

ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ ТВЕРДОТОПЛИВНОЙ РАКЕТЫ ОПЕРАТИВНО- ТАКТИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ

Постановка задачи. В ответ на разработанный Россией ракетный комплекс «Искандер» украинские специалисты ответили разработкой ракетного комплекса «Гром», имеющим аналогичные тактико-технические характеристики. Комплекс «Гром» устанавливается на мобильной пусковой установке на базе армейского варианта отечественного автомобиля «КрАЗ» и содержит две твердотопливные ракеты, способных доставлять боевую часть массой 480 кг на расстояние 300 км. Основной проблемой при создании цифровой системы управления ракетного комплекса «Гром» является обеспечение высокой точности стрельбы, определяемой точностью стабилизации корпуса ракеты относительно заданной траектории полета.

В работе [1] приведено описание процедуры параметрического синтеза стабилизатора ракеты-носителя с аналоговым автоматом стабилизации с помощью программного комплекса MathCAD. Эта процедура включает следующие этапы:

- разработка математической модели возмущенного движения объекта стабилизации;
- выбор структуры автомата стабилизации, определяющей аналоговую или цифровую форму алгоритма стабилизации;
- получение характеристического уравнения замкнутой системы стабилизации в предположении, что автомат стабилизации является аналоговым;
- расчет корней характеристического уравнения замкнутой аналоговой системы стабилизации;
- расчет амплитудно-фазо-частотных (АФЧХ) характеристик замкнутой системы стабилизации;
- построение областей устойчивости замкнутой системы стабилизации в плоскостях варьируемых параметров автомата стабилизации;
- выбор значений варьируемых параметров автомата стабилизации, обеспечивающих нахождение рабочей точки замкнутой системы внутри областей устойчивости и соответствующее качество процессов стабилизации в соответствии с видом АФЧХ замкнутой системы.

Приведенная выше процедура параметрического синтеза автомата стабилизации ракеты-носителя в совокупности с методом замороженных коэффициентов [2] позволяет отыскать значения варьируемых параметров автомата стабилизации для любого момента времени активного участка траектории полета ракеты, обеспечивающие устойчивость замкнутой системы стабилизации и требуемый запас устойчивости по амплитуде и по фазе. Вместе с тем, такая процедура обладает целым рядом недостатков, основными из которых являются:

- приведенная процедура возможна только лишь для линейных математических моделей объекта стабилизации и автомата стабилизации;
- приведенная процедура с большой натяжкой может быть использована для параметрического синтеза автомата стабилизации с бортовой цифровой вычислительной машиной (БЦВМ) в контуре управления, в связи с тем, что не учитывает величину периода квантования БЦВМ;

© Т.Е. Александрова, 2018

- запас устойчивости и быстрдействие замкнутой системы стабилизации, обеспечиваемые использованием приведенной процедуры, весьма косвенно связаны с точностью стабилизации ракеты относительно заданной траектории движения, и могут служить весьма приближенным показателем точности.

Целью настоящей работы является разработка процедуры параметрического синтеза цифрового автомата стабилизации для твердотопливной ракеты средней дальности с нелинейной характеристикой исполнительного органа, обеспечивающей высокую точность стабилизации ракеты относительно заданной траектории движения.

Математическая модель непрерывной части замкнутой цифровой системы стабилизации. Математическая модель возмущенного движения твердотопливной ракеты в канале рыскания записывается в виде [2]

$$\ddot{z}(t) = a'_{zz}\dot{z}(t) + a_{z\psi}\psi(t) + a_{z\delta}\delta(t) + a_{zf}f_z(t); \quad (1)$$

$$\ddot{\psi}(t) = a'_{\psi z}\dot{z}(t) + a_{\psi\psi}\psi(t) + a_{\psi\delta}\delta(t) + a_{\psi m}m_\psi(t), \quad (2)$$

где $z(t)$ – боковое смещение центра масс ракеты от заданной траектории движения в горизонтальной плоскости; $\psi(t)$ – угловое отклонение корпуса ракеты от заданного направления движения; $\delta(t)$ – угловое отклонение маршевого двигателя от нейтрального положения; $f_z(t)$ – боковое возмущение от силы ветра, приложенное к центру давления; $m_\psi(t)$ – возмущающий момент от боковой составляющей силы ветра, причем

$$m_\psi(t) = f_z(t) \cdot a,$$

где a – расстояние по продольной оси ракеты от центра давления до центра масс.

На трехосной гиросtabilизированной платформе, где внутренняя ось представляет собой ось вращения, промежуточная – ось рыскания, наружная – ось тангажа, расположены три гироблока и три акселерометра, оси чувствительности которых совпадают по направлению с главными центральными осями генерации корпуса ракеты. Таким образом в канале рыскания с выходов датчиков, расположенных на гиросtabilизированной платформе, поступает информация о следующих текущих координатах объекта стабилизации: угловым отклонением $\psi(t)$, угловой скорости $\omega_\psi(t)$ и линейной скорости $w_z(t)$. Выходная информация с датчиков поступает на входы преобразователя аналог – код, а с него – на входы БЦВМ, формирующей в канале рыскания алгоритм стабилизации в виде

$$\sigma_\psi[nT] = k_z \tilde{z}[nT] + k_z \tilde{w}_z[nT] + k_\psi \tilde{\psi}[nT] + k_\psi \tilde{\omega}_\psi[nT]; \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \tilde{w}_z[nT] = a_1 \{w_z[nT] + 2w_z[(n-1)T] + w_z[(n-2)T]\} - \\ - d_1 \tilde{w}_z[(n-1)T] - d_2 \tilde{w}_z[(n-2)T]; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\tilde{z}[nT] = \sum_{j=0}^n \tilde{w}_z[jT]; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}[nT] = a_1 \{\psi[nT] + 2\psi[(n-1)T] + \psi[(n-2)T]\} - \\ - d_1 \tilde{\psi}[(n-1)T] - d_2 \tilde{\psi}[(n-2)T]; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\omega}_\psi[nT] = a_1 \{\omega_\psi[nT] + 2\omega_\psi[(n-1)T] + \omega_\psi[(n-2)T]\} - \\ - d_1 \tilde{\omega}_\psi[(n-1)T] - d_2 \tilde{\omega}_\psi[(n-2)T]; \end{aligned} \quad (7)$$

$$u_{\psi}[nT] = \begin{cases} \sigma_{\psi}[nT] & \text{при } U^* \leq |\sigma_{\psi}[nT]| \leq U^{**}; \\ U^* \text{ sign } \sigma_{\psi}[nT] & \text{при } |\sigma_{\psi}[nT]| < U^*; \\ U^{**} \text{ sign } \sigma_{\psi}[nT] & \text{при } |\sigma_{\psi}[nT]| > U^{**}. \end{cases} \quad (8)$$

Соотношения (4), (6) и (7) представляют собой реализацию цифровых низкочастотных факторов Баттеруорта второго порядка с константами a_1 , d_1 и d_2 , значения которых составляют [3]:

$$a_1 = 0,05445; \quad d_1 = -1,24011; \quad d_2 = 0,45724.$$

Цифровые фильтры Баттеруорта достаточно эффективно осуществляют фильтрацию высокочастотных помех решетчатых функций.

