

Прикладна механіка

УДК 534.1:539.3

Ольшанський В.П., д-р фіз.-мат. наук; Ольшанський С.В., канд. фіз.-мат. наук

ДЕФОРМУВАННЯ ІМПУЛЬСОМ БАЛКИ, ОДНОБІЧНО ПІДКРІПЛЕНОЇ ПРУЖНОЮ ОПОРОЮ

Вступ. Балки, підкріплені проміжними опорами, поширені на практиці, як елементи конструкцій. Їх розрахункам на міцність приділялась значна увага. Це в першу чергу стосується дії на них рухомих навантажень [1-4], де при моделюванні коливань використовували інтегральні та інтегро-диференціальні рівняння. У названих роботах припускали варіант двобічного контакту балки з опорою, коли пружна опора піддається як стисканню так і розтягу. Тут розглянемо варіант однобічного контакту, при якому балка лише стискає опору, а потім відстає від неї, що вносить певні зміни в динамічний процес. Зазначимо, що велика кількість задач про коливання балок без проміжних опор, при різних динамічних навантаженнях, розв'язана в [5].

Метою статті є дослідження впливу пружної дискретної опори, як однобічної в'язі, на деформування підкріпленої нею балки при імпульсному навантаженні системи з несиметричного пружною характеристикою.

1. Розглядаємо спочатку варіант рівномірного розподілу силового імпульсу по балці. Для конкретності беремо балку з шарнірно-обпертими кінцями та пружною опорою в середині прольоту.

Викладання основного матеріалу. Вертикальні переміщення балки $y(x, t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$EJ \frac{\partial^2 y}{\partial x^4} + \rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = q\delta(t) - \frac{c}{2} [1 + \text{sign}(Y(t))] Y(t) \delta\left(x - \frac{l}{2}\right), \quad (1)$$

де $Y(t) = y\left(\frac{l}{2}, t\right)$; EJ – згинальна жорсткість балки; ρF – її погонна маса; c – коефіцієнт жорсткості опори; l довжина балки; q – стала інтенсивність розподілу імпульсу по довжині; t – час; $x \in [0; l]$; $\delta(t)$, $\delta\left(x - \frac{l}{2}\right)$ – дельта функції.

Розрахункова схема балки зображена на рисунку 1.

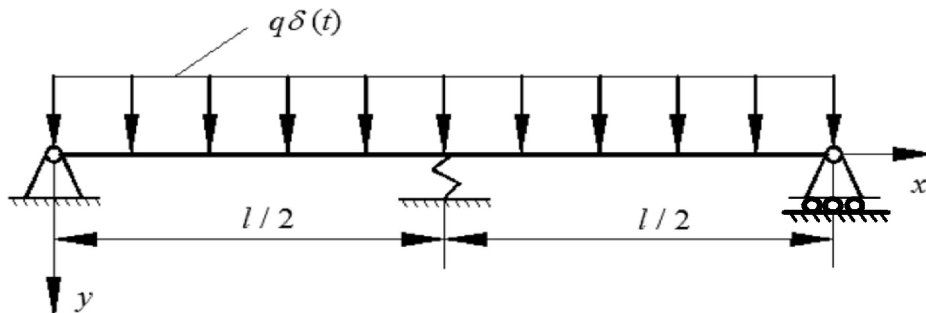


Рисунок 1 – Розрахункова схема

Розв'язок рівняння (1) подаємо у вигляді ряду:

$$y(x,t) = \sum_{k=1,3,5,\dots} f_k(t) \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2)$$

Розглянемо перший етап руху, коли $Y(t) \geq 0$. Підставивши (2) в (1), отримуємо диференціальні рівняння:

$$\frac{d^2 f_k}{dt^2} + \omega_k^2 f_k = \frac{2}{\rho Fl} \left[\frac{2ql}{k\pi} \delta(t) - cY(t) \sin \frac{k\pi}{2} \right], \quad (3)$$

де $\omega_k = \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \sqrt{\frac{EJ}{\rho F}}$ – власні частоти згинальних коливань балки без проміжної опори.

