УДК 534.1:539.3

Ольшанський В.П., д-р фіз.-мат. наук, Ольшанський С.В., канд. фіз.-мат. наук

РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ПРУЖНИХ ТІЛ І ЙОГО РОЗВ’ЯЗОК

Постановка проблеми та огляд публікацій. Короткочасні ударні навантаження елементів конструкцій можуть спричинити їх руйнування або порушити працездатність. Тому розрахункам на міцність при ударі приділена належна увага в курсах опору матеріалів [1, 2]. Там, як правило, удар вважають миттєвим і розглядають лише динаміку післяударного процесу. Це властиво і більшості варіантів відомих теорій механічного удару [3, 4], в яких використовують поняття імпульсу силу, а не самої сили. Із теорій, що висвітлюють розгортку процесу удару в часі вкажемо на теорію Г. Герца надруковану в [5, 6] та теорію М. О. Кільчевського [7, 8]. В монографії [8] виведено універсальне інтегральне рівняння удару пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку та побудовано його наближений аналітичний розв’язок обчисленням суми повільно збіжного ряду методом Шенкса. Тут, на відміну від [8], застосовуємо для моделювання динамічної взаємодії пружних тіл диференціальне рівняння з побудовою його точного аналітичного розв’язку в Ateb-функціях [9, 10]. Наявність таблиць та компактних апроксимацій вказаних спеціальних функцій робить зручним практичне використання одержаного розв’язку.

Метою статті є виведення диференціального рівняння сили динамічного стискання пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку, побудова його аналітичного розв’язку та реалізація можливостей на конкретних прикладах.

Виведення нелінійного диференціального рівняння. Припустимо що пружні тіла в зоні їх взаємодії обмежені поверхнями другого порядку: $z_1 = a_{11}x^2 + a_{22}y^2$ і $z_2 = -\left(b_{11}x^2 + b_{22}y^2\right)$, причому: $A = a_{11} + b_{11} \geq B = a_{22} + b_{22}$. Тоді, у відповідності зі статичним розв’язком контактної задачі теорії пружності, стискання тіл x під дією сили P, описується залежністю [11]:

$$x = k\,P^{2/3}, \tag{1}$$

де:

$$k = \frac{3}{2}K\left(\varepsilon\right)\frac{Q_1 + Q_2}{\pi b_1}; \qquad b_1 = \sqrt[3]{\frac{3E\left(\varepsilon\right)}{2\left(1-\varepsilon^2\right)}\frac{Q_1 + Q_2}{\pi\left(A+B\right)}};$$

$Q_1 = \dfrac{1-\nu_1^2}{E_1}$, $Q_2 = \dfrac{1-\nu_2^2}{E_2}$, $K(\varepsilon)$, $E(\varepsilon)-$ повні еліптичні інтеграли першого та другого роду відповідно; $E_1, E_2, \nu_1, \nu_2 -$ модулі пружності та коефіцієнти Пуассона матеріалів тіл.

Параметр ε (ексцентриситет еліптичної площадки контакту) є коренем трансцендентного рівняння:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon^2}-1\right)\left[\frac{K(\varepsilon)}{E(\varepsilon)}-1\right]=\frac{B}{A+B}.$$

Взявши послідовно дві похідних за часом t з виразу (1), одержуємо:

$$\dot{x}=\frac{2}{3}k\,P^{-1/3},\ \ddot{x}=\frac{2}{3}k\left(\ddot{P}P^{-1/3}-\frac{1}{3}P^{-4/3}\dot{P}^2\right).$$

Використовуючи їх, рівнянню відносного руху тіл при ударі:

$$M\,\ddot{x}=-P$$

надаємо форму:

$$\ddot{P}-\frac{1}{3}\dot{P}^2P^{-1}+\frac{3}{2Mk}P^{4/3}=0. \qquad (2)$$

Тут $M=\dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$, m_1, m_2 – маси тіл, задіяних в ударі.

Рівняння (2) відноситься до нелінійних диференціальних рівнянь другого порядку, куди не входить явно незалежна змінна t, що дає можливість одержати його аналітичний розв'язок.