Будем предполагать, что управление ракетой осуществляется путем поворота сопла твердотопливного реактивного двигателя (ТТРД) с помощью электрогидравлического усилителя (ЭГУ), устройство которого приведено в работе [4]. ЭГУ содержит поворотный электромагнит и гидроусилитель. Выходной сигнал БЦВМ в виде решетчатой функции $u_{\psi}[nT]$ поступает на вход преобразователя «код – аналог», а преобразованный аналоговый сигнал $u_{\psi}(t)$, определяемый соотношением

$$u_{\psi}[t] = \begin{cases} u_{\psi}[nT] & \text{при } nT \leq t < (n+1)T; \\ u_{\psi}[(n+1)T] & \text{при } (n+1)T \leq t < (n+2)T, \end{cases} \quad (9)$$

с выхода преобразователя поступает на вход управляющей обмотки электромагнита ЭГУ.

Структурная схема ЭГУ приведена на рис. 1.

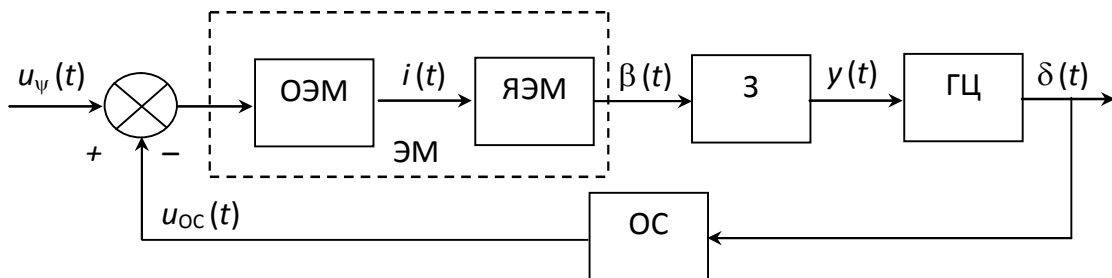


Рисунок 1 – Структурная схема ЭГУ:

ЭМ – электромагнит; ОЭМ – обмотка электромагнита; ЯЭМ – якорь электромагнита; З – золотник ЭГУ; ГЦ – гидроцилиндр; ОС – обратная связь ЭГУ.

Величина тока в обмотке управления определяется дифференциальным уравнением

$$L_y \frac{di(t)}{dt} + r_y i(t) = u_{\psi}(t) - u_{oc}(t), \quad (10)$$

где r_y – активное сопротивление обмотки; L_y – индуктивность обмотки; $u_{oc}(t)$ – сигнал отрицательной обратной связи по отношению оси ТТРД от продольной оси ракеты

$$u_{oc}(t) = k_{oc} \delta(t), \quad (11)$$

где k_{oc} – коэффициент усиления цепи обратной связи.

До обговорення

Момент $m_{\beta}(t)$, создаваемый электромагнитом и приложенный к якорю и связанной с ним заслонке пропорционален величине тока в обмотке якоря

$$m_{\beta}(t) = k_e i(t), \quad (12)$$

где k_e – коэффициент пропорциональности.

Под действием момента (12) заслонка, закрепленная на якоре электромагнита, поворачивается на угол $\beta(t)$, определяемый дифференциальным уравнением

$$I_k \frac{d^2 \beta(t)}{dt^2} + f \frac{d\beta(t)}{dt} + c\beta(t) = m_{\beta}(t), \quad (13)$$

где I_k – момент инерции якоря электромагнита с заслонкой относительно оси поворота; f – коэффициент жидкостного трения в шарнире якоря; c – коэффициент жесткости центрирующей пружины.

Поворот заслонки ЭГУ вызывает перемещение золотника на расстояние $y(t)$ в соответствии с дифференциальным уравнением

$$T_3 \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = k_3 \beta(t), \quad (14)$$

где T_3 – постоянная времени гидроусилителя; k_3 – коэффициент усиления гидроусилителя.

Дифференциальное уравнение возмущенного движения гидроцилиндра, выходной шток которого механически связан с поворотным соплом ТТРД, записывается в виде

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = k_{\Pi} y(t). \quad (15)$$

Рассмотрим передаточные функции каждого из динамических звеньев, образующих в совокупности ЭГУ, структурная схема которого представлена на рис. 1. Передаточная функция управляющей обмотки управления электромагнита записывается

$$W_{oy}(s) = \frac{L\{i(t)\}}{L\{u_{\psi}(t) - u_{oc}(t)\}} = \frac{k_{oy}}{T_{oy}s + 1}, \quad (16)$$

где k_{oy} и T_{oy} – коэффициент усиления и постоянная времени обмотки управления, определяемые соотношениями

$$T_{oy} = \frac{L_y}{r_y}; \quad k_{oy} = \frac{1}{r_y}.$$

Передаточная функция якоря электромагнита может быть записана с учетом соотношения (12) и уравнения (13) в следующем виде

$$W_{я}(s) = \frac{L\{\beta(t)\}}{L\{i(t)\}} = \frac{k_{я}}{T_{1я}^2 s^2 + T_{2я} + 1}, \quad (17)$$

причем коэффициент усиления $k_{я}$ и постоянные времени $T_{1я}$ и $T_{2я}$ равны:

До обговорення

$$k_{\text{я}} = \frac{k_{\text{е}}}{c}; \quad T_{1\text{я}} = \sqrt{\frac{I_{\text{к}}}{c}}; \quad T_{2\text{я}} = \frac{f}{c}.$$

Передаточная функция золотника, в соответствии с уравнением (14), принимает вид

$$W_3(s) = \frac{L\{y(t)\}}{L\{\beta(t)\}} = \frac{k_3}{T_{3\text{я}}s + 1}, \quad (18)$$

а передаточная функция гидроцилиндра, как следует из уравнения (15), записывается

$$W_{\text{ц}}(s) = \frac{L\{\delta(t)\}}{L\{y(t)\}} = \frac{k_{\text{ц}}}{s}, \quad (19)$$

С учетом соотношений (16)–(19) передаточная функция ЭГУ принимает вид

$$W_{\text{ЭГУ}}(s) = \frac{W_{\text{оу}}(s)W_{\text{я}}(s)W_3(s)W_{\text{ц}}(s)}{1 + W_{\text{оу}}(s)W_{\text{я}}(s)W_3(s)W_{\text{ц}}(s)k_{\text{ос}}} = \frac{k_{\text{оу}}k_{\text{я}}k_3k_{\text{ц}}}{\left[(T_{\text{оу}}s + 1)(T_{1\text{я}}^2s^2 + T_{2\text{я}}s + 1)(T_3s + 1)s + k_{\text{оу}}k_{\text{я}}k_3k_{\text{ц}}k_{\text{ос}} \right]}. \quad (20)$$

Значения постоянных времени элементов ЭГУ $T_{\text{оу}}$, $T_{1\text{я}}$, $T_{2\text{я}}$ и T_3 чрезвычайно малы. Поэтому соотношение для передаточной функции ЭГУ (20) можно представить в упрощенном виде

$$W_{\text{ЭГУ}}(s) = \frac{k_{\text{оу}}k_{\text{я}}k_3k_{\text{ц}}}{s + k_{\text{оу}}k_{\text{я}}k_3k_{\text{ц}}k_{\text{ос}}}. \quad (21)$$