Розв'язуючи (3), при нульових початкових умовах:

$$f_k(0) = 0; \quad \left. \frac{df_k}{dt} \right|_{t=0} = 0,$$

знаходимо $f_k(t)$, що, після підстановки їх в (2), дає в перерізі $x = \frac{l}{2}$:

$$Y(t) = \frac{2}{\rho Fl} \sum_{k=1,3,5,\dots} \left[\frac{2ql}{k\pi\omega_k} \sin(\omega_k t) - \frac{c}{\omega_k} \sin \frac{k\pi}{2} \int_0^t Y(u) \sin(\omega_k(t-u)) du \right] \sin \frac{k\pi}{2}. \quad (4)$$

Це інтегральне рівняння можна розв'язувати різними методами. Із числових поширених метод [4, 6, 7], де проміжок часу $[0;t]$ розбивають на n ділянок і на кожній з них приймають сталим $Y(t)$. Таке спрощення перетворює (4) у рекурентне співвідношення:

$$\begin{aligned} Y_s \left[1 + \frac{4c}{\rho Fl} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin^2(\omega_k \tau / 2)}{\omega_k^2} \right] &= \frac{4q}{\pi \rho F} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin(\omega_k s \tau)}{k\omega_k} \sin \frac{k\pi}{2} - \\ &- \frac{4c}{\rho Fl} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin(\omega_k \tau / 2)}{\omega_k^2} \left[\sin(\omega_k s \tau) \sum_{\substack{m=1 \\ (s>1)}}^{s-1} Y_m \cos \left(\omega_k \left(m - \frac{1}{2} \right) \tau \right) - \right. \\ &\left. - \cos(\omega_k s \tau) \sum_{\substack{m=1 \\ (s>1)}}^{s-1} Y_m \sin \left(\omega_k \left(m - \frac{1}{2} \right) \tau \right) \right], \end{aligned} \quad (5)$$

де $\tau = t/n$, Y_m – сталі значення $Y(t)$ на m -ій ділянці; обчислення сум по m починається з $s = 2$, а їх можна накопичувати в ході розрахунку.

Задаючи послідовно $s = 1, 2, \dots, n$, за допомогою (5), одержуємо дискретну множину Y_1, Y_2, \dots, Y_n , причому $Y_n = Y(t)$.

Поряд з викладеним способом числовий розв'язок рівняння (4) можна будувати з використанням кусково-лінійної апроксимації $y(t)$. Такий метод виявився ефектив-

ним при розв'язанні задач удару [3, 8, 9]. Але він призводить до більш складного рекурентного співвідношення. Тому замість нього розглянемо наближений аналітичний спосіб, що ґрунтується на методі ітерацій. Для цього використаємо допоміжну систему з одним ступенем вільності, переміщення якої $Y_*(t)$ описуємо диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 Y_*}{dt^2} + \Omega^2 Y_* = \frac{2q}{\pi \lambda \rho F} \delta(t), \quad (6)$$

де $\Omega = \sqrt{\frac{c_\delta + c}{\lambda \rho F l}}$; $\lambda = \frac{1}{2}$; $c_\delta = \frac{\pi^4 EJ}{2l^3}$.

При нульових початкових умовах рівняння (6) має розв'язок:

$$Y_*(t) = \frac{2q}{\pi \lambda \rho F \Omega} \sin(\Omega t), \quad (7)$$

який підставимо в (4). Враховуючи, що для пружної опори $\omega_1 < \Omega < \omega_3$ та інтеграл:

$$S_k(t) = \int_0^t \sin(\Omega u) \sin(\omega_k(t-u)) du = \frac{1}{\Omega^2 - \omega_k^2} (\Omega \sin(\omega_k t) - \omega_k \sin(\Omega t)),$$

після підстановки одержуємо:

$$Y(t) \approx Y_{**}(t) = \frac{4q}{\pi \rho F} \sum_{k=1,3,\dots} \left[\frac{1}{k} \sin(\omega_k t) - \frac{2c \sin(k\pi/2)}{\rho F l \Omega} S_k(t) \right] \frac{\sin(k\pi/2)}{\omega_k}. \quad (8)$$

Якщо в цьому ряді утримувати лише перший доданок при обчисленні $Y_{**}(t)$, то матимемо рівність $Y_{**}(t) = Y_*(t)$.

