2(J_1-J_3)/l. \end{cases} \quad (2)$$

Слагаемые второго порядка в уравнениях движения в (1) равны:

$$\begin{cases} f_{x1}''=-m\ddot{z}_3E_x/l; f_{x2}''=m\ddot{z}_3E_x/l; f_{y1}''=-m\ddot{z}_3E_y/l; f_{y2}''=m\ddot{z}_3E_y/l; \\ f_{z3}''=m\left[\left(\ddot{x}_2-\ddot{x}_1\right)-\omega^2\left(x_2-x_1\right)+2\omega\left(\dot{y}_2-\dot{y}_1\right)\right]E_x+ \\ \quad +\left[\left(\ddot{y}_2-\ddot{y}_1\right)-\omega^2\left(y_2-y_1\right)-2\omega\left(\dot{x}_2-\dot{x}_1\right)\right]E_y/l. \end{cases} \quad (3)$$

Нелинейные слагаемые третьего порядка ввиду громоздкости записей здесь не приводятся (они даны в [9]), однако именно в них проявляется полная взаимосвязь между всеми обобщенными координатами посредством членов, не зависящих от параметров неуравновешенности.

Выражение для магнитной энергии W для связи между потокоцеплениями $\Psi_{c1,2}$ и токами $i_{1,2}$ (рис. 1) получено на основе рассмотрения эквивалентных схем замещения электромагнитной цепи АМП 3 и схематизации путей магнитных потоков [5]:

$$W=\frac{1}{2}\left[\left(R_{mcs1}+R_{g1}+R_{g2}\right)\frac{\Psi_{c1}^2}{w_1^2}+\left(R_{mcs2}+R_{g3}+R_{g4}\right)\frac{\Psi_{c2}^2}{w_2^2}+R_{mcr}\left(\frac{\Psi_{c1}}{w_1}+\frac{\Psi_{c2}}{w_2}\right)^2\right] \quad (4)$$

где R_{mcs1}, R_{mcs2} и R_{mcr} – магнитные сопротивления стальных магнитопроводов первого и второго статоров и ротора; $R_{g1}=R_{g1}(x_1, \dots, z_3), R_{g2}=R_{g2}(x_1, \dots, z_3)$ и $R_{g3}=R_{g3}(x_1, \dots, z_3), R_{g4}=R_{g4}(x_1, \dots, z_3)$ – магнитные сопротивления воздушных зазоров между полюсами статоров и ротором соответственно; w_1 и w_2 – количество витков в обмотках АМП.

4. Результаты решения задачи о вынужденных нелинейных колебаниях. Исследуемая система – это ротор массой 2,5 кг в полном магнитном подвесе (рис. 1).

Основные параметры имеют такие значения: $l_1=0,106$ м, $l_2=0,176$ м, $J_1=0,0107$ кг·м², $J_3=0,0034$ кг·м², $\delta_r=5,5 \cdot 10^{-3}$ м, $\delta_a=3 \cdot 10^{-3}$ м, $\gamma=0,003$ рад, $e=6 \cdot 10^{-5}$ м и $b_{x1,\dots,x3}=2,325$ кг/с.

Для предварительной оценки возможных в системе резонансных режимов, а также для проверки адекватности математической модели были выполнены расчеты собственных частот и форм колебаний невращающегося жесткого ротора в МП, которые представлены на рис. 3а. Эти расчеты выполнялись с использованием линеаризованной системы уравнений без учета демпфирования. Их результаты приведены в таблице 1. Уточнение значений критических скоростей выполнялось с помощью Кэмпбелл-диаграммы, представленной на рис. 3б. Сравнительный анализ критических скоростей (табл. 1), определенных без и с учетом зависимости от ω , показал, что наибольшее влияние этот учет оказывает на критические частоты, соответствующие конической прецессии ротора (рис. 3б). Кроме того, на рис. 3б штрихпунктирными линиями показаны не только критические скорости, при которых ротор совершает колебания с основной частотой (вращения), но и другие резонансные режимы с кратными частотами. А в табл. 1 даны значения резонансных частот с целью их сравнения с экспериментальными данными. Так, видно, что значения этих частот отличаются не более чем на 1,5%, что подтверждает корректность используемой математической модели.

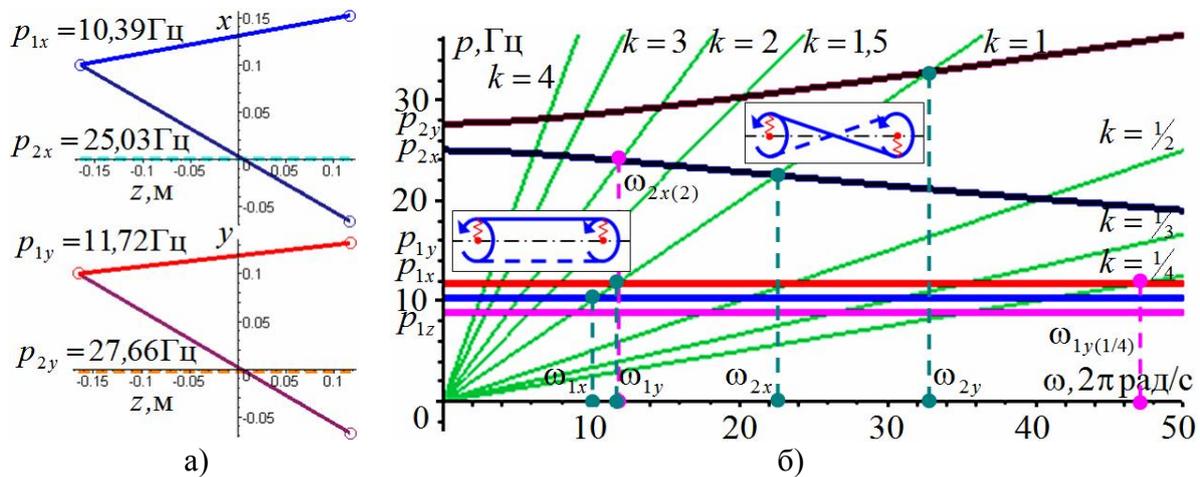


Рис. 3. Собственные частоты и формы невращающегося ротора (а) и резонансная диаграмма Кэмпбелла (б)

Таблица 1.

