УПРАВЛІННЯ В ТЕХНІЧНИХ СИСТЕМАХ

УДК 681.31

Александрова Т.Е., д-р техн. наук; Истомин А.Е., канд. техн. наук

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НАВЕДЕНИЯ И СТАБИЛИЗАЦИИ ТАНКОВОЙ ПУШКИ

Постановка задачи

Огневое могущество современного танка определяется четырьмя основными показателями:

- калибром основного вооружения – танковой пушки, способной вести прицельный огонь с ходу бронебойными, кумулятивными и осколочно-фугасными снарядами, а также управляемыми ракетами, самонаводящимися по лазерному лучу танкового прицела-дальномера;
- скорострельностью танковой пушки, определяемой характеристиками автоматического механизма заряжания и временем наведения на цель;
- точностью стабилизации оси канала ствола танковой пушки относительно линии прицеливания;
- характеристиками танкового баллистического вычислителя, определяющего требуемые углы рассогласования линии прицеливания относительно направления на цель.

Калибр танковой пушки отечественных танков «Булат», «Береза» и «Оплот», а также российских танков составляет 125 мм, в то время как калибр танковых пушек стран НАТО – 120 мм. Скорострельность танковых пушек отечественных и российских танков, оснащенных автоматическим механизмом заряжения, составляет 8 выстрелов в минуту, что является хорошим показателем для пушек калибра 125 мм и превышает скорострельность большинства танков стран НАТО за исключением французского танка «Леклерк». Отечественные танковые баллистические вычислители по своим характеристикам не уступают аналогичным зарубежным образцам. И только лишь системы наведения и стабилизации отечественных танков, использующие устаревшую элементную базу и примитивные алгоритмы управления, уступают по своим характеристикам современным зарубежным образцам и снижают общий показатель огневого могущества украинских танков.

Целью настоящей статьи является разработка методики выбора значений варьируемых параметров системы наведения и стабилизации танковой пушки, доставляющих замкнутой системе максимальные значения показателей запаса устойчивости, быстродействия и точности стабилизации.

Основная часть

Необходимым условием функционирования любой системы автоматического управления является устойчивость ее возмущенного движения. Однако это условие является далеко не достаточным. Для нормального функционирования система автоматического управления должна удовлетворять целому ряду критериев качества, основными из которых являются запас устойчивости, быстродействие и точность отработки возмущений, действующих на систему.

Под запасом устойчивости системы автоматического управления в общем случае понимают удаленность рабочей точки системы от границы области устойчивости. В частном случае линейной системы количественным показателем запаса устойчивости может служить расстояние в плоскости корней характеристического уравнения системы от мнимой оси плоскости корней до ближайшего к этой оси действительного корня или ближайшей пары комплексно-сопряженных корней характеристического уравнения.

Быстродействие системы автоматического управления оценивается временем затухания переходного процесса.

Запас устойчивости и быстродействие системы являются взаимозависимыми величинами. Так, если ближайший к мнимой оси корень характеристического уравнения равен

$$s_{\mathrm{k}} = -\alpha ,$$

то быстродействие системы оценивается следующей формулой [1]

$$t = \frac{3}{|\alpha|} .$$

Точность отработки внешних возмущений, действующих на систему автоматического управления, принято оценивать значением интегрального квадратичного функционала

$$I = \int_0^{\tau} \varphi^2(t) dt , \qquad (1)$$

где $\varphi(t)$ – обобщенная координата, определяющая рассогласование между собственной осью стабилизируемого объекта и линией прицеливания.

