**УДК 531.32**

# РОЗРОБКА ТЕОРІЇ СКЛАДНОГО РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ ПО ПЛОЩИНІ

**С.Ф. Пилипака**, докт.техн.наук, проф.
*Національний університет біоресурсів і природокористування України*
**О.В. Адамчук**, ст. наук. співр.
*ННЦ «ІМЕСГ»*
**Франчак Ян**, докт. техн. наук,
**Коренко Марош**, докт. техн. наук,
*Словацький аграрний університет в Нітрі*

*Досліджено аналітично складний рух матеріальної точки, відносне переміщення якої відбувається в рухомому триграннику кривої, заданої натуральними рівняннями. Переносний рух тригранника визначається диференціальними характеристиками кривої. Доведена правомірність використання формул Френе для знаходження абсолютної швидкості точки в проекціях на орти рухомого тригранника. Знайдені абсолютні траєкторії руху, здійснено візуалізацію отриманих результатів.*

***Ключові слова:*** *складний рух, матеріальна точка, відносне переміщення, рухомий тригранник Френе.*

**Вступ.** Рух матеріальної точки по площині (гравітаційній поверхні, шорсткій площині та ін.) був предметом дослідження багатьох вчених зі світовим ім’ям, починаючи від Галілея, Гюйгенса, Ньютона, Ейлера, Остроградського та ін. Найбільш фундаментальними дослідженнями руху матеріальної частинки по фрикційних поверхнях сільськогосподарських машин слід вважати праці академіка Василенка П.М. [1] та інших вітчизняних вчених, зокрема академіків Заїки П.М., Берга Б.А., Григорьєва С.М, Мельникова С.В. та ін. Значна кількість аналітичних задач теорії сільськогосподарських машин і зараз потребує застосування теорії руху матеріальної точки (частинки) або твердого тіла по поверхнях, які використовуються при проектуванні нових конструкцій робочих органів.

**Постановка проблеми.** Теорія складного руху матеріальної точки

© С.Ф. Пилипака, О.В. Адамчук, Франчак Ян, Коренко Марош.
Механізація та електрифікація сільського господарства. Вип. 97. 2013.

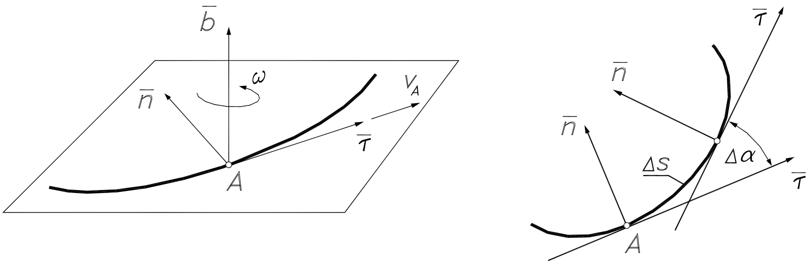
має завершену форму і навіть не потребує ніякого уточнення. Вона ґрунтується на тому, що рух точки досліджується одночасно по відношенню до двох систем координат. Одна з них (основна) приймається за нерухому, а друга здійснює по відношенню до нерухомої відносний рух за заданим законом. В свою чергу, в рухомій системі координат здійснюється відносний рух матеріальної точки. Сума цих рухів (відносного і переносного) складає абсолютний рух матеріальної точки по відношенню до основної системи координат. При цьому рухи (як переносний, так і відносний), як правило, задаються залежностями у функції часу.

Відомий також натуральний (природний) спосіб задання руху матеріальної точки, при якому швидкість і прискорення розглядається в проекціях на орти супровідного тригранника траєкторії (тригранника Френе). Однак, в наявній літературі не вдається знайти застосування тригранника Френе як рухому систему координат, у якій здійснює відносний рух матеріальна точка. Розробці теорії складного руху матеріальної точки по горизонтальній площині із застосуванням тригранника Френе присвячено дане дослідження.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Натуральний спосіб задання руху матеріальної точки вважається достатньо відомим і широко використовується у дослідженнях з багатьох питань галузі механізації сільського господарства та теорії сільськогосподарських машин. При цьому розглядається у переважній більшості простий рух матеріальних точок. Відомі приклади із застосуванням тригранника і формул Френе при розгляді руху твердого тіла в його системі, наприклад, літака [2]. У праці [3] розглянуто кінематику руху супровідного тригранника гвинтової лінії. В останніх наукових та навчальних публікаціях кінематика супровідного тригранника траєкторії, як твердого тіла, або взагалі не розглядається, або ж розглядається із посиланням на більш ранні дослідження та публікації [4]. Між тим, як показано в праці [5], тригранник і формули Френе можна успішно використовувати в задачах кінематики і динаміки складного руху матеріальної точки, зокрема при розгляді питань, що пов'язані з дослідженням сільськогосподарських машин.