Собственные частоты, критические скорости и резонансные режимы ротора

Расчетные исследования				Эксперимент [8]
Собственная частота, Гц	Критическая скорость, 2π рад/с	Критическая скорость при $p=p(\omega)$, 2π рад/с	Резонансные частоты, 2π рад/с	Резонансные частоты, 2π рад/с
$p_{1z}=8,87$	$\omega_{1z}=8,87$	$\omega_{1z}=8,90$	$\omega_{1z}=8,9$	$\omega_{1z}=9,0$
$p_{1x}=10,39$	$\omega_{1x}=10,39$	$\omega_{1x}=10,36$	$\omega_{1x}=10,4$	$\omega_{1x}=10,5$
$p_{1y}=11,72$	$\omega_{1y}=11,72$	$\omega_{1y}=11,71$	$\omega_{1y}=11,7$	$\omega_{1y}=11,9$
$p_{2x}=25,03$	$\omega_{2x}=25,03$	$\omega_{2x}=22,50$	$\omega_{2x}=22,5$	$\omega_{2x}=22,5$
$p_{2y}=27,66$	$\omega_{2y}=27,66$	$\omega_{2y}=32,80$	$\omega_{2y}=37,0$ (срыв)	$\omega_{2y}=37,5$ (срыв)
-	-	$\omega_{2x(2)}=11,81$	$\omega_{2x(2)}=11,8$	$\omega_{2x(2)}=12,0$
-	-	$\omega_{1y(1/4)}=47,10$	$\omega_{1y(1/4)}=48,5$	$\omega_{1y(1/4)}=48,5$

Анализ вынужденных колебаний ротора, вызванных динамической неуравновешенностью, выполнялся путем решения нелинейной СДУ (1) численно методом Рунге-Кутты 7-8 порядков для фиксированных значений угловой скорости. При этом с помо-

щью специального подхода была обеспечена высокая сходимость решения. Результаты расчетных исследований вынужденных колебаний – это решения на стационарных участках для обобщенных координат x_1, y_1, x_2, y_2, z_3 в диапазоне угловой скорости $0-100\pi$ рад/с. Они представляют собой графики зависимостей обобщенных координат от времени (зависимости $y_{1,2}$ и $x_{1,2}$ от t). На рис. 4 эти графики приведены для первых двух резонансных частот, на которых ротор совершает движение типа прямой и обратной цилиндрических прецессий, о чем можно судить по представленным здесь же траекториям движения центров опорных участков радиальных МППМ (зависимости $y_{1,2}$ от $x_{1,2}$ при согласованном t). Эти частоты получаются вследствие раздвоения первого резонанса из-за анизотропии опор. Анализ таких сигналов с помощью быстрого преобразования Фурье (БПФ) сначала позволяет получить спектры перемещений, соответствующие каждой из частот, на которых выполнялось решение СДУ, а потом выполнить графическое отображение результатов порядкового анализа путем сочленения этих двумерных спектров в трехмерные. На рис. 4 они представлены в виде спектрограмм обобщенных координат, где: f – частота спектра, ω – угловая скорость (частота вращения), A – амплитуда соответствующей обобщенной координаты. Их анализ позволяет обнаружить наличие в системе таких нелинейных явлений как суб- и супергармонические колебания с частотами, кратными основной частоте возбуждения (вращения).

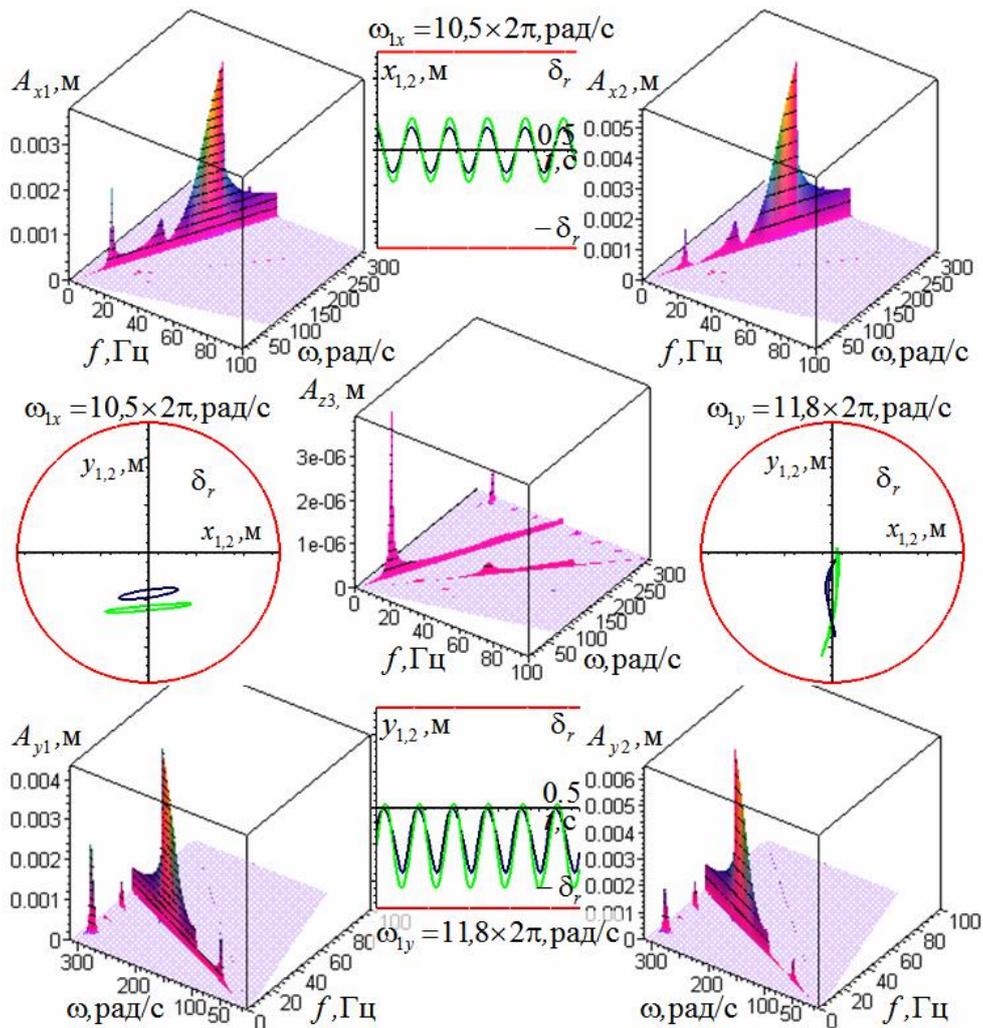


Рис. 4. Результаты порядкового анализа виброграмм движения ротора в направлениях обобщенных координат в диапазоне частоты вращения $0-50$ Гц ($0-100\pi$ рад/с) с разложением на гармоники с помощью БПФ

Более подробное изучение этих колебаний может быть выполнено с помощью рассмотрения зависимостей амплитуд гармоник A , полученных с помощью БПФ, от угловой частоты вынуждающей силы ω_0 , вызванной собственной неуравновешенностью ротора (эта частота соотносится с угловой скоростью ротора как $\omega_0 = \omega$). Они представлены на рис. 5, где приняты обозначения: $A_{(1)}$ – амплитуды первых гармоник, $A_{(1/n)}$ – суб- и $A_{(n)}$ – супергармоник (рис. 5а,в и б,г соответственно), а число в скобках – кратность частоты гармоники основной частоте ω_0 , причем пунктирными линиями показаны скелетные кривые. Приведенные на рис. 5 характеристики, иллюстрирующие динамическое поведение ротора в исследуемом диапазоне, по сути, являются проекциями трехмерных спектров на координатные плоскости $O\omega A$. При этом зависимость амплитуды первой гармоники вынужденных колебаний $A_{(1)}$ от частоты гармонической вынуждающей силы является амплитудно-частотной характеристикой, а графическое изображение этой зависимости (рис. 5) – резонансной кривой.

Выявлено, что первый резонансный режим (ω_{1z}) отвечает осевым колебаниям (рис. 5в).