Побудова розв'язку рівняння динамічного стискання. Враховуючи що $\ddot{P}=\dot{P}\dfrac{d\dot{P}}{dP}$, понижуємо порядок рівняння (2), тобто зводимо до:

$$\frac{d\dot{P}}{dP}-\frac{1}{3}\frac{\dot{P}}{P}+\frac{3}{2Mk}\frac{P^{4/3}}{\dot{P}}=0. \qquad (3)$$

Далі подаємо $\dot{P}$ добутком двох невідомих функцій: $\dot{P}=F\cdot G$, де $F=F(P)$, $G=G(P)$.

Оскільки:

$$\frac{d\dot{P}}{dP}=\frac{dF}{dP}\cdot G+F\frac{dG}{dP},$$

то, замість (3), одержуємо систему рівнянь:

$$\frac{dF}{dP}=\frac{1}{3}\frac{F}{P};\quad \frac{dG}{dP}=-\frac{3}{2Mk}\frac{P^{4/3}}{F^2G}.$$

Перше з них має розв'язок:

$$F(P)=P^{1/3}. \qquad (4)$$

Інтегрування другого, з урахуванням (4), дає:

$$G^2(P) = C - \frac{9}{5Mk}P^{5/3},$$

де $C -$ довільна стала.

Таким чином,

$$\dot{P} = \sqrt{P^{2/3}\left(C - \frac{9}{5Mk}P^{5/3}\right)}. \qquad (5)$$

Позначимо символом P_c максимум сили взаємодії, яка досягається в кінці процесу стискання, коли $\dot{P} = 0$. Тому $C = \frac{9}{5Mk}P_c^{5/3}$ і розв'язок (5) набуває вигляд:

$$\frac{dP}{dt} = \frac{3}{\sqrt{5Mk}}\sqrt{P^{2/3}\left(P_c^{5/3} - P^{5/3}\right)}.$$

Подальшим його інтегруванням одержуємо:

$$\int_0^P \frac{dP}{\sqrt{P^{2/3}\left(P_c^{5/3} - P^{5/3}\right)}} = \frac{3}{\sqrt{5Mk}}t.$$

Перейдемо до нової змінної інтегрування: $P = P_c \cdot u$. Тоді:

$$\int_0^{P/P_c} \frac{du}{\sqrt{u^{2/3}\left(1 - u^{5/3}\right)}} = 3\sqrt{\frac{P_c^{1/3}}{5Mk}}\,t. \qquad (6)$$

Черговою заміною: $u^{2/3} = \xi$, $du = \frac{3}{2}\sqrt{\xi}\,d\xi$, замість (6), отримуємо:

$$\int_0^{(P/P_c)^{2/3}} \frac{d\xi}{\sqrt{1 - \xi^{5/2}}} = \lambda t, \qquad (7)$$

де:

$$\lambda = \sqrt{\frac{4}{5}\frac{P_c^{1/3}}{Mk}}. \qquad (8)$$

Верхня межа інтегрування в (7) є Ateb-синусом [10-12]. Тому:

$$\left(P / P_c\right)^{2/3} = \mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\lambda t\right)$$

або

$$P = P_c \cdot \left[\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\lambda t \right) \right]^{3/2} . \qquad (9)$$

Це розв’язок рівняння (2) з точністю до невідомого множника P_c.
Згідно з (9), зусилля P досягає максимума, коли:

$$\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\lambda t \right) = 1 \Rightarrow \lambda t = I = \int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{1-\xi^{5/2}}} .$$

Останній інтеграл виражається через гама-функції по формулі:

$$I = \frac{2\sqrt{\pi}}{5} \frac{\Gamma(0{,}4)}{\Gamma(0{,}9)} \approx 1{,}4716 .$$

Тому тривалість процесу стискання тіл становить:

$$t_c = \frac{I}{\lambda} \approx \frac{1{,}4716}{\lambda} = 1{,}4716 \sqrt{\frac{5Mk}{4P_c^{1/3}}} . \qquad (10)$$

Щоб знайти невідоме P_c, скористаємося теоремою про зміну кількості руху, за якою, при початковій швидкості стискання υ_0, виконується рівність:

$$M\upsilon_0 = \int_0^{t_c} P(t)\,dt = P_c \int_0^{t_c} \left[\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\lambda t \right) \right]^{3/2} dt .$$

Перейдемо до нової змінної інтегрування $\lambda t = \eta$. Тоді:

$$M\upsilon_0 = \frac{P_c}{\lambda} \int_0^{I} \left[\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\eta \right) \right]^{3/2} d\eta = \frac{P_c}{\lambda} \cdot \frac{4}{5} .$$

