

# Теоретична механіка

УДК 539.3

Воропай А.В., канд. техн. наук; Григорьев А.Л., д-р техн. наук

## ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ДЛЯ УЧЕТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ

**Введение и постановка задачи. Анализ литературных источников.** К настоящему моменту в теории упругости получено значительное количество аналитических решений для задач нестационарного деформирования упругих элементов конструкций [1]. Существует несколько общепринятых аналитических методов решения указанных задач. Один из основных методов получения аналитического решения нестационарных задач – это использование интегрального преобразования Лапласа. Многие решения могут быть представлены в виде свёрточных интегралов с ядрами Коши, например в монографии [2] описано несколько решений для упругого деформирования различных элементов конструкции. Исследование диссипативных свойств вязкоупругих материалов, как правило, осуществляется с использованием дифференциальных операторов [3, 4].

В статье [5] показано, что для полученных аналитически упругих решений в виде свёрточных интегралов с ядрами Коши можно модификацией ядра моделировать наличие внутреннего вязкого трения Кельвина – Фойхта.

А именно, пусть решение уравнения колебаний упругого континуума

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathbf{L}_x [\mathbf{u}] + \vec{P}(\mathbf{x}, t) \quad (1)$$

представлено в виде:

$$u(t) = \int_0^t K_0(t-\tau) P_0(\tau) d\tau, \quad (2)$$

где  $\rho$  – плотность материала;  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = [u_x, u_y, u_z]$  – вектор перемещений в некоторой точке тела  $V$  с координатами  $\mathbf{x}$  (стержня, балки, пластины или оболочки) в момент времени  $t$ ;  $\mathbf{L}_x [\cdot]$  – дифференциальный оператор, составленный из частных производных по координатам и описывающий действие сил упругости;  $\vec{P}(\mathbf{x}, t)$  – векторная величина возмущающей нагрузки (внешней силы), сосредоточенной в известной точке  $\mathbf{x}_0$ ,

$$\vec{P}(\mathbf{x}, t) = P_0(t) \cdot \vec{n} \cdot \delta_0(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0),$$

$\vec{n}$  – орт направления действия силы;  $y = \delta_0(\mathbf{x})$  – дельта-функция Дирака;  $u(t)$  – перемещения объекта в некоторой точке  $\mathbf{x}_S$ , интересующей исследователя; функция  $y = P_0(t)$  – внешняя нестационарная нагрузка, приложенная в точке  $\mathbf{x}_0$  и вызывающая колебания; функция  $y = K(t)$  – разностное ядро интеграла Дюамеля, несущее информацию о деформируемом объекте.

Тогда учет диссипации сводится к корректировке соотношения (2), в котором используется другое интегральное ядро  $y = K_\eta(t)$ , форма которого сглажена трением:

$$u(t) = \int_0^t K_\eta(t-\tau) P_0(\tau) d\tau. \quad (3)$$

© А.В. Воропай, 2018

Укажем, что если нагрузка приложена не в одной точке, а в дискретном наборе или на континуальном множестве точек, то используется *принцип линейной суперпозиции*, и в правой части равенств (2) и (3) появляется сумма или еще один (внешний) интеграл.

Разностное ядро  $y = K_\eta(t)$  может быть получено тремя основными способами:

- 1) как реакция системы на удар, зарегистрированная в результате физического моделирования динамики объекта (то есть, в ходе специально поставленного и проведенного эксперимента);
- 2) как решение уравнений, описывающих аналогичный переходной процесс при учете трения;
- 3) путем соответствующей выглаживающей модификации ядра  $y = K_0(t)$ , полученного при математическом моделировании упругих деформаций без учета трения.

В продолжение работы [5], в этой статье также изучается третий путь и анализируются возможности применения процедуры модификации ядра не только к простейшему виду внутреннего трения – вязкому, описываемому моделью Кельвина – Фойхта, но и к магнито-гистерезисному трению (возникающему в упругих континуумах из стали, никеля и других ферромагнитных материалов), а также к механико-гистерезисному трению, возникающему на границах твердых зерен в расплавах и иных гетерогенных упругих средах. Мы не будем здесь углубляться в физические аспекты моделей, а, прежде всего, будем рассматривать возможность сглаживающей модификации ядра согласно *гипотезе гистерезисного трения Бока – Шлиппе – Колара*.

**Влияние вязкого трения на частоты и амплитуды колебаний.** Если в задаче не учитывается трение, то ядро интеграла (1), которое здесь и далее обозначено  $K_0(t)$ , может быть вычислено как сумма ряда [2, 6]

$$K_0(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) \cdot [\sin(\omega_j t) / \omega_j], \quad (4)$$

где  $\omega_j$ ,  $j=0,1,2,\dots$  – круговые частоты свободных колебаний континуума, перечисленные в порядке возрастания их величины;  $y = f(\omega)$  – амплитудные функции, возникающие при локализации собственных форм колебаний с частотой  $\omega$  в точке  $x_0$ .

Ядру - оригиналу  $y = K_0(t)$  отвечает его изображение по Лапласу

$$K_0(s) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) / [s^2 + \omega_j^2]. \quad (5)$$

Отметим, что все значения частот  $\omega_j$  в этой сумме являются положительными числами, причем, если специально не подбирать размеры, то для двух- или трехмерных континуумов они не являются кратными. Поэтому ядро  $y = K_0(t)$ , отвечающее прямоугольной пластине, на рис. 1 не имеет периода повторения, а снижение начальной амплитуды колебаний является следствием наложения гармоник с различными фазами. Укажем, что на рис. 1 показаны ядра для расчета поперечных колебаний прямоугольной пластины с размерами  $0.6 \times 0.4 \times 0.04$  м; декремент затухания  $d_0 = 0.07$ .

После учета внутреннего трения Кельвина – Фойхта, имеющего коэффициент трения  $\eta$ , в операторе сил упругости появляется слагаемое, пропорциональное скорости перемещения,

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = \mathbf{L}_x [\mathbf{u} + \eta \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t] + \bar{P}(\mathbf{x}, t), \quad (6)$$

а равенство (5) приобретает следующий вид:

$$K_{\eta}(s) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) / [s^2 + \eta \cdot \omega_j^2 \cdot s + \omega_j^2],$$

откуда получаем формулу для оригинала

$$K_{\eta}(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) \cdot \exp(-\alpha_j t) \cdot [\sin(\beta_j t) / \beta_j], \quad (7)$$

где вещественные числа  $\omega_j$  и функция  $f(\omega)$  – те же, что и выше, а комплексные частоты

$$\lambda_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j, \quad \alpha_j < 0, \quad \beta_j > 0, \quad i^2 = -1$$

находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \eta \omega_j^2 \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0.$$

При условии  $\omega_j < 2/\eta$  частоты  $\lambda_j$  размещаются в комплексной плоскости на окружности, показанной на рис. 2 а, а соответствующие гармоники описывают затухающие периодические колебания; демпфирующий множитель  $j$ -той гармоники имеет вид

$$z_j(t) = \exp(-0.5\eta\omega_j^2 t).$$

При значениях  $\omega_j > 2/\eta$  частоты  $\lambda_j$  перемещаются на отрицательную полуось, а колебания становятся аperiodическими.

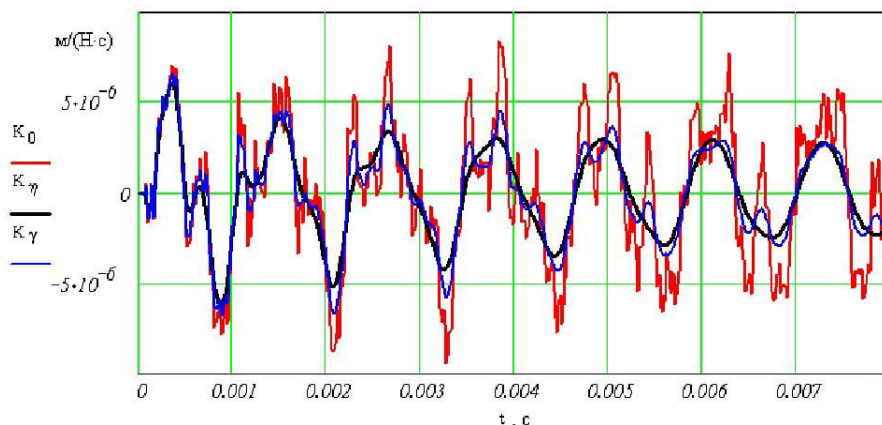


Рисунок 1 – Ядра интегралов (1)  $y = K_0(t)$  и (2) под действием вязкого  $y = K_{\eta}(t)$  и гистерезисного  $y = K_{\gamma}(t)$  трения

На рис. 2 левее штрихпунктирной прямой вязкое демпфирование оказывается настолько сильным, что на промежутке дискретизации  $\Delta t = 0.01T_0$  (здесь  $T_0$  – это период колебаний основной гармоники) амплитуда колебания уменьшается в 2 и более раз, и такие колебания далее можно не рассматривать. В результате для примера динамического деформирования пластины сумма (7) является конечной и содержит около 80 слагаемых.