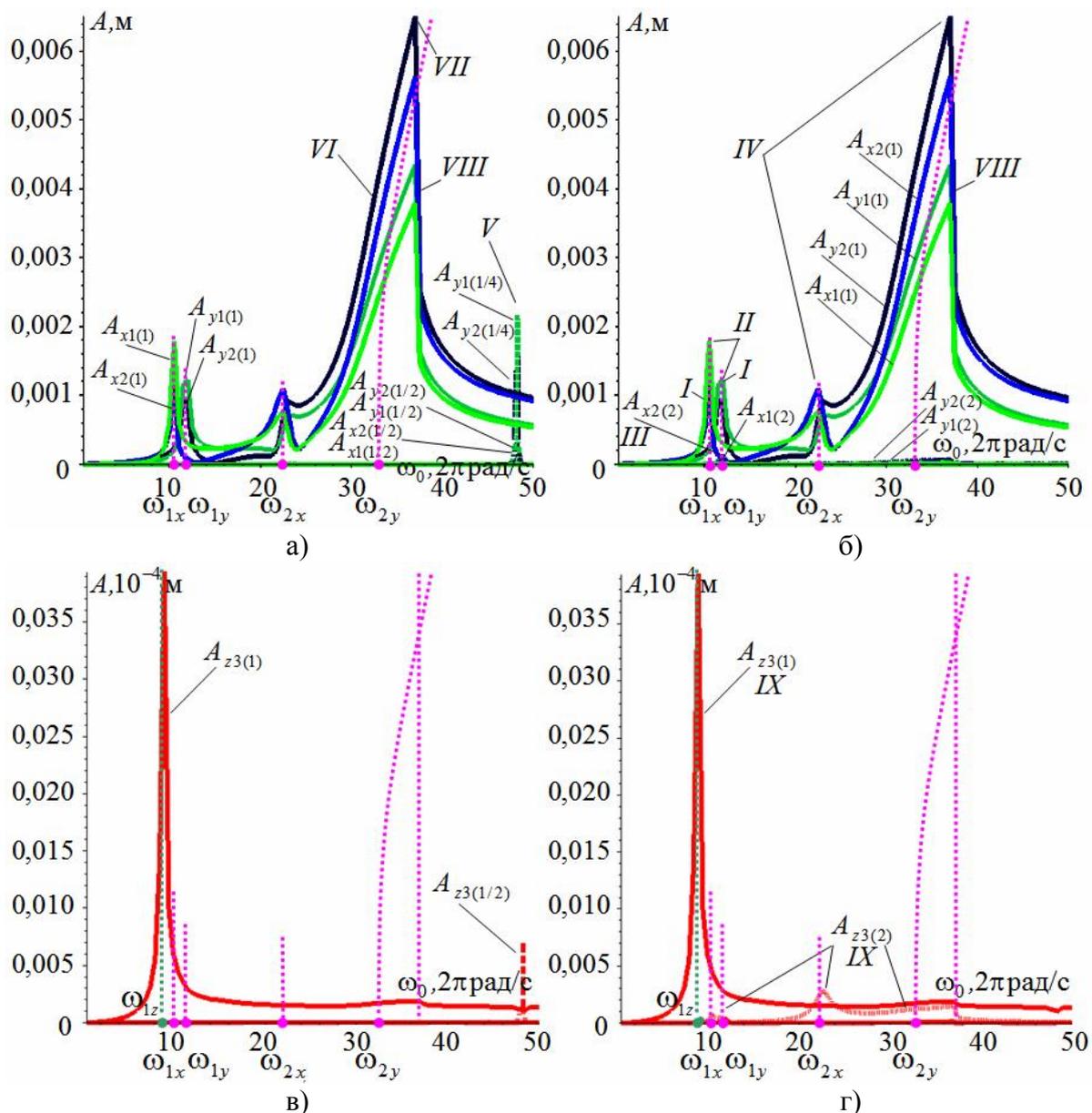


Рис. 5. Зависимости амплитуд основной, суб- и супергармоник от частоты вынуждающей силы: а, б) x_1, y_1, x_2, y_2 ; в, г) z_3

Далее при анализе данных результатов обнаружено: супергармонические колебания в области второго резонансного режима (*I*); раздвоение второго резонанса вследствие анизотропии жесткости МППМ в горизонтальном и вертикальном направлениях, причем при $\omega < \omega_{1x}$ и $\omega > \omega_{1y}$ ротор совершает движение типа прямой, а в диапазоне между этими критическими скоростями $\omega_{1x} < \omega < \omega_{1y}$ – типа обратной цилиндрической прецессий (рис. 3б) (*II*); суперрезонансные колебания $\omega_{2x(2)}$, которые совпадают и с внутренним резонансом $\omega_{2x(2)} = \omega_{1y}$ (рис. 3б) (*III*); раздвоение третьего резонанса вследствие анизотропии жесткости МППМ, причем при $\omega < \omega_{2x}$ и $\omega > \omega_{2y}$ ротор совершает движение типа прямой, а в диапазоне между этими критическими скоростями $\omega_{2x} < \omega < \omega_{2y}$ – типа обратной конической прецессий (рис. 3б) (*IV*); субрезонансные колебания $\omega_{1y(1/4)}$, которые усиливаются внутренним резонансом $\omega_{1y(1/4)} = 4\omega_{1y} = 4\omega_{2x(2)}$ (рис. 3б, 5а,б), причем эти субгармонические колебания возникают при относительно больших частотах возбуждения, а их амплитуды значительно превосходят амплитуды первой гармоники (*V*) [10, с. 31]; вид резонансных кривых в области третьего резонансного режима (ω_{2x} , ω_{2y}) характерен системам с жесткими характеристиками восстанавливающей силы, что справедливо для МППМ (*VI*); третий резонансный режим более опасен, чем второй, так как сопровождается значительным увеличением амплитуд из-за того, что при движении типа конической прецессии (угловых колебаниях) нарушается плоскопараллельность зазоров в осевом АМП, что приводит к возникновению момента, совпадающего по направлению с угловым отклонением ротора (*VII*); в области частот, в которых возможны два устойчивых режима вынужденных колебаний с двумя различными амплитудами наблюдается срыв колебаний (*VIII*); основные и супергармонические резонансные колебания в осевом направлении возбуждаются нагрузкой, действующей в радиальном направлении (собственной неуравновешенностью ротора), причем пики суперрезонансных осевых колебаний совпадают с пиками основных радиальных колебаний (рис. 5в,г и а,б), что является следствием учета взаимосвязи между радиальными и осевой обобщенными координатами посредством нелинейных членов уравнений движения (1) (*IX*). Причем, следует отметить, что в силу жесткой силовой характеристики максимум амплитуд при некоторых резонансах ($\omega_{1y(1/4)}$, ω_{2y}) на АЧХ сдвигается вправо по отношению к критическому значению, определенному по диаграмме Кэмбелла (см. табл. 1).