Рассмотрим возмущенное движение танковой пушки в канале вертикального наведения [2], описываемое системой линейных дифференциальных уравнений

$$\ddot{\varphi}(t) = -\frac{k_{\mathrm{м}} k_{\mathrm{д}}}{I_{\mathrm{п}}} \beta(t); \qquad (2)$$

$$\ddot{\beta}(t) = -\frac{1}{T_1^2}\beta(t) - \frac{T_2}{T_1^2}\dot{\beta}(t) + \frac{k_{\mathrm{e}} k_{\mathrm{y}}}{cT_1^2} k_{\varphi}\varphi(t) + \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} \dot{\varphi}(t), \qquad (3)$$

где $\varphi(t)$ – угол поворота оси канала ствола танковой пушки относительно линии прицеливания; $\beta(t)$ – угол поворота якоря электрогидравлического усилителя относительно нейтрального положения; I_n – момент инерции пушки относительно оси цапф; T_1, T_2 – постоянные времени электрогидравлического усилителя; $k_м$, $k_д$, k_e, k_y, k_c – коэффициенты пропорциональности; c – коэффициент жесткости фиксирующей пружины якоря электромагнита; $k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}$ – варьируемые параметры стабилизатора, подлежащие выбору.

Производя замену переменных $x_1(t) = \varphi(t)$; $x_2(t) = \dot{\varphi}(t)$; $x_3(t) = \beta(t)$;

$x_4(t) = \dot{\beta}(t)$, систему (2), (3) и функционал (1) запишем в нормальной форме:

$$
\begin{aligned}
&\dot{x}_1(t) = x_2(t);\\
&\dot{x}_2(t) = -\frac{k_м k_д}{I_n} x_3(t);\\
&\dot{x}_3(t) = x_4(t);\\
&\dot{x}_4(t) = \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_\varphi x_1(t) + \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} x_2(t) -\\
&-\frac{1}{T_1^2} x_3(t) - \frac{T_2}{T_1^2} x_4(t);
\end{aligned}
\tag{4}
$$

$$
I(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) = \int_0^\tau x_1^2(t)dt. \tag{5}
$$

Собственная матрица системы (4) равна

$$
A = \begin{bmatrix}
0 & 1 & 0 & 0\\
0 & 0 & -\frac{k_м k_д}{I_n} & 0\\
0 & 0 & 0 & 1\\
\frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_\varphi & \frac{k_e k_y}{cT_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} & -\frac{1}{T_1^2} & -\frac{T_2}{T_1^2}
\end{bmatrix}, \tag{6}
$$

а матрица квадратичной формы подынтегральной функции функционала (5) записывается

$$
Q = \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}. \tag{7}
$$

Рассмотрим характеристическое уравнение системы (4)

$$
\det\left\lfloor A(k_\varphi, k_{\dot{\varphi}}) - Es \right\rfloor = 0,
$$

или

$$
\begin{aligned}
&s^4 + \frac{T_2}{T_1^2} s^3 + \frac{1}{T_1^2} s^2 + \frac{k_м k_д k_e k_y}{cI_n T_1^2} k_c k_{\dot{\varphi}} s +\\
&+\frac{k_м k_д k_e k_y}{cI_n T_1^2} k_\varphi = 0.
\end{aligned}
\tag{8}
$$

Пусть значения параметров танковой пушки с электрогидравлическим исполнительным органом составляют: $I_n = 736{,}9 H \cdot м \cdot c^2$; $T_1 = 10^{-2}$ с; $T_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-3}$ с; $c = 100$ Н · м; $k_c = 0{,}2$ с^2; $k_м = 0{,}6 \cdot 10^{-3}$ Н · м · Па$^{-1}$; $k_д = 1{,}228 \cdot 10^7$ Па; $k_e = 10^3$ Н · м · А$^{-1}$; $k_y = 10^{-2}$ Ом$^{-1}$.