Разделим числитель и знаменатель (21) на свободный член знаменателя передаточной функции (21). В результате получаем передаточную функцию ЭГУ в виде

$$W_{\text{ЭГУ}}(s) = \frac{L\{\delta(t)\}}{L\{u_{\psi}(t)\}} = \frac{k_{\text{ЭГУ}}}{T_{\text{ЭГУ}}s + 1}, \quad (22)$$

где коэффициент усиления и постоянная времени ЭГУ определяются соотношениями

$$k_{\text{ЭГУ}} = \frac{1}{k_{\text{ос}}}; \quad T_{\text{ЭГУ}} = \frac{1}{k_{\text{оу}}k_{\text{я}}k_3k_{\text{ц}}k_{\text{ос}}}.$$

Используя соотношение (22) запишем упрощенное дифференциальное уравнение возмущенного движения ЭГУ

$$T_{\text{ЭГУ}} \frac{d\delta(t)}{dt} + \delta(t) = k_{\text{ЭГУ}} u_{\psi}(t). \quad (23)$$

Таким образом дифференциальные уравнения (1), (2) и (23) представляют собой математическую модель непрерывной части замкнутой системы стабилизации твердотопливной ракеты, а соотношения (3)–(9) – математическую модель дискретной части замкнутой системы, структурная схема которой приведена на рис. 2.

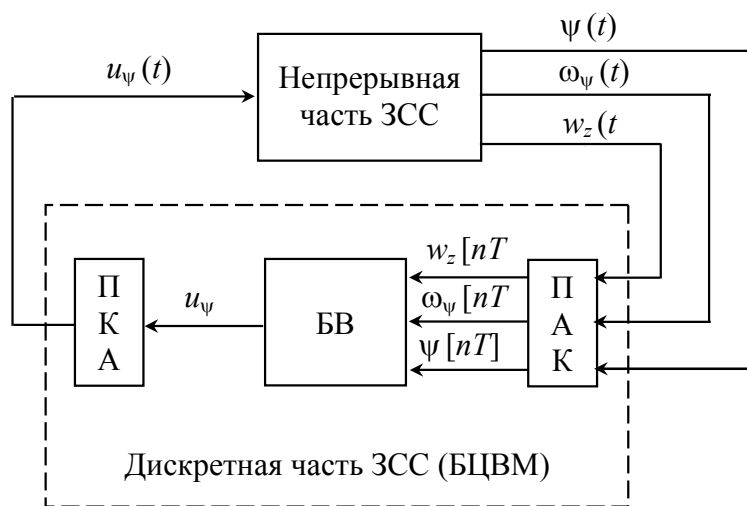


Рисунок 2 – Замкнутая система стабилизации (ЗСС) твердотопливной ракеты:
 БВ – бортовой вычислитель; ПАК – преобразователь «аналог – код»;
 ПКА – преобразователь «код – аналог»

Решение задачи параметрического синтеза состоит в отыскании значений варьируемых констант k_z и $k_{\dot{z}}$, k_ψ и $k_{\dot{\psi}}$ алгоритма стабилизации (3), обеспечивающих высокую точность стабилизации.

Процедура параметрического синтеза. В работе [5] проведено описание разработанного при участии автора алгоритмического метода параметрического синтеза динамической системы, находящейся под действием случайных внешних возмущений с известными стохастическими характеристиками. Метод основан на вычислении математического ожидания интегрального квадратичного функционала, являющегося количественной мерой отклонения текущей траектории движения динамической системы от требуемой траектории её движения. Вычисление функционала осуществляется многократно на решениях математической модели возмущенного движения динамической системы при конкретных реализациях случайной функции внешнего возмущения с последующей оценкой математического ожидания функционала и минимизации его с помощью метода Нелдера–Мида [5], реализованного в программных продуктах Optimization Toolbox и Minimize в интерактивных средах MATLAB и MATHCAD. Метод включает также целенаправленный вектор весовых коэффициентов интегрального квадратичного функционала качества динамической системы.

В отличие от известных ранее методов параметрического синтеза динамических систем метод, изложенный в [5], обладает целым рядом преимуществ, основными из которых являются:

- метод применим для динамических объектов любой сложности – нелинейных, нестационарных, континуальных, с аналоговыми и цифровыми регуляторами;
- метод применим для любых типов внешних возмущений, действующих на динамическую систему, с известными и неизвестными стохастическими характеристиками;
- метод предполагает целенаправленный выбор весовых коэффициентов аддитивного функционала качества функционирования динамической системы.

В работе [6] с помощью алгоритмического метода решена задача параметрического синтеза системы наведения и стабилизации основного вооружения танка и показана его высокая эффективность. Однако поставленная задача параметрического синте-

за цифрового стабилизатора твердопаливної баллістическої ракети має деякі особливості, що складаються в наступному:

- коефіцієнти системи диференціальних рівнянь збуреного руху ракети (1) і (2) неперервно змінюються в широкому діапазоні по мірі вигорання палива і зміни характеристик атмосфери, а метод «заморожених коефіцієнтів», звичайно використовуваний при розробці стабілізаторів баллістических ракет, не має строгого математичного обґрунтування;

- зовнішні збурення від дії вітру на корпус ракети мають дуже широкі амплітудні і частотні спектри, а також неопределенні стохастическі характеристики, що суттєво ускладнює складання імітаційних моделей таких збурень, використовуваних при використанні алгоритмічного методу.

Перше обставина призводить до висновку про те, що при обчисленні інтегрального квадратичного функціонала якості верхній меж інтеграла повинен складати все час руху ракети на активній ділянці траєкторії, а в процесі інтегрування необхідно використовувати табличні дані про значеннях відповідних коефіцієнтів в кожен момент руху ракети.

Друге обставина призводить до висновку про те, що замість складання імітаційної моделі зовнішніх збурень, діючих на корпус ракети в активній фазі польоту, внаслідок відсутності будь-яких апріорних даних про стохастическі характеристики зовнішніх збурень за винятком їх можливих максимальних значень, можна вибрати два шляхи. Перший шлях полягає в заданні тестового збурення, однакового для будь-якого з порівнюваних процесів. Другий шлях полягає в використанні концепції збурено-незбуреного руху А. М. Ляпунова, коли зовнішні збурення взагалі не розглядаються, а обчислення значень функціонала здійснюється при однакових значеннях для кожного варіанта розрахунку початкових умов динамічної системи. При цьому значення функціонала якості, обчислені на рішеннях замкнутої динамічної системи

$$\dot{X}(t) = \Phi[\alpha, X(t)] \quad (24)$$

складає

$$I = V[\alpha, \beta, X(0)], \quad (25)$$

де $X(t)$ – вектор стану системи; α – вектор змінюваних параметрів; β – вектор вагових коефіцієнтів інтегрального квадратичного функціонала

$$I = \int_0^T \left[\sum_{i=1}^q \beta_i^2 x_i^2(t) \right] dt; \quad (26)$$

$V[\alpha, \beta, X(0)]$ – функція Ляпунова динамічної системи [7].