График ядра  $y = K_{\eta}(t)$  также показан на рис. 1; как и следовало ожидать, после учета трения затухание (или, выражаясь точнее, сглаживание формы) ядра усилилось.

Для различных упругих материалов декремент  $d_0$  затухания основной гармони-

ки разный [3, 4], но, как правило, он не выходит за границы диапазона 0.01...0.1; на рис. 1 использовано декремент затухания 7%. Следовательно,

$$\eta / T_0 = 0.5 d_0 / \pi^2 \in [0.0005; 0.005].$$

В [5] мы воспользовались этим соотношением при аппроксимациях корректирующего ядра.

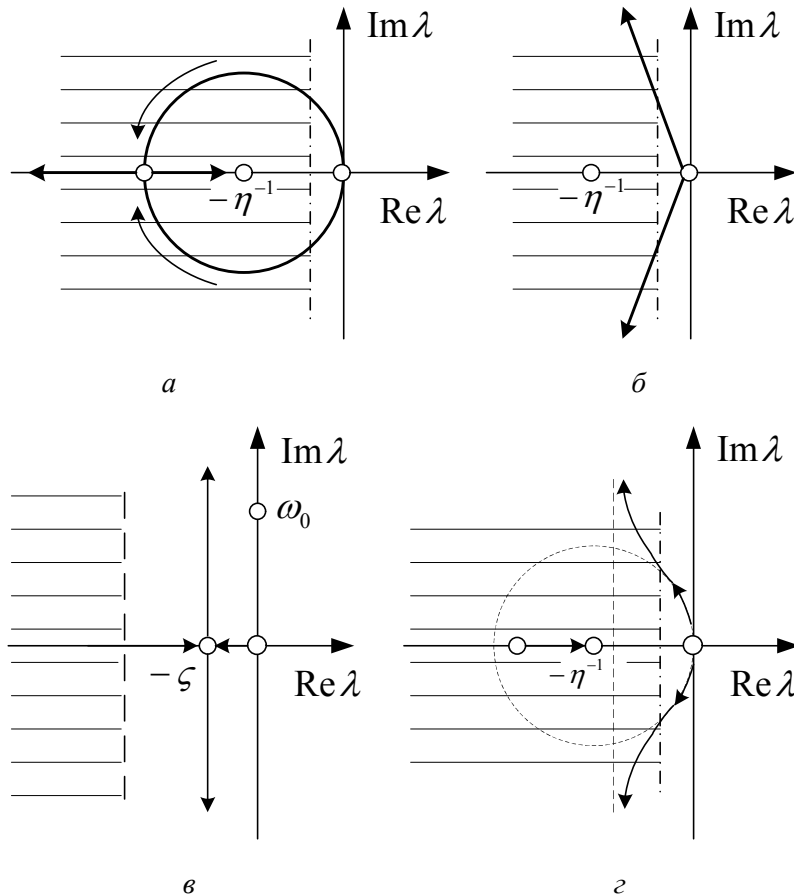


Рисунок 2 – Расположение комплексных частот колебаний при различных моделях:  
 а – Кельвина – Фойхта; б – Бока – Шлиппе – Колара;  
 в – внешнего вязкого трения; г – стандартного линейного тела

**Влияние гистерезисного трения на частоты и амплитуды колебаний.** В модели Бока – Шлиппе – Колара [4] оператор гистерезисного трения вместо производной по времени, как в равенстве (6), использует производную по фазовому углу для каждой формы собственных колебаний  $\mathbf{u}_j$ , и уравнение переходного процесса принимает вид:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 = L_x \left[ \mathbf{u} + \gamma \sum_{j=1,2,\dots} (\omega_0 / \omega_j) \partial \mathbf{u}_j / \partial t \right] + \vec{P}(t), \quad \mathbf{u} = \sum_{j=1,2,\dots} \mathbf{u}_j, \quad (8)$$

где  $\gamma$  – коэффициент диссипации при гистерезисном трении. Коэффициент  $\gamma$ , как и  $\eta$  имеет физическую размерность времени, с.

Отметим, что такое трение сохраняет формы собственных колебаний  $\mathbf{u}_j$ , отвечающие задаче упругой деформации (без диссипации), поэтому в рамках стандартного подхода анализ колебаний не составляет труда и сводится к задаче суммирования ряда для изображения ядра по Лапласу:

$$K_{\gamma}(s) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) / (s^2 + \gamma \cdot \omega_0 \omega_j \cdot s + \omega_j^2), \quad (9)$$

а затем для оригинала,

$$K_{\gamma}(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) \cdot \exp(-\alpha_j t) \cdot [\sin(\beta_j t) / \beta_j], \quad (10)$$

причем комплексные частоты  $\lambda_j = \alpha_j + i \cdot \beta_j$  (рис. 2 в) находятся из характеристического уравнения

$$\lambda_j^2 + \gamma \omega_0 \omega_j \lambda_j + \omega_j^2 = 0.$$

Результат расчета ядра  $y = K_{\gamma}(t)$  для прямоугольной пластины при гистерезисном трении с декрементом затухания  $d = 0.07$  (здесь он одинаковый для всех гармоник) показан на рис. 1; туда же помещен график ядра, полученный для вязкого трения при декременте  $d_0 = 0.07$ .

Сопоставление результатов имеет непосредственный физический смысл: в первом случае пластина изготовлена из углеродистой (а, значит, магнитной) стали, а во втором – из нержавеющей (не магнитной) стали. Упругие и инерционные характеристики этих материалов одинаковы, размеры и граничные условия для пластины – тоже одинаковые, а природа трения – разная. О факторах диссипации и их связи со свойствами упругого материала достаточно подробно сказано в [4], и добавлять новые сведения не будем, ограничимся ссылкой.

Анализируя рис. 1, видим, что графики заметно различаются. Гистерезисное трение по сравнению с вязким трением уменьшает сглаживание ядра.

**Сглаживающий оператор Кельвина – Фойхта и его свойства.** Для случая вязкого внутреннего трения в статье [5] с учетом известной *теоремы Эфроса об оригинале сложного изображения* [7] доказано, что ядра  $K_0(t)$  и  $K_{\eta}(t)$  связаны соотношением

$$K_{\eta}(t) = \int_0^{\infty} \Psi_{\eta}(t, \tau) K_0(\tau) d\tau, \quad (11)$$

где

$$\Psi_{\eta}(s, \tau) = \frac{1}{1 + \eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1 + \eta s}}\right), \quad (12)$$

здесь неотрицательное число  $\tau$  играет роль параметра.

Как видим, учет трения сводится к корректировке разностного ядра Коши в интеграле (1), и

***операция корректирования ядра одинакова для всех упругих систем и для всех точек системы.***

Функцию  $y = \Psi(t, \tau)$  будем называть *корректирующим ядром*. Если принять значение  $\eta = 0$ , то получим

$$\Psi_0(s, \tau) = \exp(-\tau s), \text{ что соответствует оригиналу } \Psi_0(t, \tau) = \delta(t - \tau).$$

Но если коэффициент трения  $\eta > 0$ , то оригинал для изображения (4), к сожалению, отсутствует в справочниках по операционному исчислению, и эта задача потребовала разработки специального метода нахождения корректирующего ядра.

Значения функции  $\Psi_\eta(t, \tau)$  оказались положительными, а характерный вид графиков, отвечающих сечениям этой функции при постоянных значениях времени  $t$ , показан на рис. 3.

Выясним, чему равняются площади  $w(t)$  под графиками сечений корректирующего ядра  $\Psi_\eta(t, \tau)$ :

$$w(t) = \int_0^\infty \Psi_\eta(t, \tau) d\tau. \quad (13)$$

Для этого применим к обеим частям определения (13) преобразование Лапласа:

$$w(s) = \int_0^\infty \Psi_\eta(s, \tau) d\tau = \int_0^\infty \frac{1}{1+\eta s} \cdot \exp\left(-\tau \cdot \frac{s}{\sqrt{1+\eta s}}\right) d\tau = \frac{1}{s\sqrt{1+\eta s}}. \quad (14)$$

От изображения (14) несложно перейти к оригиналу, используя таблицу преобразования Лапласа:

$$w(t) = \operatorname{erf}(\sqrt{t/\eta}),$$

где  $y = \operatorname{erf}(x)$  – это *интеграл вероятностей* [8].

Отношение  $\zeta = t/\eta$  является безразмерной величиной и обозначает изменение времени для шкалы, где коэффициент вязкости  $\eta$  является единицей. График функции  $w(\zeta)$  показан на рис. 4; при значениях  $\zeta > 3$ , то есть при условии  $t > 3\eta$ , площадь под графиком отличается от 1 на величину, которой допустимо пренебречь.

