УДК 534.1:539.3

Ольшанський В.П., д-р. фіз.-мат. наук; Бурлака В.В. канд. техн. наук; Сліпченко М.В., канд. техн. наук

ПРО КОЛИВАННЯ ТІЛА, ЗАКРІПЛЕНОГО НА РЕСОРІ З ПІДРЕСОРНИКОМ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Постановка проблеми. Осцилятори з кусково-лінійною силовою характеристикою поширені в техніці. Це, насамперед, підресорені кузови вантажних автомобілів, механічні передачі з запобіжними муфтами, віброударні механізми з пружними обмежувачами переміщень та інше. В них, поряд з основним, встановлюється додатковий пружний елемент, який включається в роботу при великих деформаціях основного елемента.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Вивченню динаміки таких механічних систем приділялась значна увага з боку дослідників. Для розрахунку частот малих і великих вільних коливань системи з одним ступенем вільності відповідні формули надруковані в довіднику [1]. До перших робіт, в яких різними методами розв'язували задачі вимушених коливань, при дії періодичних сил, відносяться [2-4]. Багато робіт, де при моделюванні коливань в останні роки силові характеристики зводили до кусково-лінійних, увійшли у списки літератури монографічних видань [5-7]. Там же є відповідні літературні огляди, що виключає потребу в додатковому його проведені.

Тут, на відміну від відомих публікацій, розглянуто рух системи з одним ступенем вільності при неперіодичному імпульсному навантаженні.

Метою статті є виведення формул для розрахунку переміщення нелінійного осцилятора та періоду коливань і зусиль в пружних його елементах, спричинених дією силового імпульсу.

Викладення основного матеріалу. Розглянемо спочатку рух осцилятора при дії миттєво прикладеної сили. Його вертикальні переміщення $x(t)$ у часі t описуємо диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1 x + c_2 (x - x_1) \cdot H(x - x_1) = P \cdot H(t), \tag{1}$$

де m – підресорена маса; c_1 – коефіцієнт жорсткості основної ресори; c_2 – коефіцієнт жорсткості підресорника; $x_1 = const$ – значення переміщення (зазор), при якому починається навантаження підресорника; P – величина миттєво прикладеної сили; $H(x - x_1)$, $H(t)$ – одиничні функції Хевісайда; крапка над x означає похідну по t.

Розрахункова схема осцилятора зображена на рис. 1.

Рівняння (1) доповнюємо нульовими початковими умовами:

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Розглянемо перший етап руху на проміжку $t \in [0, t_1]$, коли $x \le x_1$ і деформується тільки ресора. При таких t $H(x - x_1) = 0$, а переміщення осцилятора описується відомим виразом [8]:

© В.П. Ольшанський, 2018

$$x(t)=\frac{P}{c_1}\left[1-\cos\left(\omega_1 t\right)\right], \tag{3}$$

де $\omega_1=\sqrt{c_1/m}$ – частота малих власних коливань.

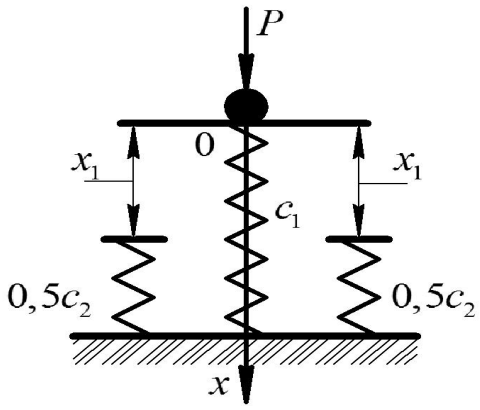

Рисунок 1 – Розрахункова схема

Згідно з (3), максимальне переміщення x_* досягається при $\omega_1 t=\pi/\omega_1$ і становить: $x_*=\dfrac{2P}{c_1}$.

Отже, щоб при $t=t_1<\pi$ відбулося навантаження підресорника повинні виконуватись нерівності:

$$x_*>x_1 \text{ або } P>0{,}5c_1x_1.$$

Тоді деформування підресорника почнеться при

$$t=t_1=\frac{2}{\omega_1}\arcsin\sqrt{\frac{c_1x_1}{2P}}, \tag{4}$$

зі швидкістю:

$$\upsilon_1=\dot{x}(t)=\frac{P\omega_1}{c_1}\sin\left(\omega_1 t_1\right).$$

Цей другий етап руху осцилятора проходить на проміжку часу $t\in\left[t_1;t_2\right]$, причому переміщення $x(t)\ge x_1$ задовольняє рівнянню:

$$m\ddot{x}+\left(c_1+c_2\right)x=P+c_2x_1$$

і початковим умовам:

$$x\left(t_1\right)=x_1;\ \dot{x}\left(t_1\right)=\upsilon_1.$$

Ця задача Коші має аналітичний розв'язок:

$$x(t)=\frac{P+c_2x_1}{c_1+c_2}+\frac{c_1x_1-P}{c_1+c_2}\cos\left(\omega_2\left(t-t_1\right)\right)+\frac{\upsilon_1}{\omega_2}\sin\left(\omega_2\left(t-t_1\right)\right),$$

де $\omega_2 = \sqrt{\dfrac{c_1 + c_2}{m}}$.