Інтегральний квадратичний функціонал, численне значення якого, обчислене на рішеннях математическої моделі замкнутої цифрової системи стабілізації баллістическої ракети визначає якість процесів стабілізації, зокрема, точність стабілізації, представимо в вигляді

$$I = \int_0^T \left[\beta_1^2 z^2(t) + \beta_2^2 \dot{z}^2(t) + \beta_3^2 \psi^2(t) + \beta_4^2 \dot{\psi}^2(t) \right] dt, \quad (27)$$

де T – тривалість активної ділянки польоту ракети.

До обговорення

Аддитивный функционал (27) представим в виде взвешенной суммы частных функционалов

$$I_z = \int_0^T z^2(t) dt; \quad I_{\dot{z}} = \int_0^T \dot{z}^2(t) dt; \quad (28)$$

$$I_\psi = \int_0^T \psi^2(t) dt; \quad I_{\dot{\psi}} = \int_0^T \dot{\psi}^2(t) dt;$$

$$I = \beta_1^2 I_z + \beta_2^2 I_{\dot{z}} + \beta_3^2 I_\psi + \beta_4^2 I_{\dot{\psi}}. \quad (29)$$

В работе [8] изложена разработанная при участии автора методика выбора весовых коэффициентов аддитивного функционала (29), в соответствии с которой весовые коэффициенты β_i определяются следующими соотношениями

$$\beta_1 = \frac{z_{\max}}{I_z^* \left(\frac{z_{\max}^2}{I_z^*} + \frac{\dot{z}_{\max}^2}{I_{\dot{z}}^*} + \frac{\psi_{\max}^2}{I_\psi^*} + \frac{\dot{\psi}_{\max}^2}{I_{\dot{\psi}}^*} \right)};$$
$$\beta_2 = \frac{\dot{z}_{\max}}{I_{\dot{z}}^* \left(\frac{z_{\max}^2}{I_z^*} + \frac{\dot{z}_{\max}^2}{I_{\dot{z}}^*} + \frac{\psi_{\max}^2}{I_\psi^*} + \frac{\dot{\psi}_{\max}^2}{I_{\dot{\psi}}^*} \right)};$$
$$\beta_3 = \frac{\psi_{\max}}{I_\psi^* \left(\frac{z_{\max}^2}{I_z^*} + \frac{\dot{z}_{\max}^2}{I_{\dot{z}}^*} + \frac{\psi_{\max}^2}{I_\psi^*} + \frac{\dot{\psi}_{\max}^2}{I_{\dot{\psi}}^*} \right)};$$
$$\beta_4 = \frac{\dot{\psi}_{\max}}{I_{\dot{\psi}}^* \left(\frac{z_{\max}^2}{I_z^*} + \frac{\dot{z}_{\max}^2}{I_{\dot{z}}^*} + \frac{\psi_{\max}^2}{I_\psi^*} + \frac{\dot{\psi}_{\max}^2}{I_{\dot{\psi}}^*} \right)}; \quad (30)$$

где $z_{\max}, \dot{z}_{\max}, \psi_{\max}, \dot{\psi}_{\max}$ – максимально возможные значения переменных состояния ракеты в стабилизируемом процессе; $I_z^*, I_{\dot{z}}^*, I_\psi^*, I_{\dot{\psi}}^*$ – минимальные значения частных функционалов (28), полученные при решении задач параметрического синтеза для каждого из частных функционалов (28). Таким образом, для отыскания весовых коэффициентов аддитивного функционала (29) необходимо последовательно решить четыре задачи параметрического синтеза стабилизатора для каждого из частных функционалов (28) и отыскать их минимальные значения $I_z^*, I_{\dot{z}}^*, I_\psi^*$ и $I_{\dot{\psi}}^*$.

Для решения каждой из последовательных задач параметрического синтеза дополнительно к математической модели возмущенного движения замкнутой системы стабилизации (1)–(8), (23) добавляется еще одно дифференциальное уравнение, а именно, уравнение

$$\dot{\gamma}_z(t) = z^2(t) \quad (31)$$

при решении первой из четырех последовательных задач; уравнение

До обговора

$$\dot{\gamma}_{\dot{z}}(t) = \dot{z}^2(t) \quad (32)$$

при решении второй задачи; уравнение

$$\dot{\gamma}_{\psi}(t) = \psi^2(t) \quad (33)$$

при решении третьей задачи и, наконец, уравнение

$$\dot{\gamma}_{\dot{\psi}}(t) = \dot{\psi}^2(t) \quad (34)$$

при решении последней четвертой задачи.

Каждая из четырех последовательных задач решается при одинаковых начальных условиях: $z(0), \dot{z}(0), \psi(0), \dot{\psi}(0), \delta(0)$. Тогда из соотношений (28) и уравнений (31)–(34) имеем

$$\begin{aligned} I_z(k) &= \gamma_z(T, k); & I_{\dot{z}}(k) &= \gamma_{\dot{z}}(T, k); \\ I_{\psi}(k) &= \gamma_{\psi}(T, k); & I_{\dot{\psi}}(k) &= \gamma_{\dot{\psi}}(T, k), \end{aligned} \quad (35)$$

где k – вектор варьируемых констант алгоритма стабилизации

$$k = [k_z, k_{\dot{z}}, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}}]^T.$$

Решение последовательных задач минимизации функций (35) по $k \in G_k$ осуществляется с помощью программного продукта Optimization Toolbox в среде MathLAB или с помощью продукта Minimiz в среде MATCAD. В результате получаем минимальные значения частных функционалов (28). Используя эти значения, вычисляем значения весовых коэффициентов аддитивного функционала (29).

Следующим этапом является решение задачи параметрического синтеза замкнутой системы стабилизации для аддитивного функционала (29). Для этого математическую модель замкнутой системы стабилизации дополним еще одним дифференциальным уравнением

$$\dot{\gamma}(t) = \left[\beta_1^2 z^2(t) + \beta_2^2 \dot{z}^2(t) + \beta_3^2 \psi^2(t) + \beta_4^2 \dot{\psi}^2(t) \right]. \quad (36)$$

Из сопоставления соотношения (29) и уравнения (36) имеем

$$I(k) = \gamma(T, k). \quad (37)$$

Используя указанные выше программные продукты, находим точку $k^* \in G_k$, доставляющую минимум функционалу (27) на множестве G_k допустимых значений варьируемых констант алгоритма стабилизации.

Построение множества G_k в пространстве варьируемых констант алгоритма стабилизации. Задача параметрического синтеза стабилизатора ракеты состоит в отыскании таких значений варьируемых констант алгоритма стабилизации, которые обеспечивают, во-первых, устойчивость замкнутой цифровой системы стабилизации и, во-вторых, доставляют минимум интегральному квадратичному функционалу (27), вычисленному на решениях математической модели возмущенного движения ракеты. Поэтому естественно предположить, что областью G_k является область устойчивости замкнутой системы стабилизации в пространстве возмущенных констант алгоритма стабили-

зации. Вместе с тем, построение области устойчивости замкнутой динамической системы с цифровым регулятором связано со значительными трудностями. Поэтому при построении множества G_k используют обычно линеаризованную непрерывную математическую модель возмущенного движения замкнутой системы стабилизации. Это связано со следующими обстоятельствами.

Во-первых, в соответствии с теоремами А. М. Ляпунова об устойчивости по первому приближению, исходная нелинейная система является устойчивой, если устойчива соответствующая ей линейная система первого приближения. Это означает, что область устойчивости системы первого приближения включает в себя область устойчивости исходной нелинейной системы.