Тогда характеристическое уравнение (8) записывается в виде

$$s^4 + 5s^3 + 10^4 s^2 + 0{,}2 \cdot 10^4 k_{\dot{\varphi}} s + 10^4 k_{\varphi} = 0. \tag{9}$$

В плоскости варьируемых параметров стабилизатора $k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}$ построим линии равной степени устойчивости [3], для чего в уравнении (9) произведем замену $s = \beta + j\omega$, выделим в полученном уравнении действительную и мнимую части, приравняем их нулю и полученные уравнения разрешим относительно варьируемых коэффициентов k_{φ} и $k_{\dot{\varphi}}$:

$$\begin{aligned} k_{\varphi} &= 3 \cdot 10^{-4} \beta^4 + 2 \cdot 10^{-4} \beta^2 \omega^2 - 10^{-4} \omega^4 + \\ &+ 10^{-3} \beta^3 - 10^{-3} \beta \omega^2 + \omega^2 + \beta^2; \\ k_{\dot{\varphi}} &= -2 \cdot 10^{-3} \beta^3 + 2 \cdot 10^{-3} \beta \omega^2 - 7{,}5 \cdot 10^{-3} \beta^2 + \\ &+ 2{,}5 \cdot 10^{-3} \omega^2 - 10\beta. \end{aligned} \tag{10}$$

В плоскости варьируемых параметров стабилизатора $(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})$ с помощью соотношений (10) построим кривые при изменении ω от нуля до бесконечности для различных отрицательных значений β. При $\beta = 0$ построенная кривая представляет собой область устойчивости замкнутой системы стабилизации, а при β_k<0, $(k = \overline{1,l})$ – линию равной степени устойчивости. При нахождении точки $(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})$ на этой кривой запас устойчивости системы составляет $\beta = \beta_k$ (рис.1).

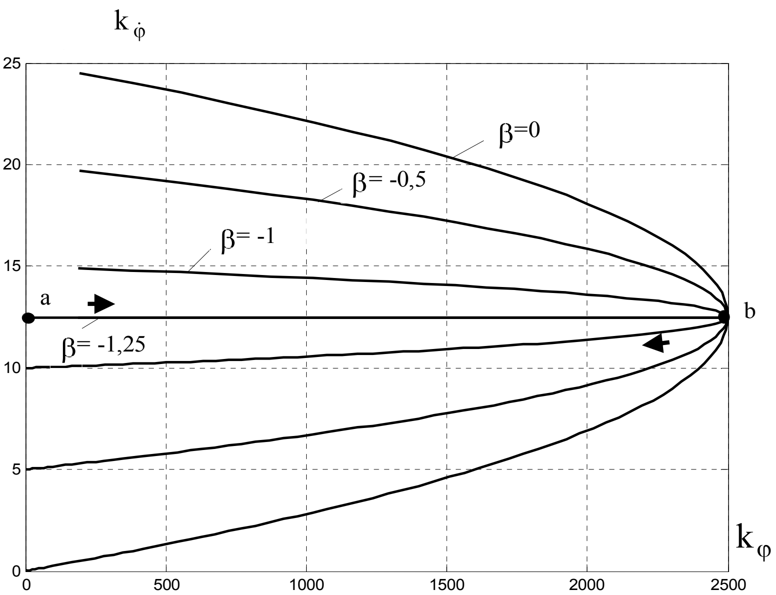

Рис. 1. Кривые равной степени устойчивости системы (4).

При $\beta_l = -1{,}25$ кривые равной степени устойчивости стягиваются в отрезок прямой, параллельный оси абсцисс, ограниченный точками $a = 1{,}5613$ и $b = 2496{,}87$. Если значения варьируемых параметров k_φ и $k_{\dot\varphi}$ выбраны на отрезке (a,b), то замкнутая система стабилизации (4) имеет постоянный максимальный запас устойчивости $\beta^* = \beta_l = -1{,}25$. Всюду на отрезке (a,b) значение параметров $k_{\dot\varphi}$ постоянно и равно $12{,}5\ \text{В} \cdot \text{с}$.

Выберем из корней характеристического уравнения (9) корень с максимальной действительной частью

$$\max_j \operatorname{Re} s_j = \beta^*, \ \left(j = \overline{1,n}\right)$$

Тогда норма вектора состояния системы (4) удовлетворяет оценке [4,5]

$$\left\| \mathrm{X}(t) \right\| = \left\| \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2(t)} \right\| \le \left\| \mathrm{X}(0) \right\| e^{t \cdot \beta^*}. \tag{11}$$

Анализ соотношения (11) позволяет сделать вывод, что максимальный запас устойчивости замкнутой линейной системы обеспечивает и ее максимальное быстродействие.