**Мета дослідження.** Подальший розвиток теорії складного руху матеріальної точки по площині з застосуванням супровідного тригранника кривої і формул Френе.

**Основна частина.** В будь-якій точці кривої можна побудувати три взаємно перпендикулярні напрями. Одиничні орти вздовж них (дотична $\bar{\tau}$ , головна нормаль $\bar{n}$ і бінормаль $\bar{b}$ ) утворюють супровідний (натуральний) тригранник кривої або тригранник Френе. Для плоскої кривої орти $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ знаходяться в площині кривої, а орт $\bar{b}$ перпендикулярний до неї (див. рис. 1, а). Якщо рухати тригранник із заданою швидкістю $v_A$ вздовж кривої, то можна визначити швидкість і прискорення будь-якої точки тригранника, величина і напрям яких залежатимуть від кривини кривої. Швидкість точки тригранника складатиметься із швидкості полюса (початку координат *A*) і швидкості цієї точки в обертальному русі тригранника навколо миттєвої осі обертання, яка збігається із ортом бінормалі $\bar{b}$ . За певний проміжок часу $\Delta t$ тригранник при русі вздовж кривої займе нове положення, внаслідок переміщення на відстань $\Delta s$ і повертання на кут $\Delta\alpha$ (рис. 1, б).




а б

**Рис.1**. Супровідний тригранник Френе кривої: а- положення вектора миттєвої осі обертання; б- до визначення кута поворотуDa при переміщенні тригранника по кривій на відстань Ds (бінормаль $\bar{b}$ проекціюється в точку)

Величину кутової швидкості $\omega$ можна визначити, як граничне відношення приросту кута до приросту часу:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{d\alpha}{dt}. \tag{1}$$

Перейдемо від параметра часу *t* до дугової координати *s* (шляху вздовж дуги):

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\alpha}{ds} = v_A k, \tag{2}$$

де $k$ – кривина кривої у поточній точці *A*.

Таким чином, величина кутової швидкості тригранника залежить від швидкості його руху по кривій і кривини самої кривої в точці, де знаходиться вершина тригранника.

Закріпимо жорстко в системі тригранника точку *B* і знайдемо її швидкість. Радіус-вектор $\overline{r}_B$, який визначає положення точки *B* відносно нерухомої системи координат *Oxy* (рис. 2), можна задати за допомогою двох векторів: $\overline{r}_A$, який визначає положення вершини тригранника в системі координат *Oxy* і $\overline{\rho}$, який визначає положення точки *B* у системі тригранника. Величина радіус-вектора $\overline{r}_B$ буде дорівнювати:

$$\overline{r}_B = \overline{r}_A + \overline{\rho}\,. \tag{3}$$

Нехай в системі супровідного тригранника точка *B* задана вектором $\rho = const$, складові якого в проекціях на одиничні вектори (орти) мають значення $\rho_\tau$ і $\rho_n$ (рис. 2).

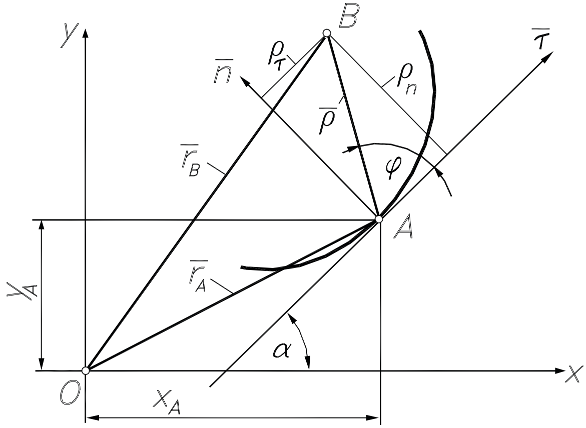



**Рис. 2.** Положення точки *B* у двох системах координат: нерухомій *Oxy* і рухомому триграннику кривої $\overline{\tau}\,\overline{n}\,\overline{b}$