Отже:

$$P_c = \frac{5}{4}\lambda M \upsilon_0 \quad \text{або} \quad P_c = \upsilon_0 \sqrt{\frac{5}{4}\frac{M}{k} P_c^{1/3}} . \qquad (11)$$

Розв’язавши це рівняння відносно P_c, отримуємо:

$$P_c = \left(\frac{5}{4}\frac{M}{k} \upsilon_0^2 \right)^{3/5} \qquad (12)$$

Таким чином, формули (8), (9), (10) і (12) повністю визначають силу динамічного стискання тіл, яке починається зі швидкістю υ_0, тобто вони дають можливість обчислити P_c, λ, t_c і $P(t)$ для різних $t \in (0; t_c)$. При цьому можна також розрахувати й інші характеристики процесу. Наприклад, зближення центрів мас тіл на вказаному вище проміжку часу подається формулою:

$$x(t) = k\,P_c^{2/3}\,\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\lambda t\right),$$

що теж потребує значень Ateb-функції. Максимум стискання припадає на $t = t_c$ і становить:

$$x_c = x(t_c) = k\,P_c^{2/3}. \tag{13}$$

Згідно з (11), (12) і (13):

$$\lambda = \frac{P_c \upsilon_0}{\frac{5}{4}M\upsilon_0^2}, \quad \frac{5}{4}M\upsilon_0^2 = k\,P_c^{2/3} \Rightarrow \lambda = \frac{\upsilon_0}{k\,P_c^{2/3}} = \frac{\upsilon_0}{x_c}.$$

Тому одержаним вище розв’язкам можна надати вигляд:

$$\frac{x(t)}{x_c} = \mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right), \quad \frac{P(t)}{P_c} = \left[\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\frac{\upsilon_0 t}{x_c}\right)\right]^{3/2},$$

що цілком узгоджується з результатами, одержаними раніше іншим шляхом в роботі [12].

Після стискання розпочинається процес динамічного розстискання тіл. Він відбувається на проміжку $t \in (t_c; t_y)$. Графіки $P(t)$ і $x(t)$ симетричні відносно вертикалі $t = t_c$. Для розрахунку динамічного розстискання можна використати вище побудовані розв’язки, але в них треба замінити

$$\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\lambda t\right) \text{ на } \mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}(2I - \lambda t)\right).$$

Динамічна взаємодія тіл закінчується при:

$$t = t_y = \frac{2I}{\lambda} = \frac{2I\,x_c}{\upsilon_0}.$$

Щоб спростити використання аналітичних розв’язків, далі наводимо таблицю Ateb-синуса. Його значення з досить високою точністю можна знайти лінійною інтерполяцією табличних даних.

Таблиця 1 – Значення Ateb-синуса, где $\mathbf{Sa}(\quad) = \mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2}, 1, \frac{5}{4}\eta\right)$

10η	$10\mathrm{Sa}(\quad)$	10η	$10\mathrm{Sa}(\quad)$	10η	$10\mathrm{Sa}(\quad)$
0,0	0,000	5,0	4,875	10,0	8,657
0,2	0,200	5,2	5,057	10,2	8,765
0,4	0,400	5,4	5,237	10,4	8,869
0,6	0,600	5,6	5,415	10,6	8,968
0,8	0,800	5,8	5,591	10,8	9,064
1,0	1,000	6,0	5,765	11,0	9,155
1,2	1,199	6,2	5,937	11,2	9,242
1,4	1,399	6,4	6,106	11,4	9,324
1,6	1,598	6,6	6,274	11,6	9,402
1,8	1,796	6,8	6,438	11,8	9,475
2,0	1,995	7,0	6,600	12,0	9,544
2,2	2,193	7,2	6,760	12,2	9,608
2,4	2,390	7,4	6,916	12,4	9,667
2,6	2,587	7,6	7,070	12,6	9,722
2,8	2,783	7,8	7,221	12,8	9,772
3,0	2,979	8,0	7,369	13,0	9,817
3,2	3,174	8,2	7,513	13,2	9,857
3,4	3,367	8,4	7,654	13,4	9,892
3,6	3,560	8,6	7,792	13,6	9,922
3,8	3,752	8,8	7,927	13,8	9,948
4,0	3,943	9,0	8,058	14,0	9,968
4,2	4,132	9,2	8,185	14,2	9,983
4,4	4,320	9,4	8,309	14,4	9,994
4,6	4,507	9,6	8,429	14,6	9,999
4,8	4,692	9,8	8,545	$10 \cdot I$	10,000