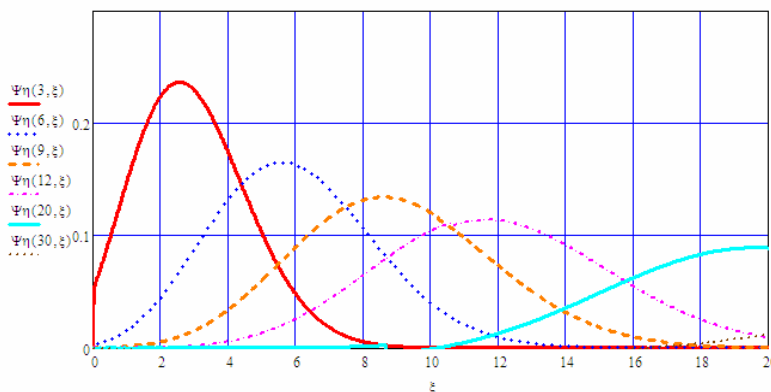


Рисунок 3 – Графики корректирующего ядра  $\Psi_\eta(\zeta, \xi) = \Psi_\eta(t/\eta, \tau/\eta)$

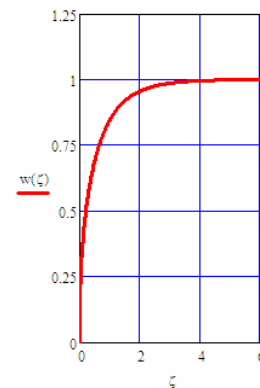


Рисунок 4 – Площадь под графиком корректирующего ядра

Анализ расчетных кривых  $z(\tau) = \Psi_\eta(t, \tau)$  показал, что при условии  $t > 3\eta$  форма сечения близка к форме графика плотности нормального распределения (то есть, к *кривой Гаусса*  $y = \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t})$ ), причем максимум кривой близок к моменту  $t$ , но несколько отклоняется в меньшую сторону (рис. 3).

При выполнении условия  $t/\eta \gg 1$  эта функция имеет следующую аппроксима-

цию:

$$\Psi_{\eta}(t, \tau) \approx \frac{1}{\sqrt{2\pi\eta t}} \cdot \exp\left(-\frac{(\tau-t)^2}{2\eta t}\right), \quad (15)$$

которая совпадает с функцией  $y = \rho_0(\tau - a, \sigma)$  плотности нормального распределения, имеющего математическое ожидание  $a = t$  и дисперсию  $\sigma^2 = \eta t$ , что и требовалось доказать.

На классе оригиналов  $y = K(t)$ , заданных при значениях  $t \geq 0$ , кусочно-непрерывных и интегрируемых на любом конечном промежутке изменения аргумента  $t$ , определим линейный интегральный оператор формулой

$$\mathbf{G}_{\eta}[K(t)] = \int_0^{\infty} \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau. \quad (16)$$

Как следует из предыдущего материала, именно этот оператор при условии  $t/\eta \gg 1$  по формуле

$$K_{\eta}(t) = \mathbf{G}_{\eta}[K_0(t)]$$

выполняет сглаживающую корректировку ядра  $y = K_0(t)$  при учете внутреннего трения Кельвина – Фойхта, поэтому мы назвали его *сглаживающим оператором Кельвина – Фойхта* (ОКФ).

Учитывая свойства кривой Гаусса, переменная интегрирования  $\tau$  в (14) не выходит за пределы промежутка

$$[t - 3\sqrt{\eta t}; t + 3\sqrt{\eta t}],$$

так что пределы интегрирования можно заменить на более узкие, и мы получим:

$$\mathbf{G}_{\eta}[K(t)] = \int_{t-3\sqrt{\eta t}}^{t+3\sqrt{\eta t}} \rho_0(\tau - t, \sqrt{\eta t}) \cdot K(\tau) d\tau.$$

ОКФ во многом напоминает известный *фильтр Гаусса*, используемый при обработке результатов эксперимента, но имеется существенное отличие: здесь дисперсия – это переменная величина, которая увеличивается пропорционально корню из времени  $t$ . В результате чего носитель корректирующего ядра приобретает клиновидную форму, выделенную на рис. 5 пунктиром.

Как и любой другой оператор, ОКФ можно применять повторно; кроме того, можно перемножать (то есть применять последовательно) ОКФ, отвечающие различным коэффициентам вязкости. В статье [5] доказана

**Теорема.** Пусть даны два коэффициента вязкого трения  $\eta_1, \eta_2$ . Тогда при условии  $t/(\eta_1 + \eta_2) \gg 1$  выполняется равенство

$$\mathbf{G}_{\eta_2}[\mathbf{G}_{\eta_1}[K(t)]] = \mathbf{G}_{\eta_1 + \eta_2}[K(t)].$$

Если использовать для анализа заменяющие схемы, показанные на рис. 6, то доказанный результат покажется тривиальным. Но не следует забывать, что при условии  $t \rightarrow +0$  он нарушается, и это лишний раз свидетельствует о несовершенстве упрощенных схем.

Заметим, что при значении  $\eta = 0$  оператор  $\mathbf{G}_0[\cdot]$  удовлетворяет тривиальному равенству  $\mathbf{G}_0[K(t)] = K(t)$  и является единичным оператором  $\mathbf{I}[\cdot]$ . Если в уравнении (6) и формуле (9) использовать отрицательное значение  $\eta$ , то мы придем к обратному оператору Кельвина – Фойхта, то есть

$$\mathbf{G}_\eta^{-1}[\cdot] = \mathbf{G}_{-\eta}[\cdot].$$

Обратный оператор не является сглаживающим, наоборот, после его действия размах колебаний возрастает. Его значения можно искать как сумму следующего ряда:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_\eta^{-1}[\cdot] &= [\mathbf{I}[\cdot] - (\mathbf{I}[\cdot] - \mathbf{G}_\eta[\cdot])]^{-1} = \\ &= \mathbf{I}[\cdot] + (\mathbf{I}[\cdot] - \mathbf{G}_\eta[\cdot]) + (\mathbf{I}[\cdot] - \mathbf{G}_\eta[\cdot])^2 + (\mathbf{I}[\cdot] - \mathbf{G}_\eta[\cdot])^3 + \dots \end{aligned} \quad (17)$$

Если коэффициент трения  $\eta$  мал, то разность между функциями  $y = K(t)$  и  $y = \mathbf{G}_\eta[K(t)]$  также мала, поэтому в сумме (17) можно оставить только два или три первых слагаемых, и мы получим приближенные формулы для обратного оператора:

$$\mathbf{G}_\eta^{-1}[\cdot] \approx 2\mathbf{I}[\cdot] - \mathbf{G}_\eta[\cdot] \quad \text{или} \quad \mathbf{G}_\eta^{-1}[\cdot] \approx 3\mathbf{I}[\cdot] - 3\mathbf{G}_\eta[\cdot] + \mathbf{G}_{2\eta}[\cdot]. \quad (18)$$

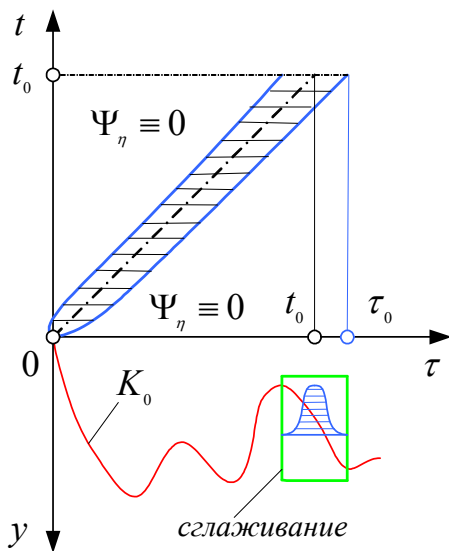
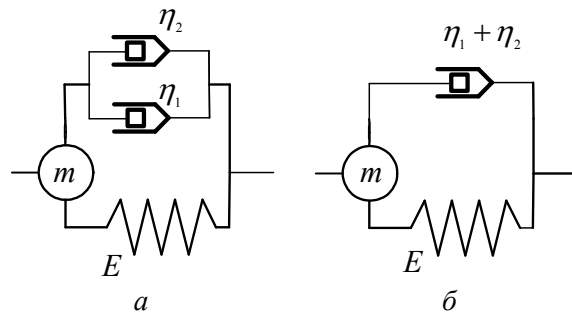


Рисунок 5 – Графическая интерпретация процедуры сглаживания ядра



На схемах обозначено:  $m$  – масса;  $E$  – упругость,  $\eta_{1,2}$  – вязкость.

Рисунок 6 – Заменяющие схемы для динамического анализа вязкоупругого поведения материала:  $a$  – при последовательном сглаживании;  $b$  – при суммарном сглаживании

Поясним, зачем нужен обратный оператор. Предположим, что ядро  $y = K_\eta(t)$ , показанное на рис. 1, получено не путем суммирования ряда (4), а при выполнении лабораторных исследований, то есть формы и частоты собственных колебаний неизвестны. Известно [3], что коэффициенты внутреннего трения сильно зависят от температуры (значительно сильнее, чем модули упругости и сдвига). Требуется оценить, как изменится ядро  $y = K_\eta(t)$  (и все другие характеристики, которые зависят от этого ядра), если в результате снижения температуры декремент затухания  $d_0$  уменьшится в 2 раза – до значения  $d_0 = 0.035$ . Для решения этой задачи должна быть выполнена обратная



корректировка ядра, то есть, применен обратный ОКФ. Применение формул (18) для поставленной задачи проиллюстрировано на рис. 7. Ядро  $y = Kg(t)$  получено как результат действия прямого ОКФ, а ядра  $y = K\eta_2(t)$  и  $y = K\eta_3(t)$  – как результат последовательного действия прямого (с удвоенным декрементом) и обратного ОКФ:

$$Kg(t) = \mathbf{G}_\eta[K_0(t)]; \quad K\eta(t) = \mathbf{G}_\eta^{-1}[\mathbf{G}_{2\eta}[K_0(t)]].$$

На рис. 7 расхождение между графиками мало, что подтверждает эффективность метода построения обратного оператора.