Коли жорсткість проміжної опори не дуже велика, то вираз (8) забезпечує задовільне визначення $Y(t)$. У разі потреби більш високої точності обчислення $Y(t)$, його можна уточнити підстановкою (8) в (4). Така операція дає:

$$Y(t) \approx \frac{4q}{\pi \rho F} \sum_{k=1,3,\dots} \left[\frac{1}{k} \sin(\omega_k t) - \frac{2c}{\rho F l} \sin\left(\frac{k\pi}{2}\right) A_k(t) \right] \frac{\sin(k\pi/2)}{\omega_k}, \quad (9)$$

де $A_k = \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin(n\pi/2)}{\omega_n} \left[\frac{1}{n} - \frac{2c \sin(n\pi/2)}{\rho F l (\Omega^2 - \omega_n^2)} \right] \Phi_{nk}(t) + \frac{2c \cdot \omega_n S_k(t)}{\rho F l \Omega (\Omega^2 - \omega_n^2)}$;

$$\Phi_{nk}(t) = \begin{cases} \frac{1}{\omega_n^2 - \omega_k^2} (\omega_n \sin(\omega_k t) - \omega_k \sin(\omega_n t)) & n \neq k \\ \frac{1}{2\omega_k} (\sin(\omega_k t) - \omega_k t \cos(\omega_k t)) & n = k. \end{cases} \quad \text{при}$$

Тут доводиться наближено знаходити суму подвійного ряду. Друге наближення $Y_{**}(t)$ (8) формально переходить у третє наближення (9), коли замінити в (8) множник $(S_k(t)/\Omega)$ на A_k .

Перший етап руху, при якому $Y(t) \geq 0$, проходить на проміжку $t \in [0; t_*]$. Його права межа є коренем рівняння:

$$Y(t_*) = 0.$$

В цей момент часу переміщення балки і швидкості руху, згідно з (2), становлять:

$$y(x, t_*) = \sum_{k=1,3,\dots} f_k(t_*) \sin \frac{k \pi x}{l}; \quad \dot{y}(x, t_*) = \sum_{k=1,3,\dots} \dot{f}_k(t_*) \sin \frac{k \pi x}{l}.$$

Тут $f_k(t_*) = \frac{4q}{\pi \rho F \omega_k} \left[\frac{1}{k} \sin(\omega_k t_*) - \frac{2c}{\rho F l} \sin \frac{k \pi}{2} A_k(t_*) \right];$

$$\dot{f}_k(t_*) = \frac{4q}{\pi \rho F} \left[\frac{1}{k} \cos(\omega_k t_*) - \frac{2c}{\rho F l \omega_k} \dot{A}_k(t_*) \right],$$
 де крапкою позначена похідна по t .

На другому етапі руху, де $Y < 0$, переміщення балки подається виразом:

$$y(x, t) = \sum_{k=1,3,\dots} \left[a_k \cos(\omega_k(t-t_*)) + b_k \sin(\omega_k(t-t_*)) \right] \sin \frac{k \pi x}{l},$$

де $a_k = f_k(t_*); \quad b_k = \frac{1}{\omega_k} \dot{f}_k(t_*).$

Над опорою, по середині прольоту, маємо:

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) = \sum_{k=1,3,\dots} \left[a_k \cos \omega_k(t-t_*) + b_k \sin \omega_k(t-t_*) \right] \sin \frac{k \pi}{2}. \quad (10)$$

Використовуючи ряд (10), можна знайти максимальне переміщення балки вгору над опорою $\max y(l/2, t)$ і час, коли воно настає. Розрахунок значно спрощується, якщо наближено моделювати рух балки системою з одним ступенем вільності. При такому підході:

$$y\left(\frac{l}{2}, t\right) \approx y_*\left(\frac{l}{2}, t\right) = \frac{v_0}{\omega_1} \sin \omega_1(t-t_*),$$

причому, згідно з (7), $v_0 = \frac{2q}{\pi \lambda \rho F} \cos(\Omega t_*) = -\frac{2q}{\pi \lambda \rho F}.$