Крім таблиці, для обчислень можна також використовувати апроксимацію:

$$\mathbf{Sa}\left(\frac{3}{2},1,\frac{5}{4}\eta\right) \approx \begin{cases} \eta \\ 0{,}1995 + 1{,}0243(\eta - 0{,}2) - 0{,}2144(\eta - 0{,}2)^2 \\ 1 - (4/3)\,\mathbf{sin}^2\left[0{,}6846 \cdot (I - \eta)\right] \end{cases}$$ при

$0 \le \eta < 0{,}2$

$0{,}2 \le \eta \le 0{,}8$

$0{,}8 < \eta \le I,$

відносна похибка якої менша одного відсотка.

Числові результати та їх порівняльний аналіз. З метою перевірки вірогідності побудованих розв'язків проведемо розрахунок удару гумової кулі радіуса $R = 0{,}015$ м по абсолютно жорсткому нерухомому півпростору, обмеженому плоскою поверхнею. Для проведення розрахунків приймаємо: $M = 21{,}206 \cdot 10^{-3}$ кг; $E_1 = 4 \cdot 10^6$ Па; $\nu_1 = 0{,}5$; $\upsilon_0 = 6$ м/с. Цим вихідним даним відповідає: $a_{11} = a_{22} = 33{,}3333$ м$^{-1}$; $b_{11} = b_{22} = 0$; $A = B = 33{,}3333$ м$^{-1}$; $Q_2 = 0$; $Q_1 = 1{,}875 \cdot 10^{-7}$ Па; $\varepsilon = 0$; $K(\varepsilon) = E(\varepsilon) = \pi/2$;

$b_1 = 1{,}2825 \cdot 10^{-3}$ (Па·м)$^{-1/3}$; $k = 1{,}0965 \cdot 10^{-4}$ м·Н$^{-2/3}$. Далі за формулами (12) і (13) одержуємо: $P_c = 231{,}1$ Па; $x_c = 4{,}129 \cdot 10^{-3}$м. Розраховані по формулі (9) відношення P/P_c при різних $\eta = \upsilon_0 t / x_c$ записано в табл. 2 (чисельники).

Таблиця 2 – Обчислені двома способами відношення P/P_c

η	$10P/P_c$	η	$10P/P_c$	η	$10P/P_c$
0,1	$\frac{0{,}316}{0{,}317}$	0,7	$\frac{5{,}362}{5{,}363}$	1,2	$\frac{9{,}324}{9{,}324}$
0,3	$\frac{1{,}626}{1{,}626}$	0,9	$\frac{7{,}233}{7{,}233}$	1,3	$\frac{9{,}727}{9{,}726}$
0,5	$\frac{3{,}404}{3{,}404}$	1,1	$\frac{8{,}760}{8{,}760}$	1,4	$\frac{9{,}952}{9{,}952}$

У знаменниках в табл. 2 записано відношення, одержані числовим інтегруванням рівняння (2) на комп’ютері. Спостерігається гарна узгодженість результатів обчислень, що підтверджує вірогідність аналітичного розв’язку.

Використовуючи точний розв’язок задачі з’ясуємо похибки наближеного її розв’язку, побудованого в [8]. Там залежність сили взаємодії від часу подається виразом:

$$P = \left(\frac{M\upsilon_0^2}{k} \right)^{3/5} f(\tau),$$

де

$$f(\tau) = \frac{10\tau^{3/2}}{13{,}793 + 0{,}73\tau^{5/2}} \cdot \frac{0{,}276 - 0{,}015\tau^{5/2}}{0{,}2 + 0{,}013\tau^{5/2}};$$

$$\tau = \frac{\upsilon_0^{1/5}}{M^{2/5} k^{3/5}} t = \left(\frac{5}{4} \right)^{0{,}4} \eta .$$

Згідно з цим розв’язком:

$$P/P_c = (0{,}8)^{0{,}6} f(\tau). \tag{14}$$

Результатом обчислень P/P_c по формулі (14) наведено в табл. 3.