Эти же резонансные режимы и явления были обнаружены в системе и при проведении экспериментальных исследований [8], а об адекватности математической модели, представляющей собой систему нелинейных полностью связанных между собой посредством обобщенных механических координат x_1, \dots, z_3 и потокосцеплений Ψ_{c1} , Ψ_{c2} с учетом закона управления – напряжений $u_{1,2}$, также зависящих от x_1, \dots, z_3 , можно судить по результатам сравнения расчетных данных (рис. 5) с экспериментально полученными АЧХ (рис. 2б) и зависимостями от частоты вынуждающей силы амплитуд гармоник, отличных от первой [8]. Так, сравнительный анализ результатов позволил установить тождественность как по качественному отображению происходящих в системе процессов, так и по количественному определению их параметров – по амплитудам отличие не превышает 2-3%, а по значениям резонансных частот – 0,2-0,5%.

Оценка динамического поведения ротора на нерезонансных, около резонансных и резонансных режимах может быть выполнена при рассмотрении графиков, характеризующих движение ротора при соответствующих частотах вращения, представленных на рисунках 6 и 7. Здесь для радиальных МППМ 1,2 даны виброграммы установившегося движения центров опорных участков ротора в зазорах в вертикальном $y_{1,2}(t)$ и горизонтальном $x_{1,2}(t)$ направлениях с учетом положений статического равновесия от действия силы тяжести и траектории движения в зазорах $y_{1,2}(x_{1,2})$, а для осевого АМП 3 представлен график движения в зазоре центра опорного участка в осевом направлении $z_3(t)$. Эти графики позволяют выполнить предварительную оценку устойчивости движения на различных режимах по характеру движения и величине размахов колебаний.