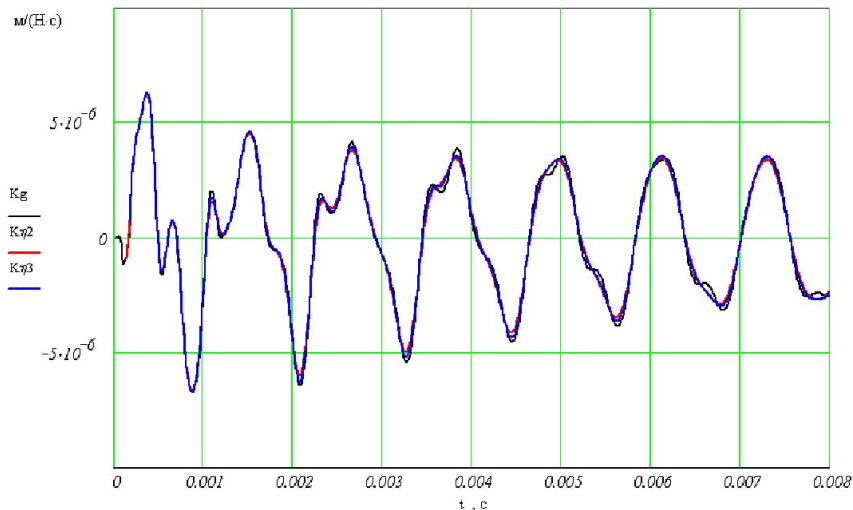


Рисунок 7 – Пример применения обратного ОКФ в форме начального отрезка ряда (17):  
 $Kg(t)$  – точное ядро,  $K\eta_2(t)$  – первое приближение (2 слагаемых ряда),  
 $K\eta_3(t)$  – второе приближение (3 слагаемых)

**Сглаживающий оператор Бока – Шлиппе – Колара и его свойства.** Покажем, что аналогичный подход, но с другим корректирующим ядром, можно применить для случая гистерезисного трения. В этом случае вещественная и мнимая части комплексной частоты имеют вид

$$\alpha_j = -h \cdot \omega_j; \quad \beta_j = \omega_j \sqrt{1 - h^2}, \quad \text{где } h = 0.5\gamma \omega_0,$$

следовательно

$$\lambda_j = -0.5\eta \omega_0 \omega_j \pm i \omega_j \sqrt{1 - 0.25 \cdot \gamma^2 \omega_0^2} = \mp i \omega_j \cdot \exp(\mp i \cdot \varphi), \quad (19)$$

а значение малого угла  $\varphi$  можно найти из уравнения  $\sin \varphi = h$ .

Получается, что особые точки функции  $w = K_0(s)$  под воздействием трения перемещаются по дугам окружностей с центром в нуле с мнимой оси в левую комплексную полуплоскость, поворачиваясь на постоянный угол  $\varphi$  или  $-\varphi$  (рис. 2 б). Поскольку для гистерезисного трения величина декремента затухания  $d = 2\pi h$  обычно не превосходит 0.02, то

$$h \leq 0.02 / (2\pi) \approx 0.003 \quad \text{и} \quad \cos \varphi = \sqrt{1 - h^2} \geq 0.999995,$$

то есть демпфированные частоты практически неотличимы от исходных частот колебаний.

Трение, при анализе которого демпфированием собственных частот колебаний допустимо пренебречь, будем называть *когерентным*.

Таким образом, гистерезисное трение является когерентным. Вязкое трение не является когерентным для высоких частот, но для малых и средних частот, не попадающих в заштрихованную область на рис. 2 а, также является когерентным. Существуют и другие случаи когерентного трения; таким свойством, напр., обладает внешнее вязкое трение и сложное трение в *линейном стандартном теле* (рис. 2 в, г)

Формулу (10) для ядра перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$K_\gamma(t) = \sum_{j=0,1,2,\dots} f(\omega_j) \cdot \exp(-\sin \varphi \cdot \omega_j t) \cdot [\sin(\omega_j t) / \omega_j], \quad (20)$$

и для преобразования дискретной суммы в интеграл воспользуемся непрерывной дельтаобразной функцией  $\delta_\varepsilon(\omega)$ , которая при условии  $\varepsilon \rightarrow 0$  переходит в обобщенную функцию Дирака  $\delta_0(\omega)$ , а ряд заменим его  $N$ -ой частичной суммой. В результате получим

$$K_\gamma(t, \varepsilon, N) = \int_0^\infty [f_{\varepsilon, N}(\omega) / \omega] \cdot \exp(-\sin \varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) d\omega, \quad (21)$$

где график функции

$$f_{\varepsilon, N}(\omega) = f(\omega) \cdot \sum_{j=0,1,\dots,N} \delta_\varepsilon(\omega - \omega_j)$$

показан на рис. 8. Площади заштрихованных треугольников равняются коэффициентам ряда  $f(\omega_0), f(\omega_1), \dots, f(\omega_N)$ , а основание каждого треугольника имеет длину  $\varepsilon$ .

При условии  $\varepsilon \rightarrow 0, N \rightarrow \infty$  функция  $K_\gamma(t, \varepsilon, N)$  переходит в искомое ядро  $K_\gamma(t)$ .

В силу (4) аналогичное равенство и аналогичный результат предельного перехода имеют место для ядра  $y = K_0(t)$ , причем с той же функцией  $f_{\varepsilon, N}(\omega)$ :

$$K_0(t, \varepsilon, N) = \int_0^\infty [f_{\varepsilon, N}(\omega) / \omega] \cdot \sin(\omega t) d\omega. \quad (22)$$

Функция  $y = f_{\varepsilon, N}(\omega) / \omega$ , по её построению, при любых значениях  $\varepsilon > 0$  и  $N < \infty$  непрерывна и абсолютно интегрируема на промежутке  $(0, +\infty)$ . Следовательно, интеграл из правой части (22) – это синус-преобразование Фурье, и здесь можно применить обратное преобразование:

$$f_{\varepsilon, N}(\omega) / \omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\tau, \varepsilon, N) \cdot \sin(\omega \tau) d\tau.$$

После подстановки в (21) получаем:

$$K_\gamma(t, \varepsilon, N) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \left[ \int_0^\infty K_0(\tau, \varepsilon, N) \cdot \sin(\omega \tau) d\tau \right] \cdot \exp(-\sin \varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) d\omega.$$

В двойном интеграле поменяем порядок интегрирования:

$$K_\gamma(t, \varepsilon, N) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\tau, \varepsilon, N) \cdot \left[ \int_0^\infty \exp(-\sin \varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) d\omega \right] d\tau,$$

и в обеих частях устремим  $\varepsilon$  к нулю, а  $N$  – к бесконечности. В результате получим

$$K_\gamma(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty K_0(\tau) \cdot \left[ \int_0^\infty \exp(-\sin \varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \sin(\omega \tau) d\omega \right] d\tau.$$

Следовательно, корректирующая функция определяется равенством:

$$\Psi_\gamma(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp(-\sin \varphi \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega \tau) d\omega. \quad (23)$$

Интеграл (23) берется по частям, и мы приходим к формуле:

$$\Psi_\gamma(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\tau - t}{ht} - \operatorname{arctg} \frac{\tau + t}{ht} \right], \quad (24)$$

где от величины  $\sin \varphi$  мы вернулись к коэффициенту  $h = 0.5\gamma \omega_0$ .

Учтем, что коэффициент  $h$  очень мал, поэтому  $\operatorname{arctg}[(\tau + t)/(ht)] \approx \pi/2$ , и после дифференцирования второе слагаемое пропадает. Таким образом, для анализа гистерезисного трения можно использовать корректирующее ядро

$$\Psi_\gamma(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \left[ \operatorname{arctg} \frac{\tau - t}{ht} \right] = \frac{1}{\pi ht} \cdot \frac{1}{[(\tau - t)/ht]^2 + 1}. \quad (25)$$

График этой функции (его называют *кривой Коши*) приведен на рис. 9, там же, для сравнения, показана кривая Гаусса, являющаяся корректирующим ядром (15) для вязкого трения.