Елементарними перетвореннями йому надаємо вигляд:

$$x(t) = B + A\,\mathbf{sin}\left[\omega_2 (t - t_1) + \varphi\right], \tag{5}$$

де $A = \sqrt{\left(\dfrac{c_1 x_1 - P}{c_1 + c_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\upsilon_1}{\omega_2}\right)^2}$; $B = \dfrac{P + c_2 x_1}{c_1 + c_2}$; $\varphi = \mathbf{arctg}\dfrac{(c_1 x_1 - P)\omega_2}{(c_1 + c_2)\upsilon_1}$.

Із (5) випливає, що максимальне відхилення осцилятора від положення $x = 0$, під дією сили P, становить:

$$\mathbf{max}\, x(t) = x(t_*) = A + B.$$

Час його досягнення легко обчислити за формулою:

$$t_* = t_1 + \frac{1}{\omega_2}\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right). \tag{6}$$

При цьому також досить просто знайти максимальні зусилля в основній ресорі $\mathbf{max}\, F_1$ і підресорнику $\mathbf{max}\, F_2$. Вони наступні:

$$\mathbf{max}\, F_1 = c_1 \cdot x(t_*),\ \mathbf{max}\, F_2 = c_2 \cdot \left(x(t_*) - x_1\right). \tag{7}$$

Кінець другого етапу руху настає при:

$$t = t_2 = 2t_* - t_1.$$

При цьому рух проходить зі швидкістю:

$$\upsilon_2 = \dot{x}(t_2) = A\omega_2\,\mathbf{cos}\left[\omega_2 (t_2 - t_1) + \varphi\right].$$

Перший цикл коливань з періодом T завершується третім етапом руху, який описується диференціальним рівнянням:

$$m\ddot{x} + c_1 x = P,$$

з початковими умовами:

$$x(t_2) = x_1;\ \dot{x}(t_2) = \upsilon_2.$$

Ця задача на проміжку $t \in [t_2; T]$ має розв'язок:

$$x(t) = \frac{P}{c_1} + \left(x_1 - \frac{P}{c_1}\right)\mathbf{cos}\left(\omega_1 (t - t_2)\right) + \frac{\upsilon_2}{\omega_1}\mathbf{sin}\left(\omega_1 (t - t_2)\right). \tag{8}$$

Отже, вирази (3), (5) і (8) описують рух осцилятора на першому циклі коливань, що потім легко поширити і на більші t.

Тривалість першого циклу становить $T = 2t_*$ і вона зберігається і для наступних циклів.

З метою апробації виведених формул розглянемо числовий приклад.

Приклад 1. Для проведення розрахунків задаємо: $m=10^3$ кг; $c_1=10^5$ Н/м; $c_2=69\cdot10^3$ Н/м; $P=4\cdot10^3$ Н; $x_1=0{,}03$ м. При таких вихідних даних маємо: $\omega_1=10\ c^{-1}$; $\omega_2=13\ c^{-1}$. Подальший розрахунок дає: $t_1=0{,}131811\ c$; $\upsilon_1=0{,}387298$ м/с; $A=0{,}030374$ м; $B=0{,}035917$ м; $\varphi=-0{,}196063$. Тоді: $\mathbf{max}\,x(t)=0{,}066291$ м і досягається він при $t=t_*=0{,}267723$ с. Максимальні зусилля в пружних елементах становлять: $\mathbf{max}\,F_1=6692{,}1$ Н, $\mathbf{max}\,F_2=2504{,}08$ Н. Розвантаження підресорника відбувається при $t=t_2=0{,}403635$ с, а тривалість першого циклу $T=0{,}535446$ с.

Зазначимо, що період коливань T тут залежить не лише від маси і коефіцієнтів жорсткості ресор осцилятора, а також і від величини прикладеної сили, що властиво нелінійним системам. Так при $P=2\cdot10^3$ Н $T=0{,}59624$ с, а при $P=6\cdot10^3$ Н $T=0{,}51540$ с. Маємо зменшення тривалості одного циклу коливань зі збільшенням сили P.