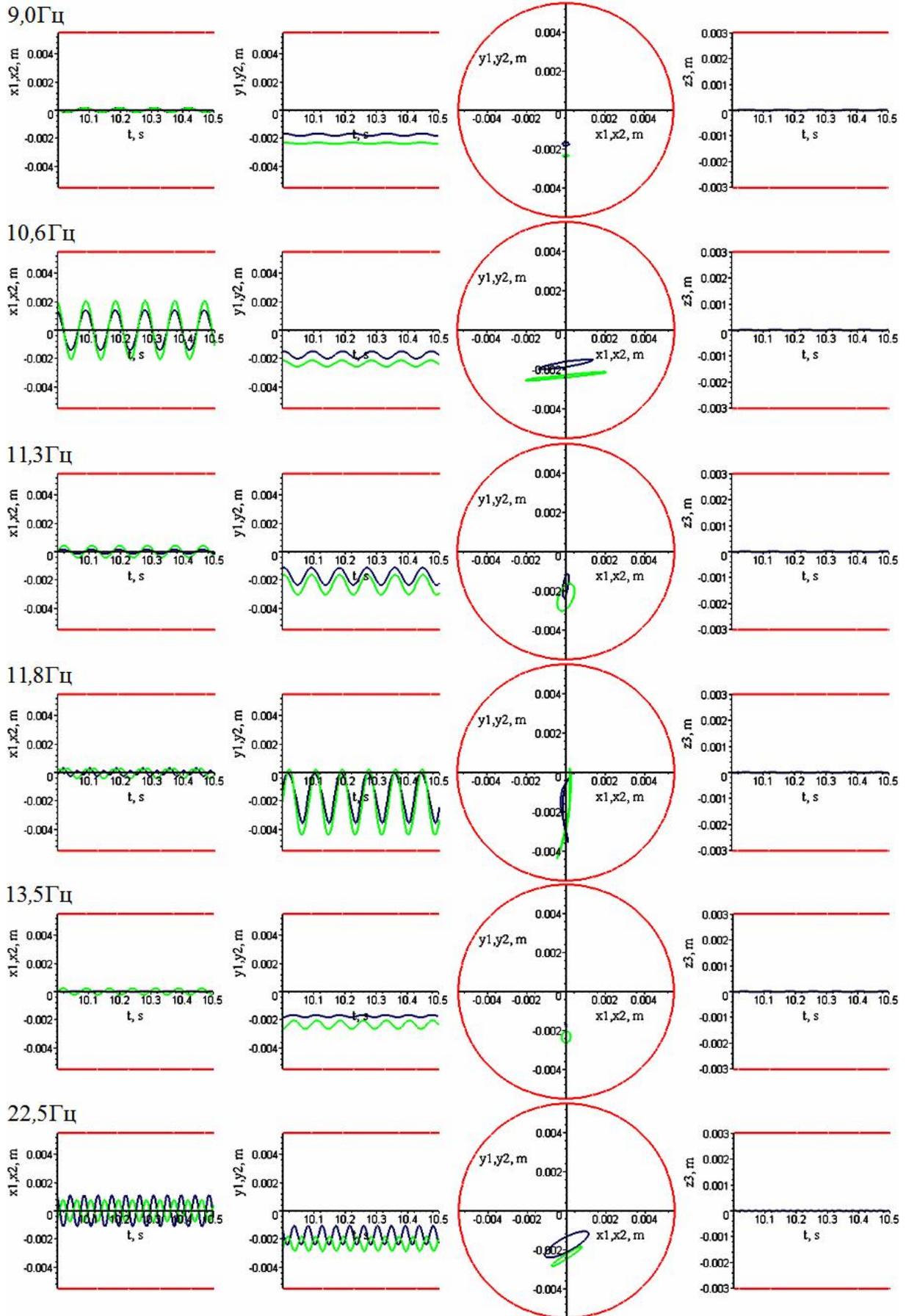


Рис. 6. Виброграмми и траектории движения опорных участков ротора

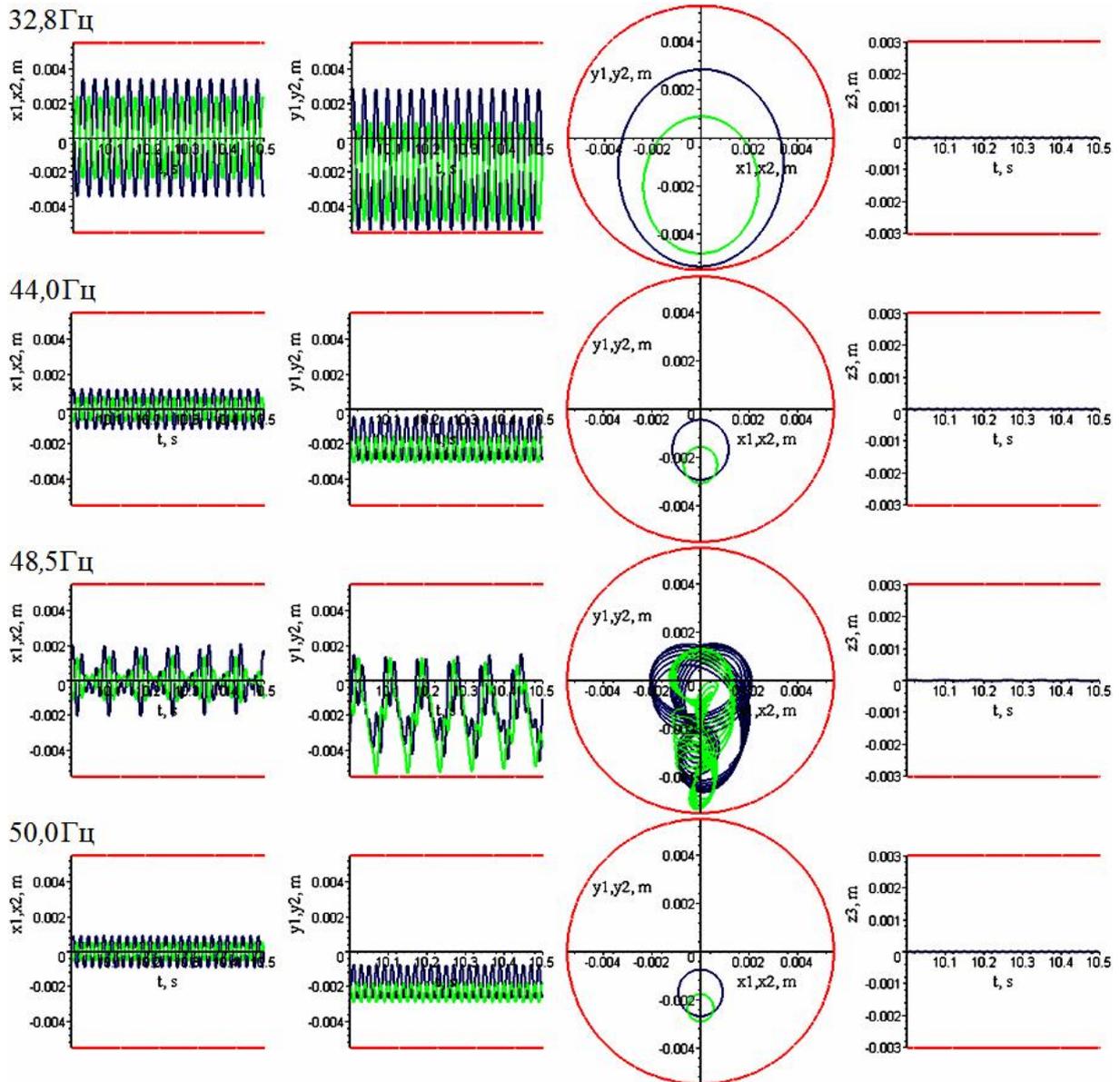


Рис. 7. Виброграмми и траектории движения опорных участков ротора

При приближении частоты к критическим значениям амплитуды колебаний возрастают, а движение носит преимущественно горизонтальный (10,6 и 22,5 Гц) или вертикальный (11,8 и 32,8 Гц) колебательный характер. В до- и зарезонансных областях, а также между резонансными режимами (9,0; 11,3; 13,5; 44,0; 50,0 Гц) цапфы ротора совершают практически круговые движения с частотой синхронной прецессии, что обнаруживается при анализе виброграмм и траекторий движения (рис. 6 и 7). Характер такого движения и амплитуды колебаний, значительно меньшие величин зазоров, свидетельствуют об устойчивости движения ротора на этих режимах. Поэтому для суждения об устойчивости движения ротора во всем исследуемом диапазоне необходимо выполнить углубленный анализ на резонансных частотах. Однако кроме резонансных режимов, соответствующих критическим скоростям, неустойчивость движения возможна на частоте 48,5 Гц, так как здесь наблюдаются субгармонические резонансные колебания.

5. Анализ устойчивости движения ротора на резонансных режимах. Для более детальной оценки устойчивости движения могут быть рассмотрены результаты углубленных расчетных исследований, представленные на рисунках 8-12, а именно: спектры сигналов (а,б,г), фазовые траектории (д,ж) и сечения Пуанкаре (е,з) [11].