Во-вторых, область устойчивости замкнутой системы стабилизации с цифровым стабилизатором расположена внутри области устойчивости с аналоговым стабилизатором аналогичной структуры. В работе [9] показано, что с ростом величины периода квантования цифрового стабилизатора область устойчивости замкнутой системы сокращается внутрь, оставаясь в границах области устойчивости с большим по величине периодом квантования.

В-третьих, в работах [1, 2] показано, что учет в математической модели замкнутой системы стабилизации постоянных времени исполнительного органа приводит к сокращению области устойчивости замкнутой системы стабилизации ракеты в области высоких частот.

В-четвертых, интегральный квадратичный функционал, под знаком интеграла которого находится знакопостоянная положительная форма компонент вектора состояния замкнутой системы, имеет единственный минимум в области устойчивости замкнутой системы [10].

Резюмируя сказанное, можно сделать вывод о том, что в качестве множества G_k может быть выбрана область устойчивости замкнутой аналоговой системы стабилизации ракеты с безынерционным линейным рулевым приводом. Математическая модель возмущенного движения такой идеализированной ракеты имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \ddot{z}(t) &= a'_{zz} \dot{z}(t) + a_{z\psi} \psi(t) + a_{z\delta} \delta(t); \\ \ddot{\psi}(t) &= a'_{\psi z} \dot{z}(t) + a_{\psi\psi} \psi(t) + a_{\psi\delta} \delta(t); \\ \delta(t) &= k_z z(t) + k_{\dot{z}} \dot{z}(t) + k_{\psi} \psi(t) + k_{\dot{\psi}} \dot{\psi}(t). \end{aligned} \tag{38}$$

Введем в рассмотрение вектор состояния системы (38)

$$X(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \\ x_4(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \psi(t) \\ \dot{\psi}(t) \end{bmatrix}$$

и запишем систему дифференциальных уравнений (38) в нормальной форме Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_2(t); \\ \dot{x}_2(t) &= a'_{zz} x_2(t) + a'_{z\psi} x_3(t) + a_{z\delta} \{ k_z x_1(t) + k_{\dot{z}} x_2(t) + k_{\psi} x_3(t) + k_{\dot{\psi}} x_4(t) \}; \\ \dot{x}_3(t) &= x_4(t); \\ \dot{x}_4(t) &= a'_{\psi z} x_2(t) + a_{\psi\psi} x_3(t) + a_{\psi\delta} \{ k_z x_1(t) + k_{\dot{z}} x_2(t) + k_{\psi} x_3(t) + k_{\dot{\psi}} x_4(t) \}. \end{aligned} \tag{39}$$

До обговорення

В векторно-матричной форме система (39) записывается

$$\dot{X}(t) = A(k)X(t), \quad (40)$$

где собственная матрица замкнутой системы $A(k)$ равна

$$A(k) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{z\delta}k_z & a'_{zz}a_{z\delta}k_z & a_{z\psi} + a_{z\delta}k_\psi & a_{z\delta}k_\psi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ a_{\psi\delta}k_z & a'_{\psi z}a_{\psi\delta}k_z & a_{\psi\psi} + a_{\psi\delta}k_\psi & a_{\psi\delta}k_\psi \end{bmatrix}.$$

Характеристическое уравнение замкнутой системы (40) записывается в виде

$$\det [A(k) - Es] = 0. \quad (41)$$

Подставляя в (41) матрицу $A(k)$ и раскрывая определитель, получаем

$$s^4 - s^3 [a'_{zz} + a_{z\delta}k_z + a_{\psi\delta}k_\psi] + s^2 [Pk_\psi - a_{\psi\psi} - a_{\psi\delta}k_\psi - a_{z\delta}k_z] + s [N + Mk_z + Pk_\psi] + Mk_z = 0, \quad (42)$$

где

$$\begin{aligned} P &= a'_{zz}a_{\psi\delta} - a'_{\psi z}a_{z\delta}; \\ N &= a'_{zz}a_{\psi\psi} - a'_{\psi z}a_{z\psi}; \\ M &= a_{\psi\psi}a_{z\delta} - a_{z\psi}a_{\psi\delta}. \end{aligned} \quad (43)$$

Структурная схема замкнутой системы (38) представлена на рис. 3.

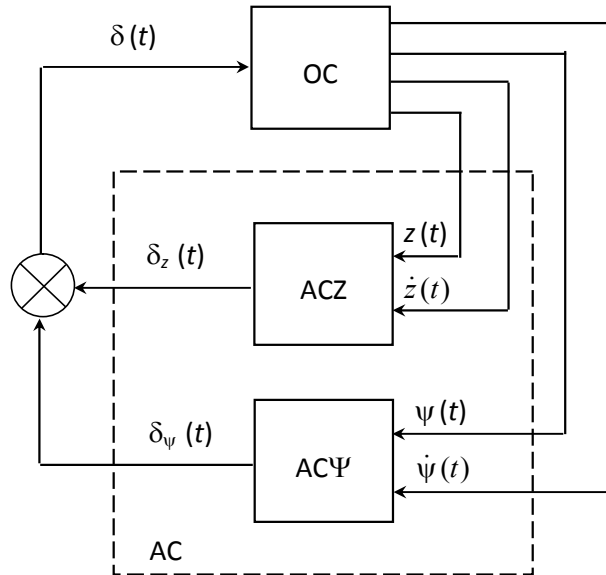


Рисунок 3 – Структурная схема замкнутой системы стабилизации

Автомат стабилизации АС содержит два контура стабилизации – внутренний контур АСЗ по боковому смещению $z(t)$ корпуса ракеты, реализующий закон

$$\delta_z(t) = k_z z(t) + k_z \dot{z}(t); \quad (44)$$

и внешний контур АСЧ по углу отклонения $\psi(t)$ корпуса ракеты, реализующий закон

$$\delta_{\psi}(t) = k_{\psi}\psi(t) + k_{\dot{\psi}}\dot{\psi}(t). \quad (45)$$

Разомкнем внешний контур АС, иными словами, положим $k_{\psi} = 0, k_{\dot{\psi}} = 0$. Тогда из уравнения (42) получаем характеристическое уравнение системы, замкнутой по внутреннему контуру АС

$$s^4 - s^3 [a'_{zz} + a_{z\delta}k_z] + s^2 [-a_{\psi\psi} - a_{z\delta}k_z] + s [N + Mk_z] + Mk_z = 0. \quad (46)$$

Произведем в (46) замену $s = j\omega$, выделим в полученном соотношении действительную и мнимую части, приравняем их нулю. Из полученных уравнений получаем

$$k_z = -\frac{(\omega^2 + a_{\psi\psi})\omega^2}{M + a_{z\delta}\omega^2}; \quad k_z = -\frac{a'_{zz}\omega^2 + N}{M + a_{z\delta}\omega^2}. \quad (47)$$