Запишемо векторну суму (3) в проекціях на осі нерухомої системи координат *Oxy*. Матимемо:

$$\begin{aligned} x_B &= x_A + \rho_\tau \cos\alpha - \rho_n \sin\alpha; \\ y_B &= y_A + \rho_\tau \sin\alpha + \rho_n \cos\alpha. \end{aligned} \tag{4}$$

Продиференціювавши (4) по часу $t$, знайдемо проекції швидкості точки *B* на координатній осі нерухомої системи:

$$\begin{aligned}&\frac{dx_B}{dt}=\frac{dx_B}{ds}\frac{ds}{dt}=v_A\frac{dx_B}{ds}=v_A\left(x'_A-\rho_\tau\alpha'\sin\alpha-\rho_n\alpha'\cos\alpha\right);\\&\frac{dy_B}{dt}=\frac{dy_B}{ds}\frac{ds}{dt}=v_A\frac{dy_B}{ds}=v_A\left(y'_A+\rho_\tau\alpha'\cos\alpha-\rho_n\alpha'\sin\alpha\right).\end{aligned}\qquad(5)$$

У виразах (5) здійснено перехід від параметра часу $t$ до дугової координати $s$ – довжини дуги кривої. У цьому випадку складові виразів (5) набувають геометричного змісту [6]:

$$x'_A=\cos\alpha;\qquad y'_A=\sin\alpha;\qquad \alpha'=k.\qquad(6)$$

Із врахуванням (6) проекції абсолютної швидкості точки $B$ у (5) на осі нерухомої системи координат запишуться так:

$$\begin{aligned}&v_{Bx}=x'_B=v_A\left[\left(1-k\rho_n\right)\cos\alpha-k\rho_\tau\sin\alpha\right];\\&v_{By}=y'_B=v_A\left[\left(1-k\rho_n\right)\sin\alpha+k\rho_\tau\cos\alpha\right].\end{aligned}\qquad(7)$$

Результат (7) можна також отримати за відомими формулами кінематики точки у складному русі, як це показано в праці [7].

Геометрична сума складових (7) дасть величину абсолютної швидкості точки $B$:

$$v_B=v_A\sqrt{\left(1-k\rho_n\right)^2+k^2\rho_\tau^{\ 2}}.\qquad(8)$$

Тепер розглянемо альтернативний варіант із застосуванням формул Френе. Векторне рівняння (3) в системі супровідного тригранника запишеться так:

$$\overline{R_B}=\overline{r_A}+\bar{\tau}\rho_\tau+\bar{n}\rho_n.\qquad(9)$$

Якщо вважати, що координати $\rho_\tau$ і $\rho_n$ при русі тригранника по кривій не змінюються, тобто точка $B$ закріплена в тригграннику нерухомо, то її абсолютну швидкість можна знайти диференціюванням виразу (9) по часу $t$. Однак, положення тригранника на кривій залежить від дугової координати $s$, тому при диференціюванні (9) потрібно перейти від незалежної змінної $t$ до дуги $s$:

$$\frac{d\overline{R_B}}{dt}=\frac{d\overline{R_B}}{ds}\cdot\frac{ds}{dt}=v_A\frac{d\overline{R_B}}{ds}=v_A\left[\frac{d\overline{r_A}}{ds}+\frac{d\bar{\tau}}{ds}\rho_\tau+\frac{d\bar{n}}{ds}\rho_n\right].\qquad(10)$$

У виразі (10) похідна $\dfrac{d\overline{r_A}}{ds}=\bar{\tau}$, тобто це є одиничний орт дотичної.

Решта похідних – $\dfrac{d\bar{\tau}}{ds}$ і $\dfrac{d\bar{n}}{ds}$ – є відомими формулами Френе, які мають кінематичну інтерпретацію [6]. Це основні формули диференціальної геометрії, у яких незалежною змінною служить дугова координата $s$ (наводимо спрощений варіант для плоскої кривої):

$$\overline{\tau'} = k\bar{n};\ \overline{n'} = -k\bar{\tau}, \tag{11}$$

де $k$ – кривина кривої, яка задається натуральним рівнянням $k = k(s)$.