Далі розглянемо рух осцилятора і визначимо його максимальне переміщення при дії прямокутного силового імпульсу. Позначивши через τ тривалість дії сили $P=const$, будемо розв'язувати диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x}+c_1x+c_2\left(x-x_1\right)\cdot H\left(x-x_1\right)=P\left[H\left(t\right)-H\left(t-\tau\right)\right],$$

при початкових умовах (2).

Його розв'язки залежать від тривалості τ.

1. Припустимо, що тривалість мала і попадає в проміжок $\tau\in\left[0;t_1\right]$, де t_1 визначено (4). Тоді при $t<\tau$ переміщення осцилятора описується виразом (3), а на проміжку $t\in\left[\tau;t_1\right]$ подається відомою формулою [8]:

$$x\left(t\right)=\frac{2P}{c_1}\mathbf{sin}\frac{\omega_1\tau}{2}\cdot\mathbf{sin}\left(\omega_1\left(t-\frac{\tau}{2}\right)\right).$$

В момент часу $t=t_{11}$ повинна виконуватись рівність:

$$\frac{2P}{c_1}\mathbf{sin}\frac{\omega_1\tau}{2}\cdot\mathbf{sin}\left(\omega_1\left(t_{11}-\frac{\tau}{2}\right)\right)=x_1.$$

Звідки випливає, що:

$$t_{11}=\frac{\tau}{2}+\frac{1}{\omega_1}\mathbf{arcsin}\left(\frac{c_1x_1}{2P\,\mathbf{sin}\dfrac{\omega_1\tau}{2}}\right).$$

Це можливо лише за умови:

$$P>\frac{c_1x_1}{2\,\mathbf{sin}\dfrac{\omega_1\tau}{2}}.$$

У супротивному випадку переміщення осцилятора не перевершать x_1 і рух проходитиме без деформування підресорника.

Швидкість руху осцилятора υ_{11} в момент часу $t = t_{11}$ становить:

$$\upsilon_{11} = \frac{2P\omega_1}{c_1}\mathbf{sin}\frac{\omega_1\tau}{2}\cdot\mathbf{cos}\left(\omega_1\left(t_{11}-\frac{\tau}{2}\right)\right).$$

Для аналізу подальших переміщень і визначення $\mathbf{max}\,x(t)$ розв'язуємо диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} + c_1 x + c_2\left(x - x_1\right)\cdot H\left(x - x_1\right) = P\left[H\left(t\right) - H\left(t-\tau\right)\right],$$

при початкових умовах: $x\left(t_{11}\right) = x_1$; $\dot{x}\left(t_{11}\right) = \upsilon_{11}$.

Одержуємо розв'язок:

$$x\left(t\right) = C + D\,\mathbf{sin}\left[\omega_2\left(t - t_{11}\right) + \theta\right],$$

де $C = \dfrac{c_2 x_1}{c_1 + c_2}$; $D = \sqrt{\left(\dfrac{c_1 x_1}{c_1 + c_2}\right)^2 + \left(\dfrac{\upsilon_{11}}{\omega_2}\right)^2}$; $\theta = \mathbf{arctg}\dfrac{c_1 x_1 \omega_2}{\left(c_1 + c_2\right)\upsilon_{11}}$.

У відповідності з цим розв'язком максимальне відхилення осцилятора від положення $x = 0$ становить:

$$\mathbf{max}\,x\left(t\right) = x\left(t_{1*}\right) = C + D\,,$$

причому

$$t_{1*} = t_1 + \frac{1}{\omega_2}\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right).$$

Обчисливши $\mathbf{max}\,x(t)$, потім легко по формулах (7) знайти і максимальні зусилля в ресорі та підресорнику.

2. У випадку дії імпульсу «середньої тривалості» $\tau \in \left[t_1; t_*\right]$, де t_1 і t_* визначаються формулами (4) і (6), переміщення осцилятора на проміжку $t \in \left[0; t_1\right]$ описуються виразом (3). Для їх обчислення на проміжку $t \in \left[t_1; \tau\right]$ маємо розв'язок (5), згідно з яким:

$$\begin{aligned} x\left(\tau\right) &= x_{21} = B + A\,\mathbf{sin}\left[\omega_2\left(\tau - t_1\right) + \varphi\right]; \\ \dot{x}\left(\tau\right) &= \upsilon_{21} = A\omega_2\,\mathbf{cos}\left[\omega_2\left(\tau - t_1\right) + \varphi\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Щоб знайти $\mathbf{max}\,x(t)$ і час його досягнення розв'язуємо рівняння (9) при початкових умовах (10). Одержуємо:

$$x\left(t\right) = S + Q\,\mathbf{sin}\left[\omega_2\left(t - \tau\right) + \psi\right],$$

де $S=\dfrac{c_2x_1}{c_1+c_2}$; $Q=\sqrt{\left(x_{21}-S\right)^2+\left(\dfrac{\upsilon_{21}}{\omega_2}\right)^2}$; $\psi=\mathbf{arctg}\dfrac{\left(x_{21}-S\right)\omega_2}{\upsilon_{21}}$.