При больших значениях аргумента арктангенс убывает медленнее, чем плотность нормального распределения. Поэтому, чтобы уйти от несобственного интеграла и, при этом, сохранить необходимую точность расчета интервал сглаживания  $[t - \Delta t, t + \Delta t]$  в интеграле

$$K_\gamma(t) = \int_{t-\Delta t}^{t+\Delta t} \Psi_\gamma(t, \tau) \cdot K_0(\tau) d\tau \quad (26)$$

увеличивается до значения  $[0, 2t]$ , то есть используется  $\Delta t = t$ . Однако, если  $\Delta t > T_0$ , где  $T_0$  – это основной период колебаний, то погрешность перехода к собственному интегралу дополнительно уменьшается вследствие осциллирующих свойств ядра  $y = K(t)$ . Поэтому в нашей работе выбор интервала сглаживания был подчинен условию

$$\Delta t = \min(t, T_0).$$

Равенство (26) или, в краткой записи,

$$\mathbf{C}_\gamma[K(t)] = K_\gamma(t)$$

определяет действие *сглаживающего оператора Бока – Шлиппе – Колара* (ОБШК)

$\mathbf{C}_\gamma[\cdot]$ . Свойства этого оператора (и обратного к нему оператора  $\mathbf{C}_\gamma^{-1}[\cdot]$ ) идентичны описанным выше свойствам сглаживающего оператора ОКФ для вязкого трения. Кроме того, следует указать на ещё одно свойство:

$$\mathbf{C}_\gamma[\cdot] = k \cdot \mathbf{C}_{\gamma/k}[\cdot] + (1-k) \cdot \mathbf{I}[\cdot],$$

что позволяет дополнительно сокращать интервал сглаживания в (25). При значении  $k = 2$  получаем

$$\mathbf{C}_\gamma[\cdot] = 2 \cdot \mathbf{C}_{0.5\gamma}[\cdot] - \mathbf{I}[\cdot] \quad \text{и} \quad \Delta t = \min(0.5t, T_0).$$

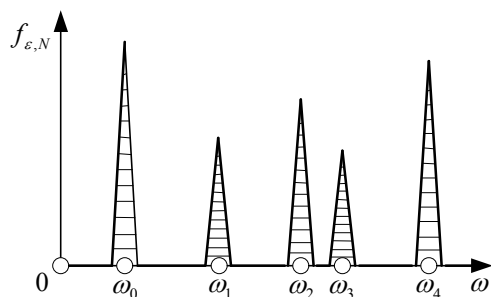


Рисунок 8. – Непрерывная аппроксимация коэффициентов разложения в обобщенный ряд Фурье

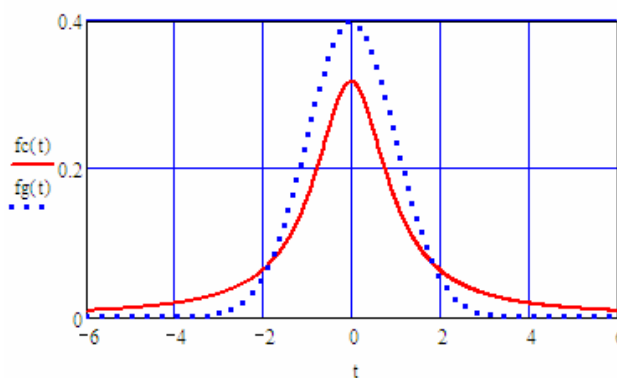


Рисунок 9 – Сглаживающие кривые Коши и Гаусса при одинаковом декременте затухания

**Корректирующее ядро для общего случая.** Особенностью гистерезисного трения является неизменность угла  $\varphi$  для всех собственных частот  $\omega_j$ . Для любого другого случая когерентного трения угол  $\varphi_j$  перемещения спектра в комплексную плоскость зависит от перемещаемой частоты, и эту зависимость передает некоторая функция  $\varphi(\omega)$ .

Повторяя выкладки предыдущего пункта статьи, приходим к равенству, обобщающему (21):

$$\Psi(t, \tau) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\sin \varphi(\omega) \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega t) \cdot \sin(\omega \tau) d\omega.$$

Отсюда, рассматривая общий случай, удастся сделать ещё один шаг:

$$\Psi(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\sin \varphi(\omega) \cdot \omega t) \cdot \cos(\omega(t - \tau)) d\omega,$$

но далее нужно использовать конкретный вид функции  $\varphi(\omega)$ .

Например, для случая вязкого трения  $\sin \varphi(\omega) = 0.5\eta \omega$ , и мы приходим к равенству

$$\Psi_\eta(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-0.5 \cdot \eta \cdot \omega^2 t) \cdot \cos(\omega(t - \tau)) d\omega.$$

Полученный несобственный интеграл вычисляется методами теории функций

комплексного переменного и приводит к равенству (15). Таким образом, для вязкого трения развиваемая здесь теория получила независимую проверку своих основных результатов при использовании двух разных методов.

Для гистерезисного трения проверка теории выполнялась путем сопоставления ядер  $K_{\gamma_1}(t)$  и  $K_{\gamma_2}(t)$ , полученных по формулам (20) и (25), (26) соответственно (рис. 10). Ядра, полученные для гистерезисного трения двумя различными способами, практически совпали.

В завершение пункта приведем формулу для корректирующего ядра при некогерентном трении:

$$\Psi(t, \tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \exp(-\sin \varphi(\omega) \cdot \omega t) \cdot \sin(\cos \varphi(\omega) \cdot \omega t) \cdot \sin(\omega \tau) d\omega.$$

Этой формулой можно пользоваться и в том случае, если демпфирование высоких частот приводит к аperiodическим колебаниям (то есть тригонометрический  $\sin(\cos \varphi(\omega) \cdot \omega t)$  становится гиперболическим).

**Корректирующее ядро для смешанного трения.** Пусть моделируемая пластина или балка контактирует с внешней средой, оказывающей существенное сопротивление движению граничной поверхности (напр., она лежит на основании из песка, глины или другого сыпучего либо высоковязкого материала). Тогда уравнение колебаний с учетом смешанного характера трения будет иметь следующий вид:

$$\rho \partial^2 \mathbf{u} / \partial t^2 + \zeta \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t = \mathbf{L}_x [\mathbf{u} + \eta \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t] + \bar{P}(\mathbf{x}, t), \quad (27)$$

откуда получаем уравнение для демпфированных собственных частот и коэффициентов затухания колебаний:

$$\lambda_j^2 + (\eta \omega_j^2 + \zeta) \cdot \lambda_j + \omega_j^2 = 0,$$

где  $\zeta, \eta$  – коэффициенты внешнего и внутреннего вязкого трения.

Аналогичные уравнения можно использовать при моделировании упругих и **диссипативных** свойств некоторых композитных материалов (пластика, бетона, металлических сплавов и многих других). Здесь приходится отказываться от теорий, основанных на гипотезе однородной упругой среды, и учитывать наличие в этом материале внутренней сложной структуры, напр., твердых зерен, вкрапленных в вязкую основу. При внутренних деформациях каждая фаза будет иметь свою скорость перемещения, отличную от средней скорости  $\partial \mathbf{u} / \partial t$  перемещения материала. В результате на границе зерен появятся напряжения сдвига  $\zeta \cdot \partial \mathbf{u} / \partial t$ . А в материале будут параллельно действовать два вида трения – внутреннее трение вязкой основы, имеющее коэффициент трения  $\eta$  и описываемое моделью Кельвина – Фойгхта, и вязкое трение на границах зерен, пропорциональное скорости скольжения с коэффициентом трения  $\zeta$ .

Заметим, что для композитного материала, чтобы полностью соответствовать закону сохранения импульса, соотношение (27) следовало бы дополнить уравнением движения зерен (как это, напр., сделано в известной *модели Косера*), но в данном исследовании это будет излишней детализацией; при моделировании внешнего трения возмущения среды за поверхностью тела также никого не интересуют. Достаточно считать, что твердые зерна движутся существенно медленнее, чем упругая основа.

Величина

$$d(\omega) = \pi(\eta \cdot \omega + \zeta / \omega) \quad (28)$$

определяет логарифмический декремент затухания на собственной частоте  $\omega$ . График этой величины показан на рис. 11; в районе минимума он имеет протяженное плато, где результат практически не изменяется.

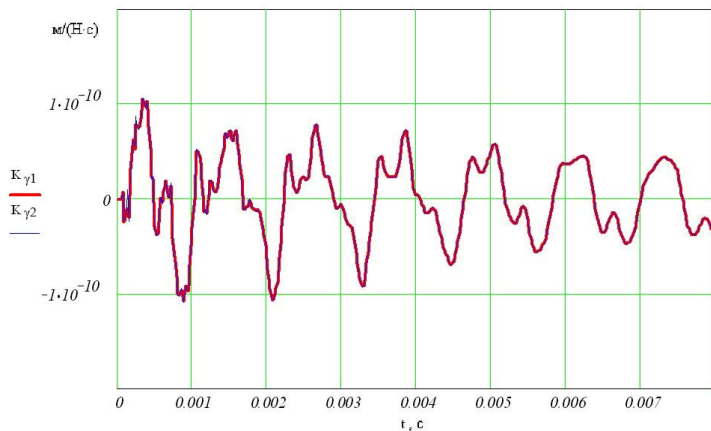


Рисунок 10 – Ядра, полученные двумя разными способами, практически совпали

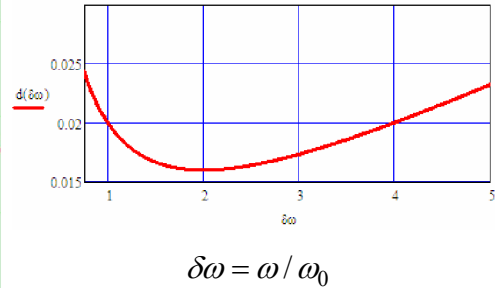


Рисунок 11 – Зависимость декремента затухания от относительной частоты

Сравним этот результат с другими видами трения. Пусть  $d_0$ , как и ранее, обозначает логарифмический декремент затухания для основной формы колебаний. Тогда на остальных собственных частотах  $\omega$  колебаний континуума и разных моделях трения будем иметь:

- для гистерезисного трения –  $d(\omega) = d_0 = const$ ;
- для вязкого трения –  $d(\omega) = d_0 \cdot (\omega / \omega_0)$ ;
- для граничного трения –  $d(\omega) = d_0 \cdot (\omega_0 / \omega)$ .