Для отыскания оптимального значения варьируемого параметра k_φ потребуем, чтобы на решениях системы (4) достигал минимума интегральный квадратичный функционал (5). В работе [6] показано, что значение функционала (5) составляет

$$I\left[\mathrm{X}(0), k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right] = \left\langle \mathrm{X}(0), K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)\mathrm{X}(0)\right\rangle, \tag{12}$$

где квадратная симметрическая матрица $K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)$ является решением линейного матричного алгебраического уравнения

$$K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)A\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right) + A^T\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right) + Q = 0, \tag{13}$$

при достаточном большом значении верхнего предела τ интеграла (5).

Без ограничения общности предположим, что обобщенная координата $\varphi(t) = x_1(t)$ является главной координатой системы стабилизации, которая в наибольшей степени характеризует поведение стабилизируемого объекта в его возмущенном движении [2]. Обычно при исследовании процессов стабилизации задают следующие начальные условия системы (4): $x_1(0) = x_{10}$; $x_2(0) = x_3(0) = \ldots = x_n(0) = 0$, т.е. ненулевое начальное условие имеет место только лишь по главной координате. Тогда квадратичная форма (12) принимает следующий вид

$$I\left(x_{10}, k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right) = k_{11}\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)x_{10}^2. \tag{14}$$

В связи с тем, что оптимальное значение векторного аргумента, доставляющего минимум некоторой функции, не зависит от постоянного множителя в соотношении, описывающем функцию, то соотношение (14) может быть представлено в виде

$$I\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right) = k_{11}\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right), \tag{15}$$

где $k_{11}\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)$ - первый главный диагональный элемент матрицы $K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)$, а задача оптимизации квадратичной формы с неопределенными компонентами вектора $\mathrm{X}(0)$ заменяется задачей поиска минимума функции (15).

Квадратную симметрическую матрицу $K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right)$ будем отыскивать в виде

$$K\left(k_\varphi, k_{\dot\varphi}\right) = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} & k_{14} \\ k_{12} & k_{22} & k_{23} & k_{24} \\ k_{13} & k_{23} & k_{33} & k_{34} \\ k_{14} & k_{24} & k_{34} & k_{44} \end{bmatrix}. \tag{16}$$

Представим матрицы (6), (7) и (16) в матричное уравнение (13), которое эквивалентно системе линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных элементов матрицы (16):

$$\begin{gathered} 2\cdot 10^3 k_\varphi k_{14} + 1 = 0; \\ k_{11} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot\varphi} k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{24} = 0; \\ -10k_{12} - 10^4 k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{34} = 0; \\ k_{13} - 5k_{14} + 10^3 k_\varphi k_{44} = 0; \\ k_{12} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot\varphi} k_{24} = 0; \\ -10k_{22} - 10^4 k_{24} + k_{13} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot\varphi} k_{34} = 0; \\ k_{23} - 5k_{24} + k_{14} + 0{,}2\cdot 10^3 k_{\dot\varphi} k_{44} = 0; \\ -10k_{23} - 10^4 k_{34} = 0; \\ k_{33} - 5k_{34} - 10k_{24} - 10^4 k_{44} = 0; \\ k_{34} - 5k_{44} = 0. \end{gathered} \tag{17}$$

Из системы (17) имеем

$$k_{11} = 0{,}1\frac{k_{\dot\varphi}}{k_\varphi} + \frac{0{,}25k_\varphi + 0{,}1\cdot 10^3 k_{\dot\varphi} - 2{,}5\cdot 10^3}{2{,}5k_\varphi + 40k_{\dot\varphi}^2 - 10^3 k_{\dot\varphi}}. \tag{18}$$

При $k_\varphi = 0$ функция (18) обращается в бесконечность за счет первого слагаемого. Второе слагаемое устремляется в бесконечность при обращении в нуль его знаменателя, т.е. при выполнении условия

$$2{,}5k_{\varphi} + 40k_{\dot{\varphi}}^{2} - 10^{3}k_{\dot{\varphi}} = 0 \qquad (19)$$

Решение квадратного уравнения (19) записывается в виде

$$k_{\dot{\varphi}} = 12{,}5 \pm \sqrt{12{,}5^{2} - 0{,}0625k_{\varphi}}\,. \qquad (20)$$

Легко заметить, что функция (20) описывает часть границы области устойчивости при $k_{\varphi} > 0$.