Тоді, наближено, амплітудні відхилення балки вниз і вгору становлять відповідно:

$$\max Y_*(t) = \frac{2q}{\pi \lambda \rho F \Omega}; \quad \max \left| y_*\left(\frac{l}{2}, t\right) \right| = \frac{2q}{\pi \lambda \rho F \omega_1},$$

а їх відношення дорівнює:

$$\eta = \frac{\max \left| y_* \left(\frac{l}{2}, t \right) \right|}{\max Y_*(t)} = \frac{\Omega}{\omega_1} > 1. \quad (11)$$

Отже, амплітудне відхилення балки вгору над опорою, при її вільних коливаннях, більше, ніж амплітудне переміщення середини балки вниз, куди був спрямований імпульс, що є проявом ефекту несиметрії пружної характеристики системи відносно положення рівноваги.

Щоб переконатись, що одержана нерівність має місце і при більш точному розв'язанні задачі, проведемо числові розрахунки з використанням рядів.

Для проведення розрахунків приймаємо: $EJ = 1,2 \cdot 10^6$ Па·м⁴; $\rho F = 13,7$ кг/м (двотавр № 14); $l = 5$ м, $q = 20$ Нс/м, і різні значення коефіцієнта c . Обчислені $Y_{**}(t)$ і $Y(t)$, з утриманням різної кількості членів K в рядах (8) і (9), записано в табл. 1. Вони відповідають значенню $c = 4 \cdot 10^5$ Н/м.

Таблиця 1 – Значення $Y(t)$ при різних K і t , обчислені по (8) і (9)

$10^2 t, c$	$K = 5$		$K = 10$		$K = 100$	
	$10^3 Y_{**}, m$	$10^3 Y, m$	$10^3 Y_{**}, m$	$10^3 Y, m$	$10^3 Y_{**}, m$	$10^3 Y, m$
0,1	1,384	1,386	1,378	1,380	1,381	1,383
0,5	8,851	8,867	8,832	8,848	8,834	8,850
0,9	11,51	11,56	11,51	11,56	11,51	11,56
1,3	9,682	9,660	9,656	9,633	9,656	9,633
1,7	5,251	5,180	5,239	5,167	5,238	5,167

Спостерігається досить швидка збіжність рядів по K у розв'язках (8) і (9), причому друге наближення $Y_{**}(t)$ мало відрізняється від третього наближення $Y(t)$.

Для порівняння в табл. 2 вказано значення $Y_*(t)$, до якого призводить формула (7), а також $Y_r(t)$, одержані з використанням (5). У формулі (5) задавали $n = 2000$.

Таблиця 2 – Значення $Y_*(t)$ і $Y_r(t)$, обчислені по (7) і (5)

$10^2 t, c$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 10$	$K = 100$
	$10^3 Y_*, m$	$10^3 Y_r, m$	$10^3 Y_*, m$	$10^3 Y_r, m$
0,1	1,851	1,386	1,380	1,383
0,5	8,343	8,877	8,858	8,860
0,9	11,57	11,60	11,60	11,60
1,3	10,26	9,759	9,734	9,734
1,7	4,932	5,335	5,324	5,323

Розрахунки підтверджують швидку збіжність рядів по K і в формулі (5). Наближені числовий і аналітичний розв'язки інтегрального рівняння (4) дають близькі результати.

Розраховані прогини балки в перерізах $x = l/2$ (над опорою) і $x = l/4$ при $c = 10^5$ Н/м і попередніх інших числових даних, у вигляді графіків, подано на рис. 2.

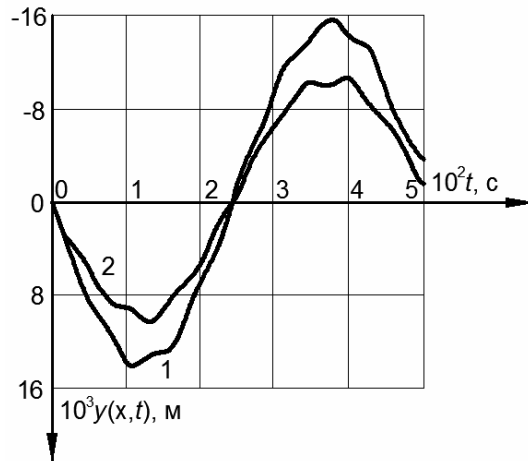


Рисунок 2 – Графіки $y(x,t)$: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; $c = 10^5$ Н/м

На рис. 3 зображено аналогічні графіки, одержані при $c = 8 \cdot 10^5$ Н/м.