Порівняльний аналіз даних в табл. 2 і табл. 3 показує, що наближена формула (14) не дає великих похибок, які дещо зростають зі збільшенням η.

Таблиця 3 – Наближені значення P/P_c

η	$10P/P_c$	η	$10P/P_c$	η	$10P/P_c$
0,1	0,316	0,7	5,367	1,2	9,425
0,3	1,627	0,9	7,252	1,3	9,884
0,5	3,406	1,1	8,821	1,4	10,186

Висновки. Нелінійне диференціальне рівняння сили ударної взаємодії пружних тіл, обмежених поверхнями другого порядку, має замкнутий аналітичний розв’язок, що виражається степенями Ateb-синуса. Використання таблиці цієї спеціальної функції суттєво спрощує розрахунки. Результати розрахунків находяться у гарній відповідності з тими значеннями сили удару, які дають інші методи, що підтверджує вірогідність побудованих аналітичних розв’язків.

Література: ***1.*** *Писаренко Г. С. Опір матеріалів / Г. С. Писаренко, О. Л. Квітка, Е. С. Уманський. – Київ : Вища школа, 2004. – 655 с.* ***2.*** *Гурняк Л. І. Опір матеріалів / Л. І. Гурняк,*
Ю. В. Гуцуляк, Т. Б. Юзків. – Львів : Новий світ, 2005. – 364 с. ***3.*** *Ольшанский В. П. Колебания стержней и пластин при механическом ударе / В. П. Ольшанский, Л. Н. Тищенко, С. В. Ольшанский. – Харьков : Міськдрук, 2012. – 320 с.* ***4.*** *Ольшанський В. П. Сравнение приборов консольной балки при ударе, вычисленных по теориям Кокса и Сен-Венана / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вібрації в техніці та технологіях : Всеукраїнський науково-технічний журнал. – Вінниця, 2012. – № 4 (68). – С. 94-97.* ***5.*** *Гольдсмит В. Удар. Теория и физические свойства соударяемых тел / В. Гольдсмит. – М. : Стройиздат, 1965. – 447 с.* ***6.*** *Пановко Я. Г. Введение в теорию механического удара / Я. Г. Пановко. – Москва : Наука, 1977. – 223 с.* ***7.*** *Кильчевский Н. А. Теория соударений твердых тел / Н. А. Кильчевский. – Киев : Наукова думка, 1969. – 247 с.* ***8.*** *Кильчевский Н. А. Динамическое контактное сжатие твердых тел. Удар / Н. А. Кильчевский. – Киев : Наукова думка, 1976. – 319 с.* ***9.*** *Грицик В. В. Математичні моделі алгоритмів і реалізація Ateb-функцій / В. В. Грицик, М. А. Назаркевич // Доповіді Національної академії наук України. – Київ, 2007. – № 12. – С. 37-42.* ***10.*** *Пукач П. Я. Якісні методи дослідження нелінійних коливальних систем / П. Я. Пукач. – Львів : Львівська політехніка, 2014. – 288 с.* ***11.*** *Штаерман И. Я. Контактная задача теории упругости / И. Я. Штаерман. – М.-Л. : Гостехиздат, 1949. – 272 с.* ***12.*** *Ольшанський В. П. Ateb-синус у розвязку задачі Герца про удар / В. П. Ольшанський, С. В. Ольшанський // Вісник НТУ «ХПІ». – Харків : НТУ «ХПІ», 2018. – № 3 (1279). – С. 98-103. – Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях.*