Перепишем равенство (28) в следующем виде:

$$d(\omega) = d_\eta(\omega) + d_\zeta(\omega),$$

где  $d_\eta(\omega) = \pi \cdot \eta \cdot \omega = d_{0,\eta} \cdot (\omega / \omega_0)$ ;  $d_\zeta(\omega) = \pi \cdot \zeta / \omega = d_{0,\zeta} \cdot (\omega_0 / \omega)$ .

Рис. 11 иллюстрирует случай, когда  $d_{0,\zeta} = 4 \cdot d_{0,\eta}$ ,  $d_{0,\zeta} + d_{0,\eta} = 0.02$ .

Как видим, смешанное трение на основных частотах колебаний ведет себя подобно гистерезисному трению.

Возможно, в этом совпадении и состоит разгадка происхождения модели трения Бока – Шлиппе – Колара, которая, как указано в [3, 4], имеет многочисленные экспериментальные подтверждения и поэтому рекомендуется для использования, в том числе, и при расчетах не ферромагнитных сплавов, причем при переходных процессах колебаний. Понятие фазовой производной, используемое в данной модели, для этого случая не имеет физического смысла. Когда переходной процесс находится в самом начале своего развития, на первом периоде свободных колебаний, то использовать в уравнениях движения так называемый *фазовый угол* – это означает вступать в противоречие с классической ньютоновской механикой и ее принципом причинности.

Другое дело – моделирование ферромагнитных материалов, у которых существует память, работающая на перемагничивании доменов, и имеется предел намагничивания. Здесь гистерезисное трение Бока – Шлиппе – Колара может найти причины своего возникновения в особых и уже хорошо изученных, свойствах материала. Если же упругий материал не обладает памятью, то найти иное, чем дано выше, объяснение феномену гистерезисного трения (при переходных процессах) трудно. Известное объяснение пришло в механику из квантовой физики и трактует любое упругое тело как со-

вокупность собственных форм его колебаний, связанных между собой условием сохранения границы тела. То есть, в начале переходного процесса самих колебаний еще нет, а своеобразные треки – траектории, по которым они должны развиваться, подготовлены заранее, и на каждом треке действует свое трение. Как только появляется внешнее воздействие, оно мгновенно расщепляется по собственным формам, и каждая форма, двигаясь по своему треку, затухает с индивидуальной скоростью. Выглядит такое объяснение очень красиво и современно, но оно мало кого убеждает. Куда проще согласиться с тем, что модель гистерезисного трения – это аппроксимация модели смешанного трения, актуальная для диапазона основных частот колебаний.

Метод корректировки ядра, разработанный для случая смешанного трения, можно (в первом приближении) использовать для гистерезисного трения. Для диапазона основных частот выполняется приближенное операторное равенство

$$\mathbf{C}_\gamma[\cdot] \approx \mathbf{G}_{0,2,\gamma}[\cdot] + (\exp(-0.4 \pi \gamma \cdot \omega_0 t) - 1) \cdot \mathbf{I}[\cdot], \quad (29)$$

которое сокращает объем необходимых вычислений более чем в 10 раз.

Качество аппроксимации для расчета прямоугольной пластины показано на рисунке 12.

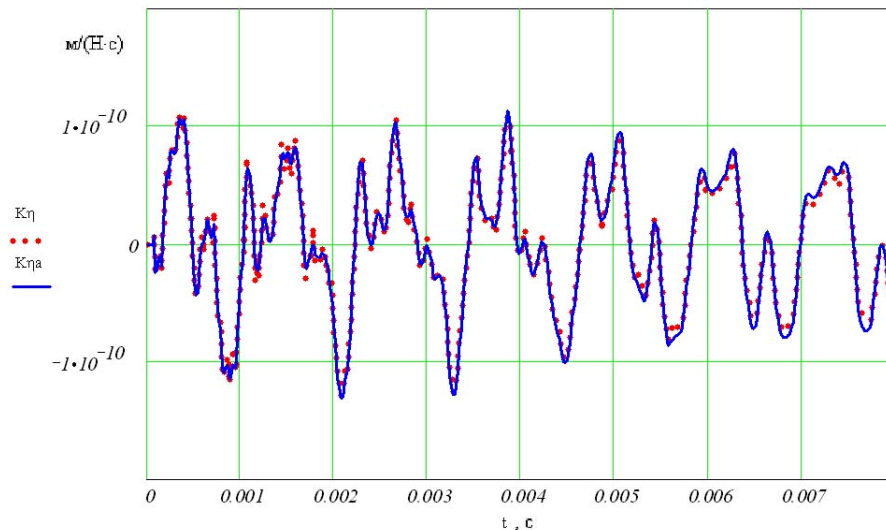


Рисунок 12 – Ядро  $K\eta(t)$  для гистерезисного трения и его аппроксимация  $K\eta a(t)$  с использованием формулы (29)

**Область применения нового метода и перспективы ее расширения.** Описанный подход, после дополнительной специализации корректирующего ядра, естественным образом распространяется на задачи ползучести и текучести, а также на общую задачу вязкоупругого деформирования, в которой вместо модели Кельвина – Фойхта используется модель стандартного линейного тела (СЛТ). В частности, применительно к СЛТ равенство (15) принимает следующий вид:

$$\Psi_\eta(s, \tau) = \frac{1 + \delta_E \eta s}{1 + \eta(1 + \delta_E)s} \cdot \exp\left(-\tau s \cdot \sqrt{\frac{1 + \delta_E \eta s}{1 + \eta(1 + \delta_E)s}}\right), \quad (30)$$

где  $\delta_E = E_1 / E_2$ ;  $E_1, E_2$  – это модули упругости из моделей Кельвина – Фойхта и Максвелла.

Изображение (30) и комплексные частоты колебаний (рис. 2 г), имеют другую асимптотику, что изменяет поведение оригинала при времени  $t \rightarrow +0$ . Но начальные

отрезки скорректированных частот на рис. 2 а, з близки, поэтому при анализе механических колебаний для модели СЛТ при учете вязкости можно продолжать использовать оператор  $G_\eta[.]$ .

При решении задачи ползучести на первый план выходит другая проблема: коэффициент трения  $\eta$  здесь очень большой (нередко он составляет сотни секунд), и при применении оператора Кельвина – Фойхта для малого момента времени  $t$  (составляющего доли секунды) приходится определять исходное ядро для большого промежутка времени, соизмеримого со среднеквадратичным отклонением  $\sigma = \sqrt{\eta t}$ . Отношение

$$\sigma/t = \sqrt{\eta/t} \gg 1,$$

и чем больше эта величина, тем ниже эффективность такого подхода к решению задачи.

В этой связи возникает гносеологический аспект, который необходимо прояснить. При корректировке ядра  $y = K_0(t)$ , производимого для некоторого момента времени  $t_0$ , ОКФ использует (рис. 5) значения этого же ядра с промежутка

$$t \in [t_0 - 3\sqrt{\eta t_0}; t_0 + 3\sqrt{\eta t_0}],$$

то есть, в том числе, для моментов времени  $t > t_0$ . Ядро  $y = K_0(t)$  – это реакция упругого континуума на нормированное внешнее возмущение, и, казалось бы, возникает нарушение известного *физического принципа причинности*. В действительности никакого нарушения здесь нет – нормированное возмущение производится в начальный момент времени  $t = 0$ , а разностный характер интегрального ядра означает, что упругие характеристики процесса (коэффициенты соответствующих уравнений) не зависят от времени. Поэтому реакция  $y = K_0(t)$  для всех моментов времени  $t > 0$  предопределена изначально, и отклониться от заданной траектории она не может.

**Пример использования разработанной теории для прямоугольной пластины.** Выражения для определения прогиба шарнирно опертой пластины и её деформаций (рис. 13) в случае, когда на неё действует нестационарная поперечная нагрузка  $P_0(t)$  импульсного типа (рис. 14), приведены, напр., в [6], и имеют следующий вид:

$$w(x, y, t) = \int_0^t K_w(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau; \quad \varepsilon(x, y, t) = \int_0^t K_\varepsilon(x, y, t - \tau) \cdot P(\tau) d\tau, \quad (31)$$

где  $w(x, y, t)$  – изменение прогиба пластины во времени;  $\varepsilon(x, y, t)$  – изменение деформации;  $K_i(x, y, t)$  – упругие разностные ядра интегралов типа свертки в точке пластины с координатами  $\mathbf{x}(x, y)$ . Методы получения ядер и их вид описаны в [2, 6].