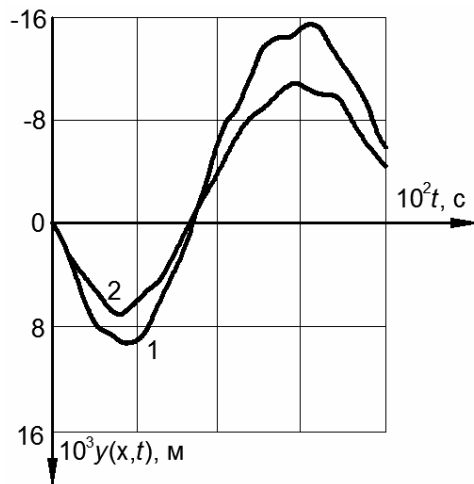


Рисунок 3 – Графіки $y(x,t)$: 1 – $x = l/2$; 2 – $x = l/4$; $c = 8 \cdot 10^5$ Н/м

В обох випадках амплітудні прогини балки у напрямі протилежному імпульсу, більші за переміщення у напрямі дії імпульсу, тобто $\eta > 1$. Цей ефект більш чітко проявляється при зростанні жорсткості опори на рис. 3.

2. Вище розглядали динамічне деформування балки імпульсом, рівномірно розподіленим по її довжині. Щоб перевірити, чи виконується нерівність (11) для інших варіантів розподілу навантаження, припустимо, що воно описується виразом:

$$q(x,t) = q_0 \sin \frac{\pi x}{l} \delta(t),$$

де q_0 – максимальне значення інтенсивності імпульсу.

Для нього, замість (4), отримуємо інтегральне рівняння:

$$Y(t) = \frac{2}{\rho Fl} \left[\frac{q_0 l}{2\omega_1} \sin(\omega_1 t) - c \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{\omega_k} \int_0^t Y(u) \sin(\omega_k(t-u)) du \right], \quad (12)$$

яке теж можна наближено розв'язувати різними методами.

Якщо, по аналогії з попереднім, використати кусково сталу апроксимацію $Y(u)$, то одержимо рекурентне співвідношення:

$$Y_s \left[1 + \frac{4c}{\rho F l} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin^2(\omega_k \tau / 2)}{\omega_k^2} \right] = \frac{q_0}{\rho F \omega_1} \sin(\omega_1 s \tau) - \frac{4c}{\rho F l} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{\sin(\omega_k \tau / 2)}{\omega_k^2} \times \left[\sin(\omega_k s \tau) \sum_{\substack{m=1 \\ (s>1)}}^{s-1} Y_m \cos\left(\omega_k \left(m - \frac{1}{2}\right) \tau\right) - \cos(\omega_k s \tau) \sum_{\substack{m=1 \\ (s>1)}}^{s-1} Y_m \sin\left(\omega_k \left(m - \frac{1}{2}\right) \tau\right) \right], \quad (13)$$

де $s = 1, 2, \dots, n$ для обчислення дискретної множини значень: $Y_1, Y_2, \dots, Y_n = Y(t)$.

Але поряд з цим, суто числовим, методом можна побудувати наближений аналітичний розв'язок рівняння (12). З цією метою розглянемо рух допоміжної системи з одним ступенем вільності, що описується диференціальним рівнянням:

$$\frac{d^2 Y^*}{dt^2} + \Omega^2 Y^* = \frac{q_0}{\rho F} \delta(t).$$

При нульових початкових умовах, воно має розв'язок:

$$Y^*(t) = \frac{q_0}{\rho F \Omega} \sin(\Omega t). \quad (14)$$

Підставивши його в (12) одержуємо друге наближення в методі ітерації:

$$Y^{**}(t) = \frac{q_0}{\rho F} \left\{ \frac{1}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) - \frac{2c}{\rho F l \Omega} \sum_{k=1,3,\dots} \frac{1}{\omega_k (\Omega^2 - \omega_k^2)} \left[\Omega \sin(\omega_k t) - \omega_k \sin(\Omega t) \right] \right\}. \quad (15)$$

Якщо тут в ряді по K обчислювати лише перший член, то $Y^{**}(t) = Y^*(t)$.