Bibliography (transliterated): ***1.*** *Pisarenko G. S. Materials Resistance / G. S. Pisarenko, A. L. Kvitka, E. S. Umansky. – Kyiv : Higher school, 2004. – 655 p.* ***2.*** *Gurniak L. I. Resistance of materials / L. I. Gurnyak, Yu. V. Gutsulyak, T. B. Yuzkiv. – Lviv : New World, 2005. – 364 s.* ***3.*** *Olshanskiy V. P. Oscillations of rods and plates during a mechanical shock / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy, L. M. Tishchenko. – Kharkov : Miskdruk, 2012. – 320 s.* ***4.*** *Olshanskiy V. P. Comparison of cantilever beam devices at impact, calculated according to the theories of Cox and Saint-Venant / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Vibrations in technology and technologies : All-Ukrainian scientific and technical journal. – Vinnytsya, 2012. – № 4 (68). – Pp. 94-97.* ***5.*** *Goldsmith W. Impact. Theory and physical properties of the colliding bodies / V. Goldsmith. – M. : Stroyizdat, 1965. – 447 s.* ***6.*** *Panovko Y. G. Introduction to the theory of mechanical shock / Y. G. Panovko. – Moscow : Nauka, 1977. – 223 s.* ***7.*** *Kilchevsky N. A. Theory of solid collisions / N. A. Kilchevsky. – Kiev : Naukova Dumka, 1969. – 247 s.* ***8.*** *Kilchevsky N. A. Dynamic contact compression of solids. Blow / N. A. Kilchevsky. – Kiev : Naukova Dumka, 1976. – 319 s.* ***9.*** *Gricik V. V. Matematichni modeli algoritmiv i realizacija Ateb-funkcij / V. V. Gricik, M. A. Nazarkevich // Dopovidi Nacional'noї akademiї nauk Ukraïni. – Kiïv, 2007. – № 12. – S. 37-42.* ***10.*** *Pukach P. Ya. Qualitative methods for the investigation of nonlinear oscillation systems / P. Ya. Pukach. – Lviv : Lviv Polytechnic, 2014 – 288 s.* ***11.*** *Shtaerman I. Ya. Contact problem of the theory of elasticity / I. Ya. Shtaerman. – M.-L. : Gostekhizdat,* *1949. – 272 s.* ***12.*** *Olshanskiy V. P. Ateb-sine in solving the Hertz problem / V. P. Olshanskiy, S. V. Olshanskiy // Bulletin of NTU «KhPI». – Kharkiv : NTU «KhPI», 2018. – № 3 (1279). – Pp. 98-103. – Series : Mathematical modeling in engineering and technologies.*

Ольшанський В.П., Ольшанський С.В.

РІВНЯННЯ СИЛИ УДАРУ ПРУЖНИХ ТІЛ І ЙОГО РОЗВ’ЯЗОК

З використанням припущень, які зробив Г. Герц, створюючи власну теорію квазістатичного удару, складено нелінійне диференціальне рівняння зміни у часі сили динамічної взаємодії пружних тіл, обмежених в області їх контакту поверхнями другого порядку. Побудовано його аналітичний розв’язок у вигляді степеня Ateb-синуса. Цей розв’язок дає розгортку процесу взаємодії тіл у часі, а також вирази максимума сили і тривалості динамічного контакту. Встановлено узгодженість одержаного розв’язку з відомими результатами. Для спрощення його використання в розрахунках складена спеціальна таблиця Ateb-синуса та запропонована апроксимація його елементарними функціями. Наведено приклади розрахунків і проведено порівняльний аналіз одержаних результатів.

Ольшанский В.П., Ольшанский С.В.

УРАВНЕНИЕ СИЛЫ УДАРА УПРУГИХ ТЕЛ И ЕГО РЕШЕНИЕ

С использованием допущений, которые ввел Г. Герц, создавая собственную теорию квазистатического удара, составлено нелинейное дифференциальное уравнение изменения во времени силы динамического взаимодействия упругих тел, ограниченных в области их контакта поверхностями второго порядка. Построено его аналитическое решение в виде степени Ateb-синуса. Это решение дает развертку процесса взаимодействия тел во времени, а также выражения максимума силы и продолжительности динамического контакта. Установлено согласованность полученного решения с известными результатами. Для упрощения его использования в расчетах составлена специальная таблица Ateb-синуса и предложена аппроксимация его элементарными функциями. Приведены примеры расчетов и проведен сравнительный анализ полученных результатов.

V. Olshanskiy, S.Olshanskiy

EQUATION OF FORCE OF ELASTIC BODY IMPACT AND ITS SOLUTION

Using the assumptions introduced by H. Hertz, creating his own theory of quasi-static impact, a nonlinear differential equation has been compiled of the change in time of the dynamic interaction force of elastic bodies bounded in the region of their contact by second-order surfaces. Its analytical solution is constructed in the form of the degree of Ateb-sine. This solution provides a scan of the process of interaction of bodies in time, as well as the expression of the maximum force and duration of the dynamic contact. The consistency of the obtained solution with known results was established. To simplify its use in the calculations, a special Ateb-sine table was compiled and its approximation by elementary functions was proposed. Examples of calculations are given and a comparative analysis of the obtained results is carried out.