Таким образом, всюду на границе области устойчивости, приведенной на рис.1, функция (18) устремляется к бесконечности.

В работе [2] показано, что квадратичная форма (12), матрица которой удовлетворяет уравнению (13), имеет внутри области устойчивости системы (4) единственный минимум, являющийся глобальным. Тогда вполне естественным является утверждение, что функция (18) имеет вогнутую чашеобразную форму с единственной экстремальной точкой, расположенной внутри области устойчивости, и краями, уходящими в бесконечность на границе области устойчивости.

Используя программный продукт Optimization Toolbox в среде MATLAB, построим функцию (18) и отыщем значения варьируемых параметров k_{φ} и $k_{\dot{\varphi}}$, доставляющих минимум функции (18). На рисунке 2 представлен вид поверхности функции (18).

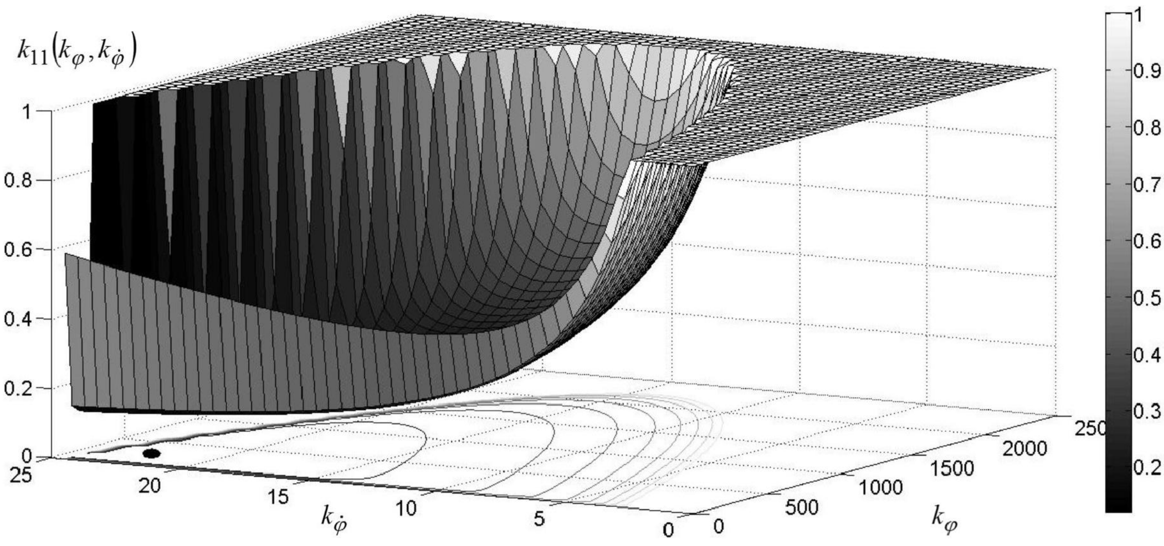

Рис. 2. К отысканию точки минимума функции (18)

Оптимальные значения варьируемых параметров k_{φ} и $k_{\dot{\varphi}}$, доставляющие минимум функции (18), составляют $k_{\varphi}^{*} = 196{,}2$ В; $k_{\dot{\varphi}}^{*} = 23{,}1$ В $\cdot$ с. При этих значениях варьируемых параметров значение функции (18) составляет $k_{11}(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}}) = 0{,}1218$.