Тоді

$$\mathbf{max}\,x\left(t\right)=x\left(t_{2*}\right)=S+Q. \tag{11}$$

Цей максимум досягається в момент часу $t=t_{2*}=\tau+\dfrac{1}{\omega_2}\left(\dfrac{\pi}{2}-\psi\right)$.

Для обчислення максимальних зусиль в ресорі та підресорнику в формули (7) треба підставити (11).

3. Третій варіант руху маємо при дії «порівняно тривалого імпульсу», коли $\tau>t_*$. В цьому випадку зберігають чинність розрахункові формули (3), (5), (7) і (8), виведені для миттєво прикладеної сили, або так званого ступінчастого імпульсу. Тому заново будувати формул не треба, якщо обмежитись дослідженням руху при $t\le\tau$. Для цих t прямокутні імпульси дають такий же динамічний ефект, як і ступінчастий імпульс.

Для ілюстрації можливостей одержаних розв'язків розглянемо числові приклади.

Приклад 2. Зберігаючи вказані вище вихідні дані, припустимо, що тривалість дії сили $P=4\cdot10^3$ Н обмежена і становить $\tau=0{,}1$ *с*. Для такого короткого імпульсу маємо: $t_{11}=0{,}139817$ *с*; $\upsilon_{11}=0{,}238962$ м/с; $C=0{,}012249$ м; $D=0{,}025554$ м; $\theta=0{,}767959$. Максимальне переміщення $x\left(t_{1*}\right)=0{,}037803$ м досягається при $t_{1*}=0{,}201574$ с. Максимальні зусилля в ресорі та підресорнику мають значення: $\mathbf{max}\,F_1=3780{,}3$ Н, $\mathbf{max}\,F_2=538{,}4$ Н. Ці максимуми значно менші, ніж ті що отримані в прикладі 1.

Приклад 3. З'ясуємо, як зміняться результати, одержані в попередньому прикладі, при збільшенні в два рази тривалості імпульсу, коли $\tau=0{,}2$ *с*. При такій тривалості значення t_1, A, B, φ залишаються тими, що в прикладі 1. Для них: $x_{21}=0{,}055260$ м; $\upsilon_{21}=0{,}304437$ м/с. Подальші обчислення дають: $S=0{,}012249$ м; $Q=0{,}048973$ м; $\psi=1{,}072208$; $x\left(t_{2*}\right)=0{,}061222$ м; $t_{2*}=0{,}238353$ с; $\mathbf{max}\,F_1=6122{,}2$ Н; $\mathbf{max}\,F_2=2154{,}3$ Н. Внаслідок подвоєння τ суттєво збільшились переміщення і зусилля в осциляторі, але вони залишилися меншими тих, що прикладі 1.

Висновки. 1. Встановлено, що задача руху осцилятора з кусково-лінійною силовою характеристикою пружності при імпульсному силовому навантаженні має точний аналітичний розв'язок в елементарних функціях. Його побудовано в роботі.

2. Розрахунками показано, що тривалість прямокутного імпульсу суттєво впливає на переміщення і зусилля в пружних елементах осцилятора.

3. Із прямокутних імпульсів сталої висоти найбільш небезпечний імпульс, у якого тривалість τ дорівнює t_*. Він призводить до найбільших амплітуд вільних коливань, після розвантаження осцилятора, а під час дії дає такий же динамічний ефект як і ступінчастий імпульс.