Формули Френе (11) дають можливість швидко і просто одержати похідні по дуговій координаті $s$ від ортів $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ в проекції на ці орти. У кінематичній інтерпритації похідні (11) є проекціями швидкостей кінців одиничних ортів $\bar{\tau}$ і $\bar{n}$ на ці орти в обертальному русі тригранника [7]. Таким чином, застосування формули Френе (11) дає можливість дуже просто знаходити швидкість точки *B* у обертальному русі навколо полюса *A*. Ще більш ефективно вони працюють при знаходженні абсолютної швидкості точки *B* у складному русі, до розгляду якого перейдемо далі.

Тепер вважатимемо, що точка *B* рухається в системі супровідного тригранника, тобто вектор $\bar{\rho}$ є функцією часу: $\bar{\rho} = \bar{\rho}(t)$. В такому випадку абсолютна швидкість точки *B* визначиться як сума переносної швидкості, яку можна знайти за формулою (8), і відносної, яку одержимо диференціюванням вектора $\bar{\rho}$ по часу $t$. Однак, переносна швидкість є функцією дугової координати $s$, тому відносна швидкість теж має бути приведена до цієї незалежної змінної:

$$\bar{v}_r = \frac{d\bar{\rho}}{dt} = \frac{d\bar{\rho}}{ds}\frac{ds}{dt} = v_A \frac{d\bar{\rho}}{ds}. \tag{12}$$

Розпишемо векторне рівняння (12), яке визначає відносну швидкість в системі тригранника, на дві складові по напрямних ортів $\bar{\tau}$, $\bar{n}$ і додамо до переносної швидкості (8). Після групування членів і винесення швидкості полюса $v_A$ за дужки, абсолютну швидкість точки *B* у проекціях на орти тригранника можна записати:

$$\bar{v}_B = v_A\left[\bar{\tau}\left(1 - k\rho_n + \rho'_\tau\right) + \bar{n}\left(k\rho_\tau + \rho'_n\right)\right]. \tag{13}$$

Покажемо, як просто можна одержати результат (13) за допомогою формул Френе. Для цього продиференціюємо вираз (9) за умови, що координати $\rho_\tau$ і $\rho_n$ є функціями дугової координати $s$:

$$\overline{R'_B} = \overline{\tau} + \overline{\tau'}\rho_\tau + \overline{\tau}\rho'_\tau + \overline{n'}\rho_n + \overline{n}\rho'_n. \qquad (14)$$

Підставивши в (14) вирази похідних ортів тригранника із формул Френе (11), одержимо:

$$\begin{aligned}\overline{R'_B} &= \overline{\tau} + nk\rho_\tau + \tau\,\rho'_\tau - \tau\,k\rho_n + \overline{n}\rho'_n = \\ &= \overline{\tau}(1 - k\rho_n + \rho'_\tau) + \overline{n}(k\rho_\tau + \rho'_n).\end{aligned} \qquad (15)$$

Порівнюючи вирази (13) і (15), можна зробити висновок, що диференціювання рівняння (9) із застосуванням формул Френе дає абсолютну швидкість точки, заданої в системі тригранника змінною відстанню $\rho = \rho(s)$ в проекціях на орти тригранника при швидкості руху тригранника по кривій $v_A$ = 1 *м/с*. У випадку, коли швидкість $v_A$ відмінна від одиниці, необхідно кожну проекцію помножити на величину $v_A$. Отже, можна сформулювати наступне правило:

Якщо точка в системі рухомого супровідного тригранника кривої задана радіус-вектором у формі (9), то для знаходження її абсолютної швидкості в проекціях на орти цього ж тригранника необхідно продиференціювати рівняння (9) по дуговій координаті кривої $s$ із застосуванням формул Френе і отриманий результат помножити на швидкість руху вершини тригранника по кривій.

Модуль абсолютної швидкості точки *B* згідно виразу (13) запишеться:

$$v_B = v_A\sqrt{\left(1 - k\rho_n + \rho'_\tau\right)^2 + \left(k\rho_\tau + \rho'_n\right)^2}; \qquad (16)$$