Значения варьируемых параметров k_{φ}^{*} и $k_{\dot{\varphi}}^{*}$, доставляющих минимум функционалу (5) на решениях системы (4), обеспечивают максимальную точность стабилизации оси канала ствола танковой пушки относительно линии прицеливания. Вместе с тем, эти значения не обеспечивают необходимого запаса устойчивости и быстродействия замкнутой системы, так как точка $(k_{\varphi}^{*}, k_{\dot{\varphi}}^{*})$ находится вблизи границы области устойчивости и значительно удалена от отрезка (a, b), где запас устойчивости и быстродействия замкнутой системы максимальны.

Поставим задачу параметрического синтеза оптимального по точности стабилизатора танковой пушки при максимальных запасе устойчивости и быстродействии замкнутой системы стабилизации. Для этого положим $k_{\dot{\varphi}}^{*} = 12{,}5\ \text{В} \cdot \text{с}$ и подставим это значение в соотношение (18). В результате получаем функцию (18) при условии нахождения рабочей точки на отрезке (a, b) области устойчивости

$$k_{11}(k_{\varphi}) = \frac{1{,}25}{k_{\varphi}} + \frac{0{,}25k_{\varphi} - 1{,}25 \cdot 10^{3}}{2{,}5k_{\varphi} - 6{,}25 \cdot 10^{3}} \tag{21}$$

Для отыскания минимума функции (21) продифференцируем ее по k_{φ} и результат дифференцирования приравняем нулю. В результате получаем $k_{\varphi}^{*} = 165{,}085\ \text{В}$.

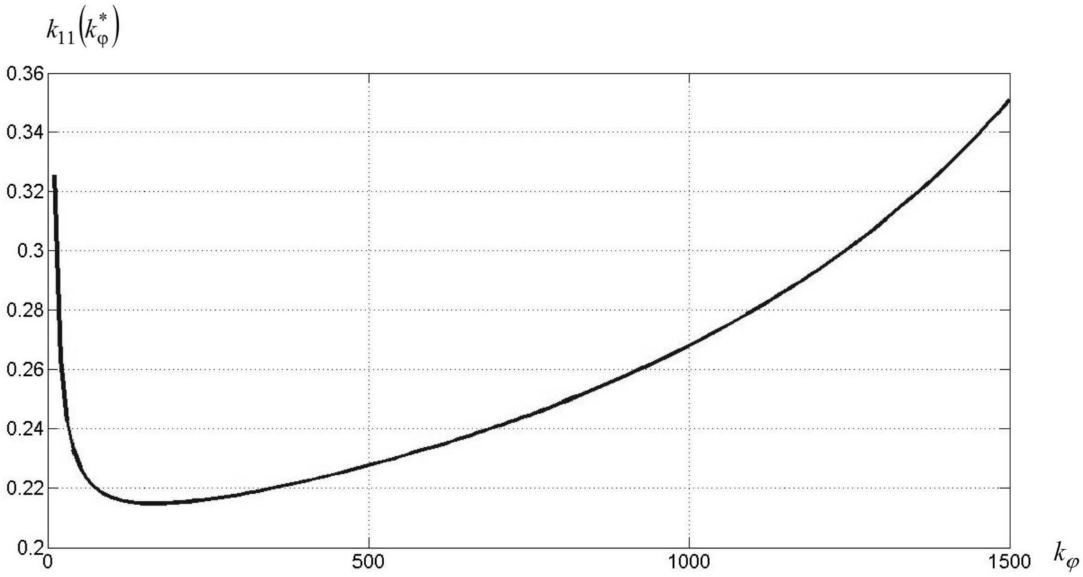

Рис. 3. Зависимость функции (21) от варьируемого параметра k_{φ}

Зависимость функции (21) от параметра k_{φ} приведена на рисунке 3. Значение функции (21) в точке минимума составляет $k_{11}(k_{\varphi}^{*}) = 0{,}21464$.