Література: ***1.*** *Вибрации в технике: Справочник в 6-ти томах. – М. : Машиностроение, 1979. – Т.2. Колебания нелинейных механических систем. – 351 с.* ***2.*** *Лурье А. И. Вынужденные колебания в нелинейной системе с характеристикой из двух прямолинейных отрезков / А. И. Лурье, А. И. Чекмарев // Прикладная математика и механика. Т.1. В.3 –1938. –С. 307-324.* ***3.*** *Ден-Гартог Дж.П. Механические колебания / Дж.П. Ден-Гартог. – Москва: Гос. издат. физмат. л-ры, 1960. – 580 с.* ***4.*** *Боголюбов Н. Н. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний / Н. Н. Боголюбов, Ю. А. Митропольский. – Москва: Наука, 1974. – 504 с.* ***5.*** *Аврамов К. В. Нелинейная динамика упруих систем / К. В. Аврамов, Ю. В. Михлин. – Моска-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2015. Т.1.– 716 с.* ***6.*** *Ларин А. А. Очерки истории развития теории механических колебаний / А.А. Ларин. Севастополь: Вебер, 2013. – 403 с.* ***7.*** *Шатохин В. М. Анализ и параметрический синтез нелинейных силових передач машин. Харьков: НТУ «ХПИ», 2008. – 456 с.* ***8.*** *Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара / Я. Г. Пановко. – Ленинград: Машиностроение, 1976. – 320 с.*

Bibliography (transliterated): ***1.*** *Vibratsii v tehnike: Spravochnik v 6-ti tomah. – M.: Mashinostroenie, 1979. – T.2. Kolebaniya nelineynyih mehanicheskih sistem. – 351 s.* ***2.*** *Lure A.I. Vyinuzhdennyie kolebaniya v nelineynoy sisteme s harakteristikoy iz dvuh pryamolineynyih otrezkov / A.I. Lure, A.I. Chekmarev // Prikladnaya matematika i mehanika. T.1. V.3 –1938. –S. 307-324.* ***3.*** *Den-Gartog Dzh.P. Mehanicheskie kolebaniya / Dzh.P. Den-Gartog. – Moskva: Gos. izdat. fiz-mat. l-ryi, 1960. – 580 s.* ***4.*** *Bogolyubov N.N. Asimptoticheskie metodyi v teorii nelineynyih kolebaniy / N.N. Bogolyubov, Yu.A. Mitropolskiy. – Moskva: Nauka, 1974. – 504 s.* ***5.*** *Avramov K.V. Nelineynaya dinamika upruih sistem / K.V. Avramov, Yu.V. Mihlin. – Moska-Izhevsk: Institut kompyuternyih issledovaniy, 2015. T.1.– 716 s.* ***6.*** *Larin A.A. Ocherki istorii razvitiya teorii mehanicheskih kolebaniy / A.A. Larin. Sevastopol: Veber, 2013. – 403 s.* ***7.*** *Shatohin V.M. Analiz i parametricheskiy sintez nelineynyih silovih peredach mashin. Harkov: NTU «HPI», 2008. – 456 s.* ***8.*** *Panovko Ya.G. Osnovyi prikladnoy teorii kolebaniy i udara / Ya.G. Panovko. – Leningrad: Mashinostroenie, 1976. – 320 s.*

Ольшанський В.П., Бурлака В.В., Сліпченко М.В.

ПРО КОЛИВАННЯ ТІЛА, ЗАКРІПЛЕНОГО НА РЕСОРІ З ПІДРЕСОРНИКОМ ПРИ ІМПУЛЬСНОМУ НАВАНТАЖЕННІ

Розглянуто вимушені коливання осцилятора з пружною характеристикою у вигляді відрізків двох прямих при силовому імпульсному навантаженні. Визначено умови, при яких крім основної ресори, деформується і додаткова ресора (підресорник). Виведено замкнуті формули для обчислення переміщення тіла (зосередженої маси) в часі і періоду її коливань.

Ольшанский В.П., Бурлака В.В., Слипченко М.В.

О КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА, ЗАКРЕПЛЕННОГО НА РЕССОРЕ С ПОДРЕССОРНИКОМ ПРИ ИМПУЛЬСНОЙ НАГРУЗКЕ

Рассмотрены вынужденные колебания осциллятора с упругой характеристикой в виде отрезков двух прямых при силовой импульсной нагрузке. Определены условия, при которых кроме основной рессоры, деформируется и дополнительная рессора (подрессорник). Выведены замкнутые формулы для вычисления перемещения тела (сосредоточенной массы) во времени и периода ее колебаний.

V. Olshanskiy, V. Burlaka, M. Slipchenko

ON THE OSCILLATION OF A BODY FIXED ON SPRING WITH A SUB-SPRINGS, WITH A PULSED LOAD

The forced oscillations of an oscillator with an elastic characteristic in the form of segments of two lines with a force impulse load are considered. Conditions are defined under which, besides the main spring, the additional spring (sub-springs) is deformed. Closed formulas are derived for calculating the displacement of a body (concentrated mass) in time and the period of its oscillations.