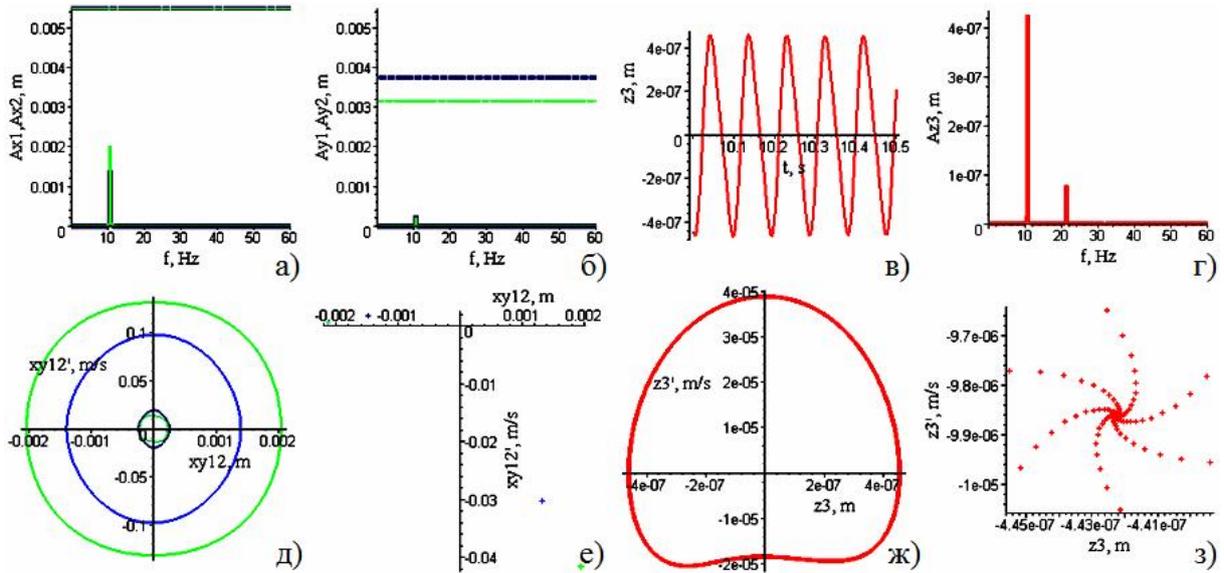


Рис. 8. Характеристики динаміки ротора при частоті вращения 10,6 Гц

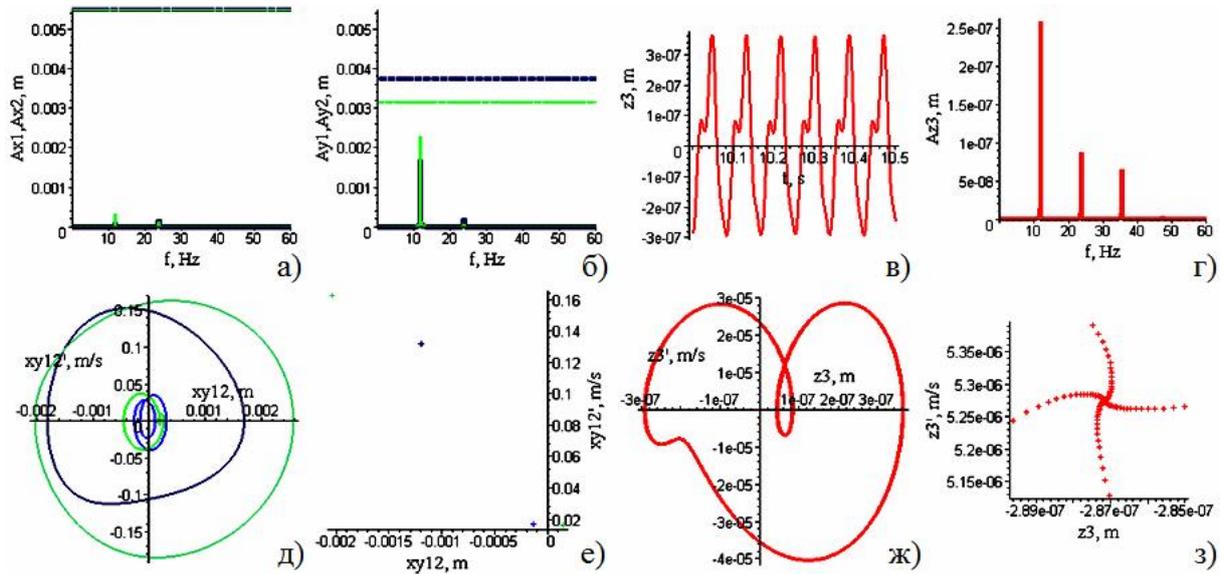


Рис. 9. Характеристики динаміки ротора при частоті вращения 11,8 Гц

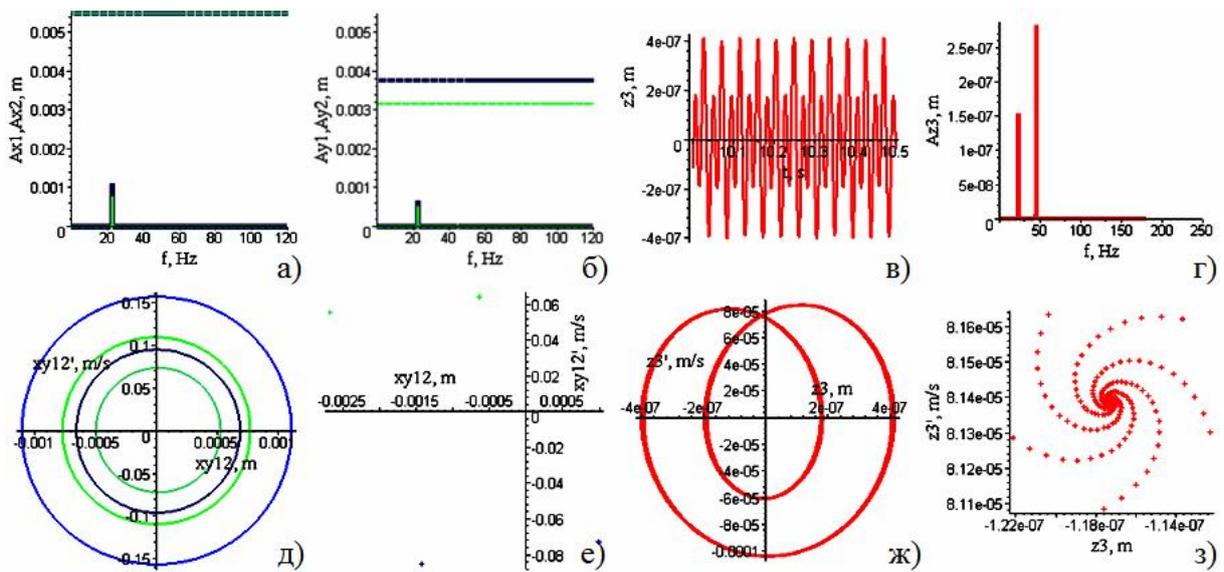


Рис. 10. Характеристики динаміки ротора при частоті вращения 22,5 Гц

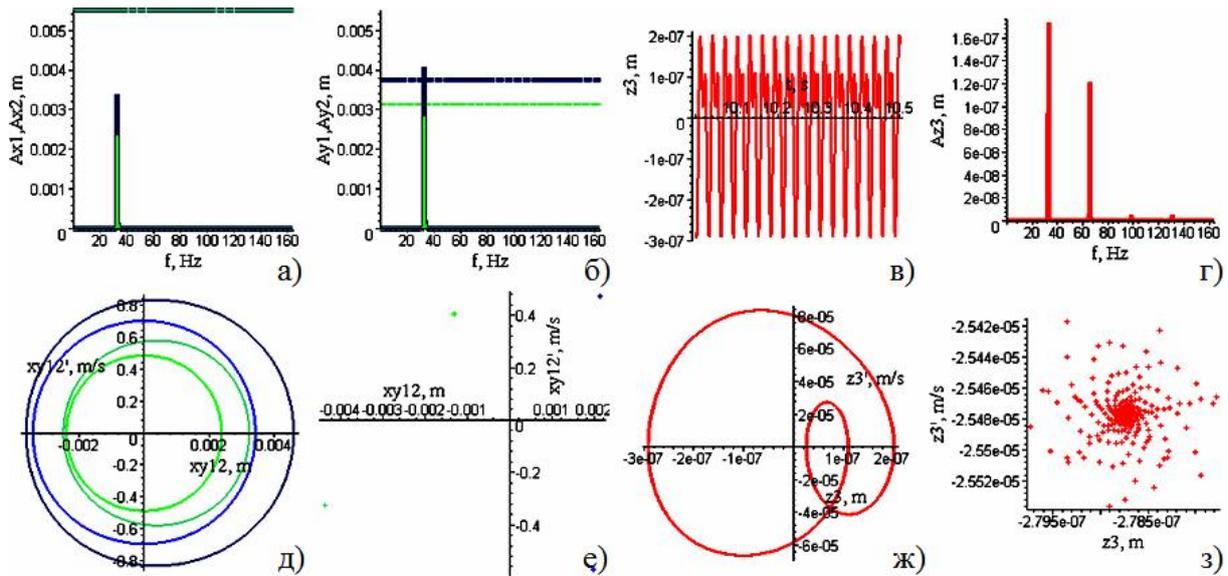


Рис. 11. Характеристики динаміки ротора при частоте вращения 32,8 Гц

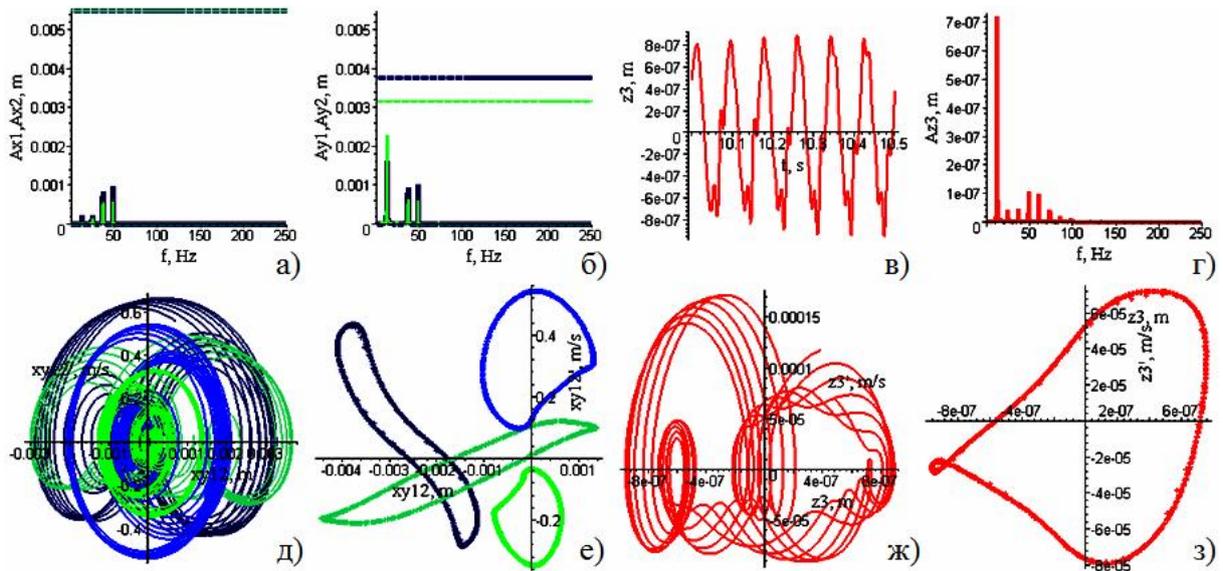


Рис. 12. Характеристики динаміки ротора при частоте вращения 48,5 Гц

Анализ радиальных колебаний (прецессионных движений) на резонансных режимах 10,6, 22,5 и 32,8 Гц позволил определить, что ротор совершает гармонические колебания с основной частотой, то есть с частотой вращения. Об этом свидетельствуют спектры сигналов, представленные на рис. 8а,б, 10а,б и 11а,б. Оценка, выполненная по этим спектрам, а также по фазовым траекториям (рис. 8д, 10д и 11д) и сечениям Пуанкаре (рис. 8е, 10е и 11е) – стробоскопическим отображениям за период внешней силы [11 с. 208-211, 233], свидетельствует об устойчивости движения ротора. Так, на фазовых траекториях наблюдаются особые точки типа «центр» [10 с. 24], а сечения Пуанкаре представляют собой стробоскопические точки для каждой из обобщенных координат x_1, y_1, x_2, y_2 [10 с. 101], то есть наблюдается рациональное отношение периодов колебаний и воздействия [11 с. 233] (в данном случае они просто равны).

Анализ колебательных явлений на других резонансных частотах возбуждения 11,8 и 48,5 Гц позволил выявить наличие суб- и супергармонических колебаний и резонансов (рис. 9а,б и 12а,б). При первом из этих резонансов наблюдаются наравне с основными и супергармонические колебания, причем вид фазовых траекторий (рис. 9д) и сечений Пуанкаре (рис. 9е) позволяет доказать устойчивость движения. Второй резонансный режим является субгармоническим, причем наблюдается наличие гармоник $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$ (рис. 12а,б). При этом на фазовых траекториях изображения (рис. 9д) отличны от структур фазовых диаграмм вблизи особых точек при устойчивом равновесии [10 с. 24] и носят характер, близкий к хаотическому. Однако анализ стробоскопического сечения Пуанкаре (рис. 12е) позволяет определить устойчивость движения, несмотря на отсутствие стробоскопических точек, так как вид траекторий соответствует устойчивым резонансным орбитам [11 с. 234]. При этом движение является квазипериодическим, так как оно допускает представление в виде комбинации колебательных составляющих с разными, в данном случае кратными, частотами [11 с. 237].