Щоб отримати третє наближення, аналогічне (9), треба знову підставити (15) в (12), але в цьому немає практичної потреби, бо збіжність ітерацій досить швидка.

Вирази (14) і (15) дають можливість знайти час $t = t_*$, коли $Y(t) \approx 0$. Із (14) випливає, що:

$$t_* = \frac{\pi}{\Omega},$$

а прогин середини балки на проміжку $t \in [t_*, t_* + \pi / \omega_1]$ подається виразом:

$$Y^*(t) = y\left(\frac{l}{2}, t\right) = -\frac{q_0}{\rho F \omega_1} \sin(\omega_1 (t - t_*)). \quad (16)$$

При цьому амплітуда переміщення вгору становить:

$$\max \left| y\left(\frac{l}{2}, t\right) \right| = \frac{q_0}{\rho F \omega_1}.$$

Отже, відношення амплітуд переміщень η зберігається таким, як і в формулі (11), тобто дорівнює $\frac{\Omega}{\omega_1}$.

У разі використання розв'язку (15) можна більш точно знайти $t = t_*$, а обчислення $Y(t)$, при $t > t_*$, доводиться проводити за формулою (10), в якій:

$$a_k = \frac{q_0}{\rho F} \left\{ \frac{\delta_{k1}}{\omega_1} \sin(\omega_1 t_*) - \frac{2c}{\rho F l \Omega} \frac{1}{\omega_k (\Omega^2 - \omega_k^2)} [\Omega \sin(\omega_k t_*) - \omega_k \sin(\Omega t_*)] \right\};$$

$$b_k = \frac{q_0}{\rho F \omega_k} \left\{ \delta_{k1} \cos(\omega_1 t_*) - \frac{2c}{\rho F l (\Omega^2 - \omega_k^2)} [\cos(\omega_k t_*) - \cos(\Omega t_*)] \right\},$$

де δ_{k1} – символ Кронекера.

Таким чином, можна перевірити виконання нерівності (11) і при нерівномірному розподілі імпульсу по довжині балки.

З метою апробації розрахункових формул проведено обчислення $Y(t)$ різними способами при $EJ = 1,2 \cdot 10^6$ Па·м⁴; $\rho F = 13,7$ кг/м; $l = 5$ м, $q = 30$ Нс/м. Одержані для $c = 10^5$ Н/м значення прогинів середини балки записано в табл. 3.

Таблиця 3 – Значення $Y(t)$, обчислені за формулами: (14), (16); (15), (10) і (13)

$10^2 t, \text{ с}$	$10^2 Y^*, \text{ м}$	$K = 5$	$K = 50$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 50$
		$10^2 Y^{**}(t), \text{ м}$		$10^2 Y_r(t), \text{ м}$		
0,600	1,187	1,183	1,183	1,187	1,183	1,183
1,220	1,701	1,696	1,696	1,701	1,696	1,696
2,440	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
3,784	-1,874	-1,875	-1,875	-1,874	-1,873	-1,873
4,500	-1,256	-1,257	-1,257	-1,257	-1,258	-1,258

У формулі (13) задавали $n = 2000$, а одержані $Y(t)$ позначали через $Y_r(t)$.

Спостерігається швидка збіжність рядів по K . Тому елементарні формули (14) і (16) дають високу точність розрахунку.

В табл. 4 записано результати обчислень $Y(t)$ для збільшеної в 8 разів жорсткості опори порівняно з попереднім її значенням.