При изменении ω от нуля до бесконечности соотношения (47) определяют множество G_{kz} в плоскости варьируемых констант k_z, k_z^* . На множестве G_{kz} выберем точку k_z^*, k_z^* и в характеристическом уравнении (42), произведем в нем замену $s = j\omega$, выделим действительную и мнимую части и приравняем их нулю:

$$\begin{aligned} X(\omega, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}}) &= \omega^4 + \omega^2 (a_{\psi\psi} + a_{z\delta}k_z^*) + \omega^2 a_{\psi\delta}k_{\dot{\psi}} + Mk_z^* - \omega^2 Pk_{\dot{\psi}} = 0; \\ Y(\omega, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}}) &= \omega^2 (a'_{zz} + a_{z\delta}k_z^*) + \omega^2 a_{\psi\delta}k_{\dot{\psi}} + N + Mk_z^* + Pk_{\dot{\psi}} = 0. \end{aligned} \quad (48)$$

Из соотношений (48) имеем

$$\begin{aligned} k_{\psi} &= \frac{1}{\omega^2 (a_{\psi\delta}^2 + P^2)} \left\{ \omega^2 a_{\psi\delta} \left[-\omega^4 - \omega^2 (a_{\psi\psi} + a_{z\delta}k_z^*) - Mk_z^* \right] + \right. \\ &\quad \left. + \omega^2 P \left[-\omega^2 (a'_{zz} + a_{z\delta}k_z^*) - (N + Mk_z^*) \right] \right\}; \\ k_{\dot{\psi}} &= \frac{1}{\omega^2 (a_{\psi\delta}^2 + P^2)} \left\{ \omega^2 a_{\psi\delta} \left[-\omega^2 (a'_{zz} + a_{z\delta}k_z^*) - (N + Mk_z^*) \right] + \right. \\ &\quad \left. + P \left[\omega^4 + \omega^2 (a_{\psi\psi} + a_{z\delta}k_z^* + Mk_z^*) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (49)$$

С помощью соотношений (49) при изменении ω от нуля до бесконечности строится граница множества $G_{k\psi}$. Для выделения собственно множества $G_{k\psi}$ используется правило штриховки, для чего вычисляется определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial X(\omega, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}})}{\partial k_{\psi}} & \frac{\partial X(\omega, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}})}{\partial k_{\dot{\psi}}} \\ \frac{\partial Y(\omega, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}})}{\partial k_{\psi}} & \frac{\partial Y(\omega, k_{\psi}, k_{\dot{\psi}})}{\partial k_{\dot{\psi}}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \omega^2 a_{\psi\delta} & \omega^2 P \\ -P & \omega^2 a_{\psi\delta} \end{vmatrix} = \omega^4 a_{\psi\delta}^2 + \omega^2 P^2. \quad (50)$$

Определитель (50) при любых значениях ω положителен, следовательно, перемещаясь вдоль границы множества $G_{k\psi}$ в сторону возрастания ω , границу множества следует штриховать слева. При этом штриховка направлена внутрь множества $G_{k\psi}$.

Множества G_{kz} и $G_{k\psi}$ являются однозначными отображениями множества G_k .

В связи с тем, что значения коэффициентов математической модели (38) изменяются во времени в процессе полета ракеты, изменяется во времени конфигурация множеств G_{kz} и $G_{k\psi}$, а также и множества G_k . Во времени изменяются и значения компонент вектора варьируемых констант $k^* \in G_k$, доставляющие минимум интегральному квадратичному функционалу (27). Поэтому вполне возможна ситуация при которой необходимо изменение вектора варьируемых констант во времени при движении ракеты на активном участке траектории

$$k^*(t) \in G_k(t),$$

что не вызывает особых проблем при использовании БЦВМ, выполненных на современной элементной базе.

Сравнительный анализ процессов стабилизации, представленных на рис. 6 и рис. 7, позволяет сделать вывод о том, что при значениях варьируемых параметров стабилизатора, соответствующих оптимальной точке множества G_k , быстродействие замкнутой системы возрастает; наблюдается некоторое возрастание динамической ошибки по боковому смещению, которая быстро убывает; статическая ошибка по боковому смещению значительно снижается.

Пример. В качестве примера рассмотрим твердотопливную ракету, математическая модель которой в некоторой точке активной фазы полета имеет следующие значения коэффициентов:

$$\begin{aligned} a'_{zz} &= -10 \text{ с}^{-1}; & a_{z\psi} &= -35 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}; & a_{z\delta} &= 4 \text{ м} \cdot \text{с}^{-2}; \\ a'_{\psi z} &= -5 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}^{-1}; & a_{\psi\psi} &= -2 \text{ с}^{-2}; & a_{\psi\delta} &= -1,2 \text{ с}^{-2}. \end{aligned}$$

Максимальные значения компонент вектора состояния в переходном процессе примем равными: $z_{\max} = 1 \text{ м}$; $\dot{z}_{\max} = 0,5 \text{ м} \cdot \text{с}^{-1}$; $\psi_{\max} = 0,1$; $\dot{\psi}_{\max} = 0,2 \text{ с}^{-1}$.

Подмножество G_{kz} , построенное с помощью соотношений (47), представлено на рис. 4, а подмножество $G_{k\psi}$, построенное с помощью соотношений (49) представлено на рис. 5.

Выберем на подмножестве G_{kz} стартовую точку с координатами $k_{z0} = -0,005 \text{ м}^{-1}$ и $k_{\dot{z}0} = -3,5 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}$, а на подмножестве $G_{k\psi}$ стартовую точку с координатами $k_{\psi0} = 40$ и $k_{\dot{\psi}0} = 0,4 \text{ с}$. Используя изложенный выше алгоритм параметрического синтеза, придем к следующим значениям варьируемых параметров стабилизатора, доставляющим минимум аддитивному функционалу (27): $k_z^* = -0,01 \text{ м}^{-1}$; $k_{\dot{z}}^* = -3,8 \text{ м}^{-1} \cdot \text{с}$; $k_{\psi}^* = 42$; $k_{\dot{\psi}}^* = 0,77 \text{ с}$.

Переходные процессы в замкнутой системе стабилизации (1)–(9), (23), построенные при условии $f_z(t) = 0$; $z(0) = 0$; $\psi(0) = 0,1$; $\dot{\psi}(0) = 0$; $\delta(0) = 0$, приведены на рис. 5 и рис. 6, причем процессы на рис. 5 соответствуют значениям варьируемых параметров в стартовой точке, а процессы на рис. 6 – значениям варьируемых параметров в оптимальной точке множества G_k .

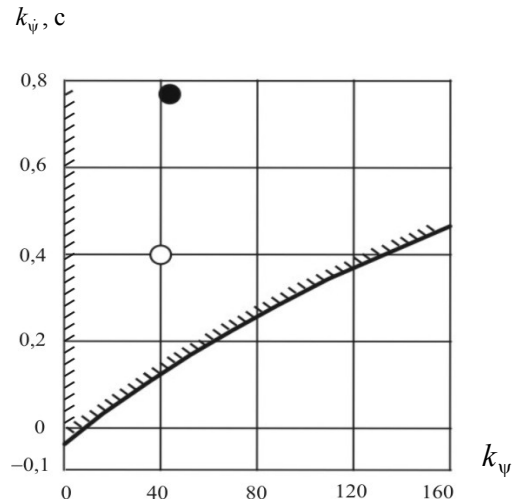
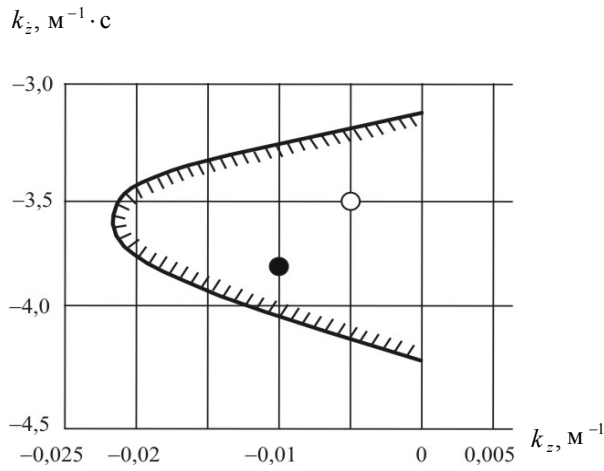