Анализ осевых колебаний на всех резонансных частотах указывает на наличие суб- и супергармоник (рис. 8в,г-13в,г). Для более подробной визуализации виброграммы осевых колебаний на рис. 8в-12в с целью оценки характера движения не отмасштабирована зазором осевого АМП 3. При этом полуразмахи колебаний значительно меньше величины зазора осевого АМП 3, а движения являются устойчивыми, так как на фазовых траекториях (рис. 8ж-11ж) наблюдаются особые точки типа «центр», а на стробоскопических отображениях (рис. 8з-11з) наблюдается точка, «медленно» перемещающаяся по направлению к точке, отвечающей устойчивому периодическому процессу [10 с. 101]. На частоте 48,5 Гц происходят резонансные осевые суб- и супергармонические колебания, устойчивость которых подтверждает рассмотрение фазовой траектории (рис. 12ж) и стробоскопического отображения (рис. 12з). Этот факт позволяет проведением расчетных экспериментов подтвердить корреляцию суб- и суперрезонансов осевых с резонансами радиальных колебаний, что также наблюдалось при анализе АЧХ при нанесении на характеристики осевых колебаний скелетных кривых радиальных колебаниях (рис. 5в,г) и обнаружено при проведении экспериментов [8].

В закритической области при частоте возбуждения (вращения), равной 50 Гц, ротор остается жестким, но наблюдается проявление эффекта самоцентрирования [8]. При этом амплитуды радиальных и осевых гармонических колебаний, происходящих только с основной частотой, значительно снижаются, центры радиальных опорных участков (цапф) совершают практически идеально круговые движения, а движение самого ротора соответствует прямой синхронной конической прецессии (рис. 7).

Заключение. В работе предложена аналитическая модель, которая учитывает нелинейную взаимосвязь механических и электромагнитных процессов в системе «ротор в магнитных подшипниках». Ее адекватность и применимость для изучения нелинейной динамики жестких роторов в МП различных типов подтверждена экспериментально. При проведении численных экспериментов с использованием этой модели для лабораторной установки, реализующей комбинированный магнитный подвес ротора установлено, что при действии на ротор кругового возбуждения, вызванного собственной неуравновешенностью, вектор силы которого действует в радиальном направлении, кроме гармонических колебаний с частотой возбуждения одновременно происхо-

дят супер- и субгармонические колебания не только в радиальных направлениях, но и в осевом, а также возникают и другие нелинейные явления роторной динамики, такие как супер- и субрезонансные колебания, при которых ротор совершает движения типа прямой и обратной цилиндрической или конической нерегулярных прецессий.

Список литературы:

1. Иноземцев А.А. Основы конструирования авиационных двигателей и энергетических установок / А.А. Иноземцев, М.А. Нихамкин, В.Л. Сандратский. -М.: Машиностроение, 2008. – Т. 4. –204 с. 2. Кельзон А.С. Динамика роторов в упругих опорах / А.С. Кельзон, Ю.П. Циманский, В.И. Яковлев. -М.: Наука, 1982.–280 с. 3. *Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery* / [G. Schweitzer, E.H. Maslen, H. Bleuler, and other]; Editors G. Schweitzer and E.H. Maslen. –Berlin: Springer, 2009. –535 p. 4. Журавлев Ю.Н. Активные магнитные подшипники: Теория, расчет, применение / Ю.Н. Журавлев. –СПб: Политехника, 2003. –206 с. 5. Мартыненко Г.Ю. Общій підхід к моделюванню нелинейной динамики жестких роторов в магнитных подшипниках различных типов / Г.Ю. Мартыненко // Доповіди НАН України. –2012. –№3. –С. 78-84. 6. Мартыненко Г.Ю. Определение зависимостей радиальных и осевых сил от смещений роторного магнита в радиальном магнитном подшипнике на двух кольцевых постоянных магнитах/ Г.Ю. Мартыненко // Проблемы машиностроения. –2010. – Т.13, №1. –С. 52-64. 7. Ульянов Ю.М. Система управління осьовим рухом ротора на комбінованому магнітному підвісі з пасивними радіальними і активним осьовим підшипниками / Ю.М. Ульянов, Г.Ю. Мартыненко, М.М. Смирнов // Зб. наук. пр. УкрДАЗТ. -2008. -Вип. 97. – С. 107-118. 8. Мартыненко Г.Ю. Результаты экспериментальных исследований и анализ динамики модельного ротора в магнитных подшипниках разных типов/ Г.Ю. Мартыненко // Вісник НТУ «ХПИ»: зб. наук. праць. –Х.: НТУ «ХПИ», 2013. –№63. –С. 90-101. 9. Мартыненко Г.Ю. Математическое описание динамического поведения ротора в магнитных подшипниках в зависимости от принятых упрощений. Часть 1. Жесткий ротор/ Г.Ю. Мартыненко // Вісник НТУ «ХПИ»: зб. наук. праць. –Х.: НТУ «ХПИ», 2009. –№30. –С. 95-119. 10. Вибрации в технике: [справ.]. В 6-ти т. –Т. 2: Колебания нелинейных механических систем / Под ред. И.И. Блехмана. –М.: Машиностроение, 1979. –351 с. 11. Кузнецов А.П. Нелинейные колебания: [Учеб. пособие для ВУЗов] / А.П. Кузнецов, С.П. Кузнецов, Н.М. Рыскин. –М.: Изд-во физ.-мат. лит., 2002. –292 с.

Bibliography (transliterated): 1. Inozemtsev A.A. Osnovyi konstruirovaniya aviatsionnyih dvigateley i energeticheskikh ustanovok / A.A. Inozemtsev, M.A. Nihamkin, V.L. Sandratskiy. M.: Mashinostroenie, 2008. –T. 4. –204 s. 2. Kelzon A.S. Dinamika rotorov v uprugih oporah / A.S. Kelzon, Yu.P. Tsimanskiy, V.I. Yakovlev. M.: Nauka, 1982.–280 s. 3. *Magnetic Bearings. Theory, Design, and Application to Rotating Machinery* / [G. Schweitzer, E.H. Maslen, H. Bleuler, and other]; Editors G. Schweitzer and E.H. Maslen. –Berlin: Springer, 2009. –535 p. 4. Zhuravlev Yu.N. Aktivnyie magnitnyie podshipniki: Teoriya, raschet, primenenie / Yu.N. Zhuravlev. –SPb: Politehnika, 2003. –206 s. 5. Martynenko G.Yu. Obschiy podhod k modelirovaniyu nelineynoy dinamiki zhestkih rotorov v magnitnyih podshipnikah razlichnyih tipov / G.Yu. Martynenko // DopovIdI NAN UkraYini. –2012. –#3. –S. 78-84. 6. Martynenko G.Yu. Opredelenie zavisimostey radialnyih i osevyih sil ot smescheniy rotor-nogo magnita v radialnom magnitnom podshipnike na dvuh koltsevyih postoyannyih magnitah/ G.Yu. Martynenko // Problemyi mashinostroeniya. –2010. –T.13, #1. –S. 52-64. 7. Ulyanov Yu.M. Sistema upravlnnya osovim ruhom rotora na kombInovano-nomu magnItnomu pIdvIsI z pasivnimi radIalnymi I aktivnim osovim pIdshipnikami / Yu.M. Ulyanov, G.Yu. Martinenko, M.M. Smirnov // Zb. nauk. pr. UkrDAZT. 2008. Vip. 97. –S. 107-118. 8. Martynenko G.Yu. Rezultatyi eksperimentalnyih issledo-

vaniy i analiz dinamiki modelnogo rotora v magnitnyih podshipnikah raznyih tipov/ G.Yu. Martyinenko // *VIsnik NTU «HPI»: zb. nauk. prats.* –H.: NTU «HPI», 2013. –#63. –S. 90-101. 9. Martyinenko G.Yu. *Matematicheskoe opisanie dinamicheskogo povedeniya rotora v magnitnyih podshipnikah v za-visimosti ot prinyatyih uproscheniy. Chast 1. Zhestkiy rotor/ G.Yu. Martyinenko // VIsnik NTU «HPI»: zb. nauk. prats.* –H.: NTU «HPI», 2009. –#30. –S. 95-119. 10. *Vibratsii v tehnikе: [sprav.]. V 6-ti t. –T. 2: Kolebaniya nelineynyih mehanicheskikh sistem / Pod red. I.I. Blehmana.* –M.: Mashinostroenie, 1979. –351 s. 11. *Kuznetsov A.P. Nelineynnye kolebaniya: [Ucheb. posobie dlya VUZov] / A.P. Kuznetsov, S.P. Kuznetsov, N.M. Ryiskin.* –M.: Izd-vo fiz.-mat. lit., 2002. –292 s.

Мартиненко Г.Ю.

НЕЛІНІЙНІ ЯВИЩА РОТОРНОЇ ДИНАМІКИ В СИСТЕМАХ З МАГНІТНИМИ ПІДШИПНИКАМИ

Описана методика оцінки динамічної поведінки жорстких роторів у пасивних і активних магнітних підшипниках. Її особливістю є застосування нової аналітичної моделі, яка враховує нелінійний взаємозв'язок механічних і електромагнітних процесів в системі. Проведено чисельні дослідження для одного з можливих варіантів магнітного підвісу роторів турбодетандерів. Достовірність математичної моделі підтверджена експериментальними даними. Виконано аналіз лінійних і нелінійних явищ роторної динаміки, виявлених у розглянутій лабораторній моделі з магнітними підшипниками.

Мартыненко Г.Ю.

НЕЛИНЕЙНЫЕ ЯВЛЕНИЯ РОТОРНОЙ ДИНАМИКИ В СИСТЕМАХ С МАГНИТНЫМИ ПОДШИПНИКАМИ

Описана методика оценки динамического поведения жестких роторов в пассивных и активных магнитных подшипниках. Ее особенностью является применение новой аналитической модели, которая учитывает нелинейную взаимосвязь механических и электромагнитных процессов в системе. Проведены численные исследования для одного из возможных вариантов магнитного подвеса роторов турбодетандеров. Достоверность математической модели подтверждена экспериментальными данными. Выполнен анализ линейных и нелинейных явлений роторной динамики, обнаруженных в рассмотренной лабораторной модели с магнитными подшипниками.

Martynenko G.Yu.

NONLINEAR PHENOMENA OF ROTORDYNAMICS IN SYSTEMS WITH MAGNETIC BEARINGS

The methodology for estimation of dynamic behavior of rigid rotors in passive and active magnetic bearings is described. Its feature is the use of new analytical model that takes into account the nonlinear relationship between mechanical, electric and magnetic processes in the system. The numerical researches for one possible variant of turbo-expanders magnetic suspension of rotor are carried out. The reliability of the model is confirmed by experimental data. Analysis of linear and nonlinear rotordynamics phenomena observed in the laboratory model with magnetic bearings is described.