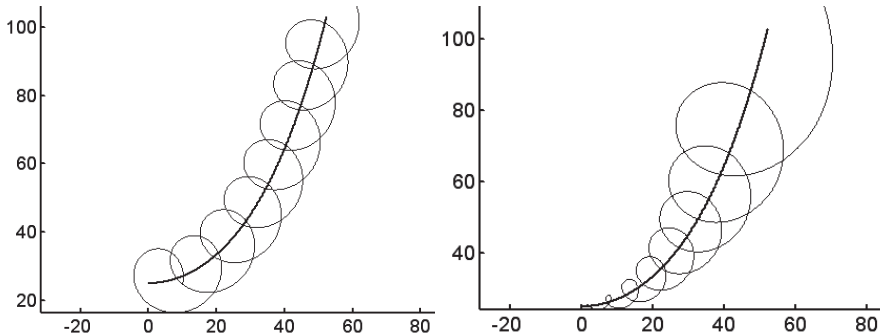
Тепер перейдемо до знаходження абсолютної траєкторії точки *B*, тобто траєкторії у нерухомій системі координат *Oxy*. Залежності $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$, $\rho_n = \rho_n(s)$ задають траєкторію руху у системі супровідного тригранника, тобто траєкторію відносного руху. Сума відносного і переносного рухів точки *B* дасть траєкторію її абсолютного руху. Отже нам потрібно перейти від векторних рівнянь (9) до їх координатного запису в проекції на осі нерухомої системи координат. Завдяки руху тригранника положення його вершини $A(x_A, y_A)$ в системі *Oxy* змінюватиметься в залежності від дугової координати $s$. Координати вершини *A* в проекціях на осі нерухомої системи *Oxy* можна знайти, якщо відома залежність $k = k(s)$ – так зване натуральне рівняння кривої. Формули переходу мають вигляд [6]:

$$x_A = \int \cos\left(\int k ds\right) ds; \qquad y_A = \int \sin\left(\int k ds\right) ds, \qquad (17)$$

де $\alpha = \int kds$ – закономірність зміни кута $\alpha$ (рис. 2).

Абсолютну траєкторію точки *B* у системі координат *Oxy* одержимо при паралельному переносі вершини *A* вздовж осей на величини (17) і одночасному переході від координат точки *B* ( $\rho_\tau$ , $\rho_n$ ) в системі тригранника до координат точки $B(x_B, y_B)$ в нерухомій системі координат. Для цього суміщаємо їх осі за рахунок повороту тригранника навколо бінормалі на кут $\alpha = \alpha(s)$. Після повороту рухомої системи і додавання векторне рівняння (9) запишеться в проекціях на осі нерухомої системи координат:

$$\begin{aligned} x_B &= \rho_\tau \cos\left(\int kds\right) - \rho_n \sin\left(\int kds\right) + \int \cos\left(\int kds\right) ds; \\ y_B &= \rho_\tau \sin\left(\int kds\right) + \rho_n \cos\left(\int kds\right) + \int \sin\left(\int kds\right) ds. \end{aligned} \tag{18}$$




а б

**Рис. 3**. Абсолютні траєкторії точки *B* для різних залежностей $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ і $\rho_n = \rho_n(s)$, побудовані за рівняннями (18): а- в системі тригранника відносною траєкторією є коло; б- рух подібний до попереднього із зростанням радіуса кола по лінійному закону

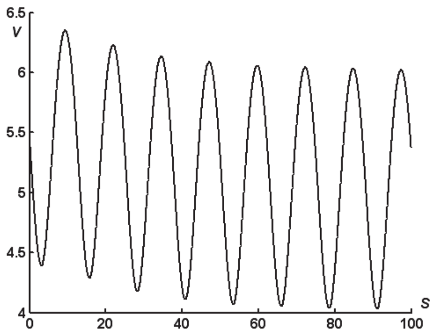
Розглянемо приклади на додавання двох рухів – переносного руху тригранника вздовж кривої і обертального руху точки в триграннику навколо початку координат. Якщо напрямною (вихідною) лінією є пряма, то абсолютною траєкторією є відома крива, яку описує точка мотовила жниварки. За вихідну криву приймемо ланцюгову лінію, натуральне рівняння якої має вигляд:

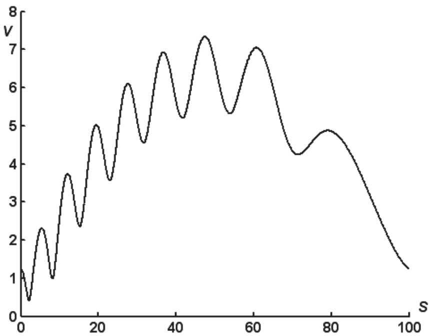
$$k = a/(a^2 + s^2), \tag{19}$$

де *a* – постійна величина.