Рисунок 4 – Подмножество G_{kz} :
○ – стартовая точка; ● – оптимальная точка

Рисунок 5 – Подмножество $G_{k\psi}$:
○ – стартовая точка; ● – оптимальная точка

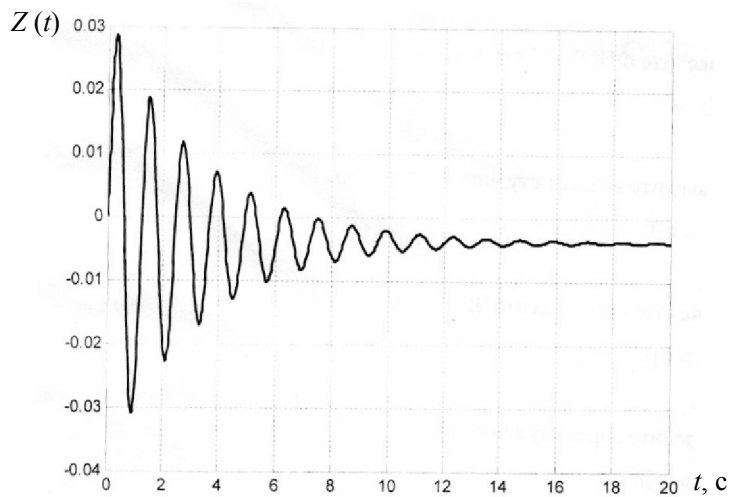
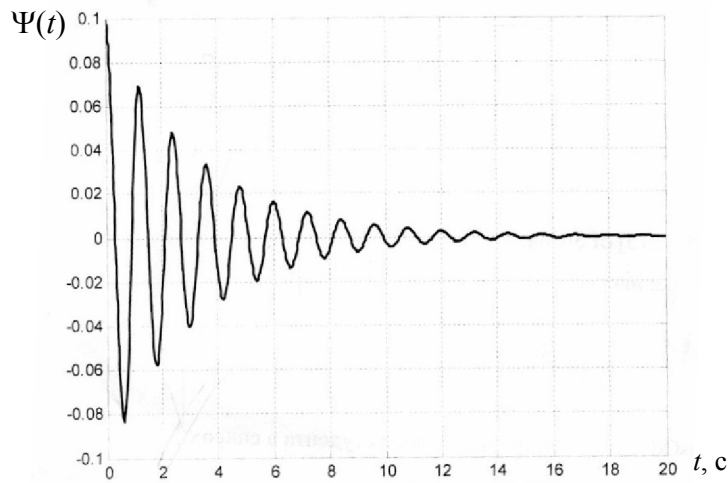
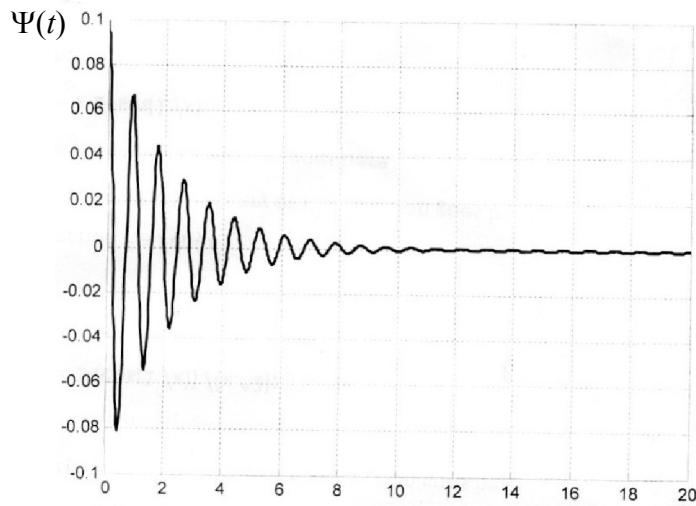


Рисунок 6 – Процессы стабилизации, соответствующие стартовой точке множества G_k



t, с

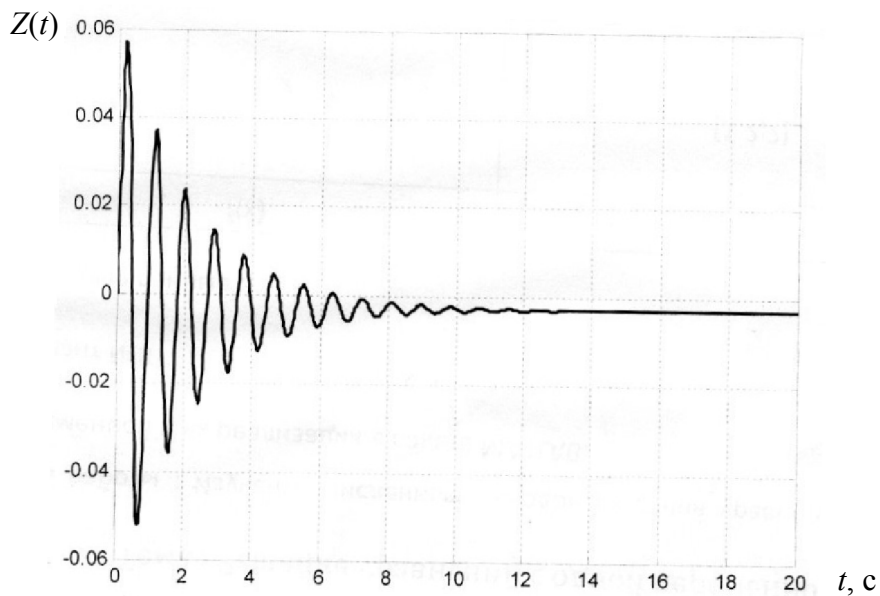


Рисунок 7 – Процессы стабилизации, соответствующие оптимальной точке множества G_k

Выводы и рекомендации. Принятая в отечественном ракетостроении процедура динамического проектирования ракет, в том числе, параметрического синтеза автомата стабилизации с БЦВМ, не может обеспечить возросших требований к точности стрельбы разрабатываемых ракетных комплексов оперативно-тактического назначения.

Предлагаемый метод параметрического синтеза цифрового автомата стабилизации твердотопливной ракеты, основанный на минимизации интегрального квадратичного аддитивного функционала, вычисляемого на решениях математической модели возмущенного движения ракеты с учетом целенаправленного выбора весовых коэффициентов функционала, позволяет повысить точность стабилизации ракеты относительно заданного направления полета и, в конечном итоге, точности стрельбы.

Использование в автомате стабилизации БЦВМ, построенной на современной элементной базе, позволяет реализовать требуемые законы изменения во времени значений констант алгоритма стабилизации.