Если считать, что возмущающая сила является сосредоточенной нагрузкой, то соответствующие ядра Коши  $K_0(t)$  для шарнирно-опертой пластины средней толщины по модели типа *С. П. Тимошенко* будут иметь вид:

$$K_w(x_S, x_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} [\Omega_{1kn} \cdot \sin(\omega_{1kn} t) - \Omega_{2kn} \cdot \sin(\omega_{2kn} t)] \times \\ \times \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right), \quad (32)$$



$$K_e(x_S, x_S, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \Omega_{kn} \cdot \left[ \frac{\sin(\omega_{1kn}t)}{\omega_{1kn}} - \frac{\sin(\omega_{2kn}t)}{\omega_{2kn}} \right] \times \sin\left(\frac{k\pi x_0}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_0}{m}\right) \cdot \sin\left(\frac{k\pi x_S}{l}\right) \cdot \sin\left(\frac{n\pi y_S}{m}\right), \quad (33)$$

где  $\omega_{1kn}$  и  $\omega_{2kn}$  – собственные частоты колебаний пластины;  $l$  и  $m$  – длина и ширина пластины;  $(x_0, y_0)$  – координаты точки  $x_0$ , в которой прикладывается нагрузка, а  $(x_S, y_S)$  – это координаты точки  $x_S$ , в которой определяется изменение прогиба во времени.

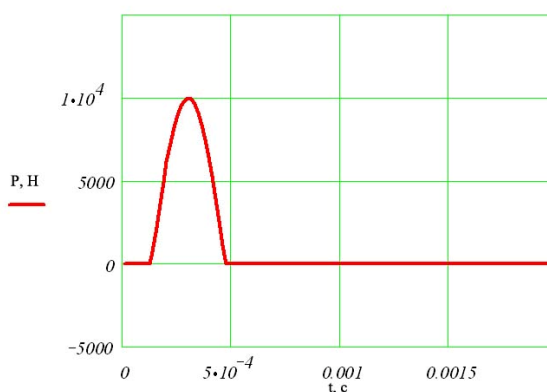
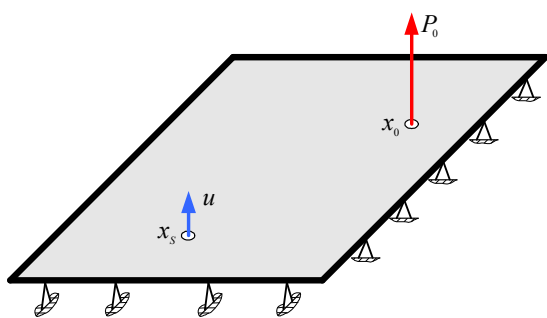


Рисунок 13 – Схема нагружения пластины      Рисунок 14 – Сила, возбуждающая колебания в пластине

При расчетах срединная плоскость пластины была связана с плоскостью  $xOy$  декартовой системы координат. Расчеты производились при следующих значениях параметров:

- плотность материала  $\rho = 7890 \text{ кг/м}^3$ ; коэффициент Пуассона  $\nu = 0.3$ ; модуль упругости  $E = 207 \text{ ГПа}$ ;
- толщина пластины  $h = 0.04 \text{ м}$ ; длина  $l = 0.6 \text{ м}$ , ширина  $m = 0.4 \text{ м}$ ;
- координаты точки приложения возмущающей нагрузки имеют значения:  $x_0 = 0.4 \text{ м}$ ,  $y_0 = 0.3 \text{ м}$ ;
- координаты точки, в которой исследуются вязкоупругие колебания пластины:  $x_S = 0.25 \text{ м}$ ,  $y_S = 0.1 \text{ м}$ ;
- декремент затухания основной формы колебаний  $d_0 = 0.05$ .

Число слагаемых в соответствующих двойных рядах Фурье, описывающих разложение решения по собственным формам колебаний, во всех случаях составляло  $40 \times 40$ ; но, как указывалось выше, после учета трения оно (без снижения точности расчета) могло быть сокращено до  $80 \dots 100$  гармоник.

На рис. 15 и рис. 16 представлены модифицированные ядра для свёрточных интегралов (32) и (33), соответственно: кривые 1 – внешнее; кривые 2 – гистерезисное; кривые 3 – вязкое трение.

Результаты расчетов прогибов и деформаций пластины с учетом различных моделей трения с помощью модифицированных ядер приведены на рис. 17 и рис. 18: кривые 1 – внешнее; кривые 2 – гистерезисное; кривые 3 – вязкое трение.

Возмущающая сила (рис. 14) представляла собой первую полуволну синусоиды с амплитудой  $10 \text{ кН}$  и длительностью  $340 \text{ мкс}$ ; началу импульса на рис. 17 и рис. 18 от-

вечает время 136 мкс.