Таблиця 4 – Переміщення середини балки при $c = 8 \cdot 10^5$ Н/м

$10^2 t, \text{ с}$	$10^2 Y^*, \text{ м}$	$K = 5$	$K = 50$	$K = 1$	$K = 5$	$K = 50$
		$10^2 Y^{**}(t), \text{ м}$		$10^2 Y_r(t), \text{ м}$		
0,400	0,792	0,768	0,767	0,792	0,796	0,769
0,8165	1,138	1,112	1,112	1,138	1,121	1,121
1,633	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2,977	-1,874	-1,878	-1,878	-1,872	-1,866	-1,866
3,500	-1,536	-1,535	-1,535	-1,533	-1,548	-1,549

У цій таблиці, внаслідок збільшення жорсткості опори, більш чітко проявляється динамічний ефект несиметрії пружної характеристики. Відношення амплітуд прогинів балки над опорою, близьке до визначеного в наближеній формулі (11).

Висновки. Дослідження підтвердило, що при імпульсному навантаженні балки, дискретно підкріпленою пружною опорою, яка сприймає лише стискання (однобічна в'язь) максимальні прогини балки в напрямі дії імпульсу на зближення з опорою, можуть бути менші за амплітудні прогини у протилежному напрямі, при вільних коливаннях розвантаженої балки. Цей динамічний ефект є проявом несиметрії пружної характеристики коливальної системи.

Література: 1. Кохманюк С. С. Колебания многопролетных балок на упругих опорах при подвижной нагрузке / С. С. Кохманюк, А. П. Филиппов // Строительная механика и расчет сооружений. – 1965. – № 6. – С. 32-36. 2. Филиппов А. П. Динамическое воздействие подвижных нагрузок на стержни / А. П. Филиппов, С. С. Кохманюк. – Киев : Наукова думка, 1967. – 132 с. 3. Филиппов А. П. Колебания деформируемых систем / А. П. Филиппов. – Москва : Машиностроение, 1970. – 734 с. 4. Филиппов А. П. Деформирование элементов конструкций под действием ударных и импульсных нагрузок / А. П. Филиппов, С. С. Кохманюк, Е. Г. Янютин. – Киев : Наукова думка, 1978. – 183 с. 5. Кисилев В. А. Строительная механика / В. А. Кисилев. – Москва : Стройиздат, 1980. – 616 с. 6. Янютин Е. Г. Задачи импульсного деформирования элементов конструкций / Е. Г. Янютин, И. В. Янчевский, А. В. Воропай, А. С. Шарапата. – Харьков : ХНАДУ, 2004. – 392 с. 7. Сметанкина Н. В. Нестационарное деформирование, термоупругость и оптимизация многослойных пластин и цилиндрических оболочек / Н. В. Сметанкина. – Харьков : Міськдрук, 2011. – 376 с. 8. Ольшанский В. П. Колебания трехслойной балки-полосы при ударе / В. П. Ольшанский, А. П. Филиппов // Прикладная механика. – 1970. – Т. VI, № 12. – С. 92-96. 9. Ольшанский В. П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В. П. Ольшанский, Л. Н. Тищенко, С. В. Ольшанский. – Харьков : Міськдрук, 2012. – 320 с.

Bibliography (transliterated): 1. Kokhmanyuk S. S. Oscillations of multi-span beams on elastic supports with a movable load / S. S. Kokhmanyuk, A. P. Filippov // Construction mechanics and calculation of structures. – 1965. – № 6. – Pp. 32-36. 2. Filippov A. P. Dynamic effect of moving loads on rods / A. P. Filippov, S. S. Kokhmanyuk. – Kiev : Naukova Dumka, 1967. – 132 s. 3. Filippov A. P. Oscillations of deformable systems / A. P. Filippov. – Moscow : Mechanical Engineering, 1970. – 734 s. 4. Filippov A. P. Deformation of structural elements under impact and impulse loads / A. P. Filippov, S. S. Kohmanuk, E. G. Yanutin. – Kiev : Naukova Dumka, 1978. – 183 s. 5. Kisilev V. A. Construction mechanics / V. A. Kisilev. – Moscow : Stroiizdat, 1980. – 616 p. 6. Yanyutin E. G. Problems of impulse deformation of structural elements / E. G. Yanutin, I. V. Yanchevskii, A. V. Voropai, A. S. Sharapata. – Kharkov : HNADU, 2004. – 392 s. 7. Smetankina N. V. Nonstationary deformation, thermoelasticity and optimization of multilayer plates and cylindrical shells / N. V. Smetankina. – Kharkov : Miskdruk, 2011. – 376 s. 8. Olshanskiy V. P. Oscillations of a three-layer beam-strip upon impact / S. V. Olshanskiy, A. P. Filippov // Applied Mechanics. – 1970. – T. VI, № 12. – Pp. 92-96. 9. Olshanskiy V. P. Oscillations of rods and plates during a mechanical shock / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy, L. M. Tishchenko. – Kharkov : Miskdruk, 2012. – 320 s.