Литература: 1. Игдалов И. М. Динамическое проектирование ракет / И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун. – Днепропетровск : Изд-во ДНУ, 2010. – 264 с. 2. Игдалов И. М. Ракета как объект управления / И. М. Игдалов, Л. Д. Кучма, Н. В. Поляков, Ю. Д. Шептун. – Днепропетровск : АРТ-Пресс, 2004. – 542 с. 3. Александрова Т. Е. Сравнительный анализ цифровых ПД-стабилизаторов подвижных объектов с низкочастотными фильтрами Баттеруорта и Ланцоша / Т. Е. Александрова, В. А. Кононенко, А. А. Лазаренко // Радиоэлектроника. Информатика. Управління. – 2011. – № 2. – С. 148–152. 4. Александров С. С. Автоматичне керування рухомими об'єктами і технологічними процесами. – Том 2 : Автоматичне керування рухом літальних апаратів / С. С. Александров, С. П. Козлов, Б. І. Кузнєцов. – Харків : НТУ «ХПИ», 2006. – 528 с. 5. Александров Е. Е. Математическое моделирование, системный анализ и синтез динамических систем / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова. – Харьков : НТУ «ХПИ», 2014. – 200 с. 6. Александров Е. Е. Параметрический синтез цифровой системы стабилизации танковой пушки / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова // Проблемы управления и информатики. – 2015. – № 6. – С. 5–20. 7. Александров Е. Е. Автоматизированное проектирование динамических систем с помощью функций Ляпунова / Е. Е. Александров, М. В. Бех. – Харьков : Основа, 1993. – 112 с. 8. Александров Е. Е. Выбор оптимизируемого функционала в задачах параметрического синтеза систем стабилизации / Е. Е. Александров, Т. Е. Александрова // Артиллерийское и стрелковое вооружение. – 2004. – № 2. – С. 23–26. 9. Александрова Т. Е. Построение области устойчивости цифровой системы наведения и стабилизации танковой пушки в плоскости варьируемых констант алгоритма стабилизации / Т. Е. Александрова // Механіка та машинобудування. – 2018. – № 1. – С. 44–52. 10. Александрова Т. Е. О единственности решения задачи параметрического синтеза линейной динамической системы с интегральным квадратичным критерием оптимальности / Т. Е. Александрова // Системи обробки інформації. – 2013. – Вип. 7(114). – С. 116–120.

Bibliography (transliterated): 1. Igdalov I. M. Dinamicheskoye proyektirovaniye raket / I. M. Igdalov, L. D. Kuchma, N. V. Polyakov, YU. D. Sheptun. – Dnepropetrovsk : Izd-vo DNU, 2010. – 264 s. 2. Igdalov I. M. Raketa kak ob"yekt upravleniya / I. M. Igdalov, L. D. Kuchma, N. V. Polyakov, YU. D. Sheptun. – Dnepropetrovsk : ART-Press, 2004. – 542 s. 3. Aleksandrova T. Ye. Sravnitel'nyy analiz tsifrovyykh PD-stabilizatorov podvizhnykh ob"yektov s nizkochastotnymi fil'trami Batteruorta i Lantsosha / T. Ye. Aleksandrova, V. A. Kononenko, A. A. Lazarenko // Radioyelektronika. Īnformatika. Upravlĭnnya. – 2011. – № 2. – S. 148–152. 4. Aleksandrov YE. YE. Avtomatychne keruvannya rukhomymy ob"yektamy i tekhnolohichnymy protsesamy. – Tom 2 : Avtomatychne keruvannya rukhom lital'nykh aparativ / YE. YE. Aleksandrov, YE. P. Kozlov, B. I. Kuznyetsov. – Kharkiv : NTU «KHPI», 2006. – 528 s. 5. Aleksandrov Ye. Ye. Matematicheskoye modelirovaniye, sistemnyy analiz i sintez dinamicheskikh sistem / Ye. Ye. Aleksandrov, T. Ye. Aleksandrova. – Khar'kov : NTU «KHPI», 2014. – 200 s. 6. Aleksandrov Ye. Ye. Parametricheskiy sintez tsifrovoy sistemy stabilizatsii tankovoy pushki / Ye. Ye. Aleksandrov, T. Ye. Aleksandrova // Problemy upravleniya i informatiki. – 2015. – № 6. – S. 5–20. 7. Aleksandrov Ye. Ye. Avtomatizirovannoye proyektirovaniye dinamicheskikh sistem s pomoshch'yu funktsiy Lyapunova / Ye. Ye. Aleksandrov, M. V. Bekh. – Khar'kov : Osnova, 1993. – 112 s. 8. Aleksandrov Ye. Ye. Vybory optimiziruyemogo funktsionala v zadachakh parametricheskogo sinteza sistem stabilizatsii / Ye. Ye. Aleksandrov, T. Ye. Aleksandrova // Artilleriyskoye i strelkovoye vooruzheniye. – 2004. – № 2. – S. 23–26. 9. Aleksandrova T. Ye. Postroyeniye oblasti ustoychivosti

tsifrovoy sistemy navedeniya i stabilizatsii tankovoy pushki v ploskosti var'iruyemykh konstant algoritma stabilizatsii / T. Ye. Aleksandrova // Mekhanika ta mashinobuduvannya. – 2018. – № 1. – S. 44–52. 10. Aleksandrova T. Ye. O yedinstvennosti resheniya zadachi parametricheskogo sinteza lineynoy dinamicheskoy sistemy s integral'nyim kvadratichnym kriteriyem optimal'nosti / T. Ye. Aleksandrova // Sistemi obrobki informatsii. – 2013. – Vip. 7(114). – S. 116–120.

Александрова Т.Е.

**ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВОЙ СИСТЕМЫ СТАБИЛИЗАЦИИ
ТВЕРДОТОПЛИВНОЙ РАКЕТЫ ОПЕРАТИВНО-ТАКТИЧЕСКОГО НАЗНАЧЕНИЯ**

Рассматривается задача отыскания значений варьируемых констант алгоритма стабилизации твердотопливной ракеты средней дальности, совершающий полет в плотных слоях атмосферы в условиях требования высокой точности стабилизации относительно заданной траектории полета.

Александрова Т.Є.

**ПАРАМЕТРИЧНИЙ СИНТЕЗ ЦИФРОВОЇ СИСТЕМИ СТАБІЛІЗАЦІЇ ТВЕР-
ДОПАЛИВНОЇ РАКЕТИ ОПЕРАТИВНО-ТАКТИЧНОГО ПРИЗНАЧЕННЯ**

Розглядається задача відшукування значень варійованих констант алгоритму стабілізації твердопаливної ракети середньої дальності, що виконує політ в щільних шарах атмосфери в умовах вимоги високої точності стабілізації відносно заданої траєкторії польоту.

T. Aleksandrova

**PARAMETRIC SYNTHESIS OF THE DIGITAL SYSTEM OF STABILIZATION
OF THE SOLID-FUEL MISSILES OF OPERATIONAL-TACTICAL APPOINTMENTS**

The problem of finding the values of the variable constants of the stabilization algorithm for a medium-range solid-fuel missile is considered. It performs a flight in dense layers of the atmosphere under conditions requiring high accuracy of stabilization relative to a given flight path.