Сравнение значений функции $k_{11}(k_{\varphi}, k_{\dot{\varphi}})$ в точках $k_{\varphi}^{*} = 196{,}2\ \text{В}$;

$k_{\dot{\varphi}}^{*} = 23{,}1\ \text{В} \cdot \text{с}$ и $k_{\varphi}^{*} = 165{,}085\ \text{В}$; $k_{\dot{\varphi}}^{*} = 12{,}5\ \text{В} \cdot \text{с}$ показывает, что в первом случае точность стабилизации приблизительно на 40% выше, чем во втором, однако запас устойчивости и быстродействие значительно ниже, что в конечном итоге приводит к выводу о предпочтительности второго варианта.

Заключение

С использованием понятия главной координаты стабилизируемого процесса разработана методика решения задачи параметрического синтеза оптимального по точности стабилизатора танковой пушки, обеспечивающего максимальные показатели запаса устойчивости и быстродействия замкнутой системы стабилизации.

Список литературы 1. *Бессекерский В.А. Теория систем автоматического управления / В.А. Бессекерский, Е.П. Попов. – Санкт-Петербург: Профессия, 2003. – 752 с.* ***2.*** *Александрова Т.Е. О единственности решения задачи параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности / Т.Е. Александрова // Системи обробки інформації. – 2013. – Вып. 7(114). – С. 116-120.* ***3.*** *Орурк И.А. Новые методы синтеза линейных и некоторых нелинейных динамических систем / И.А. Орурк. – М. – Л.: Наука, 1965. – 207 с.* ***4.*** *Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. – М.: Наука, 1967. – 472 с.* ***5.*** *Зубов В.И. Лекции по теории управления / В.И. Зубов. – М.: Наука, 1975. – 496 с.* ***6.*** *Александров Е.Е. Автоматизтрованное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е.Е. Александров, М.В. Бех. – Харьков: Основа, 1993. – 113 с.*

Bibliography (transliterated): 1. *Bessekerskij V.A. Teoriya sistem avtomaticheskogo upravleniya / V.A. Bessekerskij, E.P. Popov. – Sankt-Peterburg: Professiya, 2003. – 752 s.* ***2.*** *Aleksandro-va T.E. O edinstvennosti resheniya zadachi parametricheskogo sinteza linejnoj dinamicheskoj sistemy s integral'nym kvadratichnym kriteriem optimal'nosti / T.E. Aleksandrova // Sistemi obrobki informacії. – 2013. – Vyp. 7(114). – S. 116-120.* ***3.*** *Orurk I.A. Novye metody sinteza linejnyh i nekotoryh nelinejnyh dinamicheskih sistem / I.A. Orurk. – M. – L.: Nau-ka, 1965. – 207 s.* ***4.*** *Demidovich B.P. Lekcii po matematicheskoj teorii ustojchivosti / B.P. Demidovich. – M.: Nauka, 1967. – 472 s.* ***5.*** *Zubov V.I. Lekcii po teorii upravleniya / V.I. Zubov. – M.: Nauka, 1975. – 496 s.* ***6.*** *Aleksandrov E.E. Avtomatiztrovannoe proektirovanie dinami-cheskih sistem s pomoshch'yu funkcij Lyapunova / E.E. Aleksandrov, M.V. Bekh. – Har'kov: Osnova, 1993. – 113 s.*

Александрова Т.Є., Істомін О.Є.

ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ОПТИМАЛЬНОЇ СИСТЕМИ НАВЕДЕННЯ І СТАБІЛІЗАЦІЇ ТАНКОВОЇ ГАРМАТИ

Розглядається задача параметричного синтезу стабілізатора танкової гармати , що забезпечує максимальні значення показників стійкості , швидкодії і точності замкнутої системи наведення і стабілізації.

Alexandrova T.Ye., Istomin A.E.

PARAMETRIC SYNTHESIS OF OPTIMAL SYSTEMS OF GUIDANCE AND STABILIZATION TANK GUN

This article provides the problem of parametric synthesis of the stabilizer tank gun, ensuring maximum values of sustainability indicators, speed and accuracy of a closed system of guidance and stabilization.