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

ДЕФОРМУВАННЯ ІМПУЛЬСОМ БАЛКИ, ОДНОБІЧНО ПІДКРІПЛЕНОЇ ПРУЖНОЮ ОПОРОЮ

Розглянуто дію силового імпульсного навантаження на балку, дискретно підкріпленою пружною опорою. Передбачено відставання (відрив) балки від опори, яка під-

дана лише стисканню (за відсутності розтягу). Виділено два етапи деформування балки. На першому вона взаємодіє з опорою (однобічною в'яззю), а на другому – їх контакт відсутній. Переміщення розгорнуто в ряд синусів, що задовольняє умовам вільного опирання кінців балки. Визначення контактної реакції на пружній опорі зведено до інтегрального рівняння типу Вольтера. Побудовано його наближений аналітичний і числовий розв'язки. Показано, що амплітудне переміщення балки в бік стискання опори, куди спрямовано зовнішній силовий імпульс, менше ніж амплітудне переміщення розвантаженої балки в протилежному напрямі, при її вільних коливаннях, що властиво пружним системам з несиметричною силовою характеристикою. Досліджено вплив обчисленої кількості членів в часткових сумах рядів на точність числових результатів. Проаналізовано вплив різних чинників, зокрема жорсткості проміжної дискретної опори, на процес деформування балки.

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

ДЕФОРМИРОВАНИЕ ИМПУЛЬСОМ БАЛКИ, ОДНОСТОРОННЕ ПОДКРЕПЛЕННОЙ УПРУГОЙ ОПОРОЙ

Рассмотрено силовое импульсное нагружение балки, дискретно подкрепленной упругой опорой. Предусмотрено отставание (отрыв) балки от опоры, которая подвергается лишь сжатию (без растяжения). Выделено два этапа деформирования балки. На первом она взаимодействует с опорой (односторонней связью), а на втором их контакт отсутствует. Прогибы балки разложено в ряд синусов, который удовлетворяет условиям свободного опирания концов балки. Определение контактной реакции на упругой опоре сведено к интегральному уравнению типа Вольтерра. Построено его приближенные аналитическое и численное решение. Показано, что амплитудное перемещение балки в сторону сжатия опоры, куда направлен внешний силовой импульс, меньше, нежели амплитудное перемещение разгруженной балки в противоположном направлении, при ее свободных колебаниях, что свойственно упругим системам с несимметричной силовой характеристикой. Исследовано влияние вычисленного количества членов в частичных суммах рядов на точность числовых результатов. Проанализировано влияние различных факторов, в частности жесткости промежуточной дискретной опоры, на процесс деформирования балки.

V. Olshanskiy, S. Olshanskiy

DEFORMATION BY A PULSE BEAM, ONE-SIDED ABOVE ELASTIC SUPPORT

The force impulse loading of a beam discretely supported by an elastic support is considered. There is a lag (separation) of the beam from the support, which is only compressed (without stretching). Two stages of deformation of the beam are identified. On the first, it interacts with the support (one-way communication), and on the second one there is no contact. The deflections of the beam are decomposed into a series of sines, which satisfies the conditions of free support of the ends of the beam. The determination of the contact reaction on the elastic support is reduced to an integral equation of Voltaire type. Its approximate analytical and numerical solution is constructed. It is shown that the amplitude displacement of the beam toward the compression of the support, where the external force pulse is directed, is smaller than the amplitude of the unloaded beam in the opposite direction, with its free oscillations, which is proper to elastic systems with asymmetric power characteristics. The effect of the calculated number of terms in partial sums of series on the accuracy of numerical results is investigated. The influence of various factors, in particular, the stiffness of the intermediate discrete support, on the deformation process of the beam is analyzed.