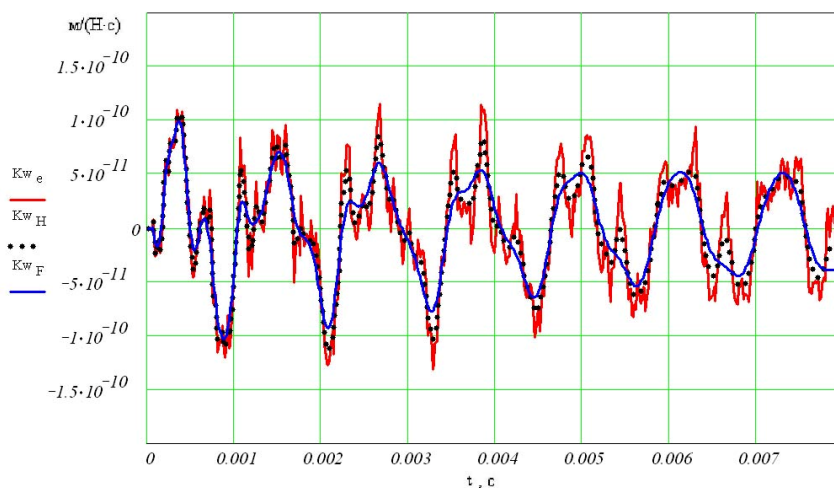


Рисунок 15 – Модифицированные ядра для прогибов

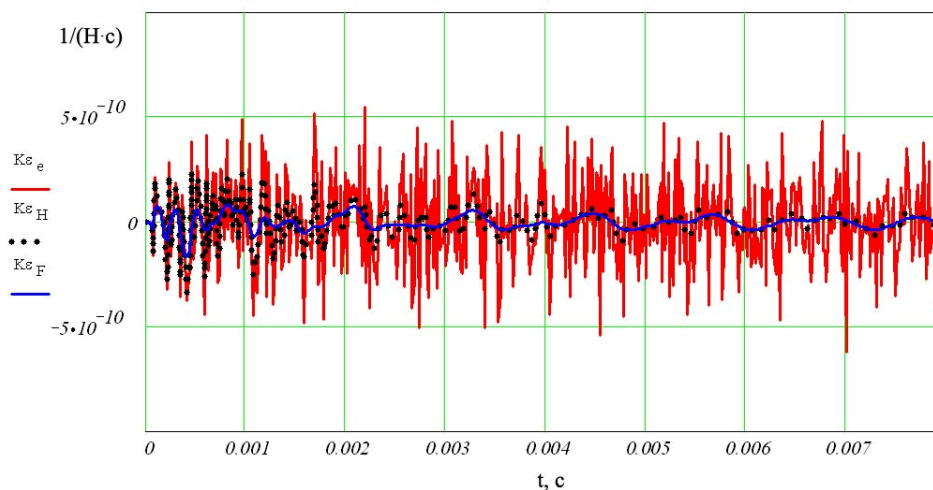


Рисунок 16 – Модифицированные ядра для деформаций

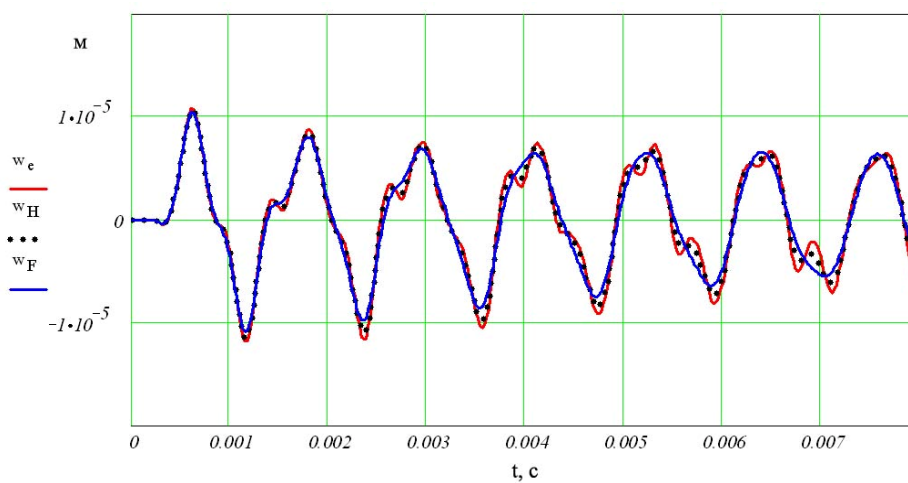


Рисунок 17 – Изменения прогиба пластины при колебаниях с учетом трения

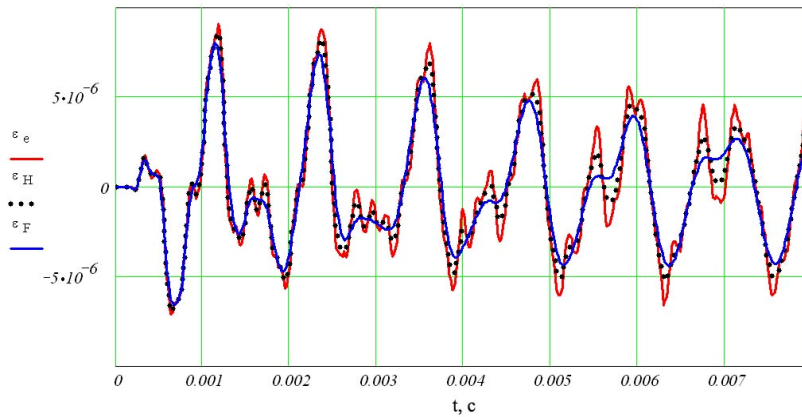


Рисунок 18 – Изменения деформации пластины при колебаниях с учетом трения

**Выводы.** Для вязкоупругого континуума, моделируемого с учетом внутреннего вязкого трения, которое описывается моделью Кельвина – Фойхта, или гистерезисного трения, которое описывается моделью Бока – Шлиппе – Колара, разработан новый численно-аналитический метод расчета переходных процессов, происходящих под воздействием нестационарного силового нагружения. Метод использует операционное исчисление и синус - преобразование Фурье, и сводится к применению новых сглаживающих интегральных операторов, использующих кривые Гаусса и Коши при моделировании вязкого внутреннего и гистерезисного трения. Указанный подход использует сглаживающие линейные интегральные операторы и может быть применен для любых упругих решений, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки

Главным достоинством, которое предопределило высокую эффективность нового метода, является то, что он не использует информацию о структуре решения, а именно о частотах и формах свободных колебаний континуума, и, следовательно, он не чувствителен к погрешностям описания граничных условий и несовершенству принятых гипотез деформирования (*Кирхгофа, С.П. Тимошенко, и др.*). Благодаря чему его удастся использовать в режиме обработки осциллограмм, полученных в результате проведения эксперимента.

Метод позволяет выделять из исследуемых колебаний так называемую *упругую составляющую* и наименее трудоемким способом моделировать переходные процессы при различных значениях коэффициента трения, что, напр., отвечает изменяющемуся термическому состоянию материала.

Возможности разработанного метода проиллюстрированы на примере вынужденных нестационарных колебаний двумерного континуума – прямоугольной пластины.

**Литература:** 1. Филиппов А. П. *Колебания деформируемых систем.* – М. : Машиностроение, 1970. – 734 с. 2. *Задачи импульсного деформирования элементов конструкций* / Янютин Е. Г., Янчевский И. В., Воронай А. В., Шарапата А. С.: Монография. – Харьков ХНАДУ, 2004. – 392 с. 3. Писаренко Г. С., Яковлев А. П., Матвеев В. В. *Вибропоглощающие свойства конструкционных материалов.* – К. : Наук. думка, 1971. – 375 с. 4. Василенко М. В., Алексейчук О. М. *Теорія коливаль і стійкості руху.* – К. : Вища школа, 2004. – 525с. 5. Воронай А. В., Григорьев А. Л. *Использование теоремы Эфроса для учета диссипативных свойств деформируемых элементов конструкций* // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Харків : НТУ «ХПІ», 2017. – № 6 (1228). – С. 29 – 44. 6. Воронай А.В., Янютин Е.Г. *Идентификация нескольких импульсных нагрузок, воздействующих на пластину* // Прикл. мех. – 2007. – 43, № 7. – С. 90-97. 7. Краснов М. Л., Киселев А. И., Макаренко Г. И. *Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости: Учебное пособие, 2-е изд., перераб. и доп.* – М. : Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. 8. Корн Г., Корн Т. *Справочник по математике (для научных сотрудников и*

*инженеров). – М.: Наука, 1977.*

**Bibliography (transliterated):** 1. Filippov A. P. *Kolebaniya deformiruyemykh sistem.* – М. : Mashinostroyeniye, 1970. – 734 s. 2. *Zadachi impul'snogo deformirovaniya elementov konstruktsiy / Yanyutin Ye. G., Yanchevskiy I. V., Voropay A. V., Sharapata A. S.: Monografiya.* – Khar'kov KHNADU, 2004. – 392 s. 3. Pisarenko G.S., Yakovlev A.P., Matveyev V.V. *Vibropogloshchayushchiye svoystva konstruktsionnykh materialov.* – К. : Naukova dumka, 1971. – 375s. 4. Vasilenko M.V., Alekseychuk O.M. *Teoriya kolivan' i stiykosti rukhu.* – К. : Vishcha shkola, 2004. – 525s. 5. Voropay A. V., Grigor'yev A. L. *Ispol'zovaniye teoremy Efrosa dlya ucheta dissipativnykh svoystv deformiruyemykh elementov kon-struktsiy // Visnik NTU «KHPÍ». Seriya: Matematichne modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh.* – Kharkiv: NTU «KHPÍ», 2017. – №6 (1228). – S. 29–44. 6. Voropay A.V., Yanyutin Ye.G. *Identifikatsiya neskol'kikh impul'snykh nagruzok, vozdeystvuyushchikh na plastinu // Prikl. mekh.* – 2007. – 43, № 7. – S. 90-97. 7. Krasnov M. L., Kiselev A. I., Makarenko G. I. *Funktsii kompleksnogo peremennogo. Operatsionnoye ischisleniye. Teoriya ustoychivosti: Uchebnoye posobiye, 2-ye izd., pererab. i dop.* – М.: Nauka. Glavnaya redaktsiya fiziko-matematicheskoy literatury, 1981. 8. Korn G., Korn T. *Spravochnik po matematike (dlya nauchnykh sotrudnikov i inzhenerov).*– М.: Nauka, 1977.

Воропай О.В., Григор'єв О.Л.

**ВИКОРИСТАННЯ ЗГЛАДЖУЮЧИХ ІНТЕГРАЛЬНИХ ОПЕРАТОРІВ  
ДЛЯ ВРАХУВАННЯ ВНУТРІШНЬОГО ТЕРТЯ ПРИ  
НЕСТАЦІОНАРНОМУ ДЕФОРМУВАННІ ЕЛЕМЕНТІВ КОНСТРУКЦІЙ**

На основі операційного обчислення та синус – перетворення Фур'є запропоновано новий підхід до аналізу перехідних процесів у в'язкопружному континуумі, викликаних нестационарними силовими збуреннями. Він дозволяє враховувати внутрішнє в'язке та гістерезисне тертя в матеріалі, що описується моделями тертя Кельвіна – Фойхта та Бока – Шліппе – Колара. Зазначений підхід використовує згладжуючі лінійні інтегральні оператори і може бути застосований для будь-яких пружних рішень, які представлені у вигляді інтегралів Дюамеля типу згортки з ядрами Коши.

Воропай А.В., Григорьев А.Л.

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СГЛАЖИВАЮЩИХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ  
ДЛЯ УЧЕТА ВНУТРЕННЕГО ТРЕНИЯ ПРИ  
НЕСТАЦИОНАРНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ЭЛЕМЕНТОВ КОНСТРУКЦИЙ**

На основе операционного исчисления и синус - преобразования Фурье предложен новый подход к анализу переходных процессов в вязкоупругом континууме, вызванных нестационарными силовыми возмущениями. Он позволяет учитывать внутреннее вязкое и гистерезисное трение в материалах, описываемое моделями Кельвина – Фойхта и Бока – Шлиппе – Колара. Указанный подход использует сглаживающие линейные интегральные операторы и может быть применен для любых упругих решений, которые представлены в виде интегралов Дюамеля типа свёртки с ядрами Коши.

A. Voropay, A. Grigoriev

**USING SMOOTHING INTEGRAL OPERATORS FOR TAKING INTO ACCOUNT  
INTERNAL FRICTION DURING NONSTATIONARY DEFORMING  
OF STRUCTURAL ELEMENTS**

A new approach to the analysis of transient processes in the viscoelastic continuum, caused by nonstationary force perturbations, on the basis of the operational calculus and Furie sin - transform is proposed. It allows taking into consideration the internal viscous and hysteresis friction in the material, described by the Kelvin – Feucht and Bock–Schlippe–Kohler friction model. This approach uses smoothing linear integral operators and can be applied to any elastic solutions that are represented as Duhamel convolution type integrals with Cauchy kernels.