Абсолютну швидкість можна знайти за формулами (13) та (16) і абсолютну траєкторію за рівняннями (18) у випадку, коли відносний рух у триграннику заданий залежностями $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ і $\rho_n = \rho_n(s)$.

На рис. 3 за рівняннями побудовані абсолютні траєкторії точки $B$ для різних залежностей $\rho_\tau = \rho_\tau(s)$ і $\rho_n = \rho_n(s)$ за заданою натуральним рівнянням (19) вихідною напрямною кривою. Значення постійної $a$ прийнято $a$ = 25, зміна дугової координати $s$ відбувалася в межах $s$ = 0...100. При $\rho_\tau(s) = \rho_n(s) = 0$ із рівнянь (18) одержуємо вихідну криву – ланцюгову лінію, яка на рис. 3 зображена потовщеною. На рис. 4 показано відповідні графіки зміни модуля абсолютної швидкості точки $B$, побудовані за формулою (16) при $v_A$ = 1 *м/с*.




а б

**Рис. 4**. Графіки зміни модуля абсолютної швидкості точки $B$: а- графік зміни швидкості точки для її абсолютної траєкторії, показаної на рис. 3, а; б- графік зміни швидкості точки для її абсолютної траєкторії, показаної на рис. 3, б

**Висновки.** Застосування супровідного тригранника плоскої кривої за рухому систему координат, по відношенню до якої здійснюється відносний рух точки, є цілком можливим при дослідженнях складного руху матеріальної точки по площині. Формули Френе дають можливість досить швидко і просто знаходити абсолютну швидкість матеріальної точки у складному її русі в проекціях на орти тригранника та знаходити абсолютну траєкторію в нерухомій системі координат. Розроблений метод значно спрощує розв’язання задач складного руху матеріальної точки, що обумовлює його подальший розвиток та ефективне застосування.

## БІБЛІОГРАФІЯ

1. *Василенко П.М.* Теория движения частицы по шероховатым поверхностям сельскохозяйственных машин. – К.: изд-во Укр. акад. сельск. наук, 1960. – 283 с.
2. *Лурье А.И.* Аналитическая механика. – М.: ФМ, 1961. – 823 с.
3. *Лойцянский Л.Г.*, *Лурье А.И.* Курс теоретической механики. В двух томах – Т. 1: Статика и кинематика. – М.: ГИТТЛ, 1954. – 379 с.

4 *Бутенин Н.В.*, *Лунц Я.Л.*, *Меркин Д.Р.* Курс теоретической механики. В двух томах – Т. 1: Статика и кинематика. – 4-е изд., исправленное – М.: Наука, 1985. – 240 с.

5. *Пилипака С.Ф.* Дослідження руху матеріальної частинки по горизонтальному диску, який обертається навколо вертикальної осі, за допомогою рухомого натурального тригранника і формул Френе // Механізація та електрифікація сільського господарства. Міжвідомчий тематичний науковий збірник. – Глеваха, 2005. – Вип. 89. – С. 49-60.
6. *Милинский В.И.* Дифференциальная геометрия. – Л.: КУБУЧ, 1934. – 332 с.
7. *Пилипака С.Ф.* Кінематична інтерпретація руху супровідних тригранників Френе і Дарбу через внутрішні параметри кривих // Науковий вісник Національного аграрного університету. – К.: НАУ, 1998. – Вип.4. – С. 143-146.

## РАЗРАБОТКА ТЕОРИИ СЛОЖНОГО ДВИЖЕНИЯ МАТЕРИАЛЬНОЙ ТОЧКИ НА ПЛОСКОСТИ

*Исследовано аналитически сложное движение материальной точки, относительное перемещение которой происходит в подвижном трехграннике кривой, заданной натуральными уравнениями. Переносное движение трехгранника определяется дифференциальными характеристиками кривой. Доказана правомочность использования формул Френэ для нахождения абсолютной скорости точки в проекциях на орты подвижного трехгранника. Найдены абсолютные траектории движения, осуществлено визуализацию полученных результатов.*

***Ключевые слова:*** *сложное движение, материальная точка, относительное перемещение, подвижной трехгранник Френэ.*

## SUBSTANTIVE PROVISIONS OF THE THEORY OF DIFFICULT MOVEMENT OF A MATERIAL POINT ON A PLANE

*The complicated driving of a point which relative transition of which happens* *in mobile three-edge of a curve given by the natural equations is considered. The portable driving of three-edge is determined by differential performances of a curve. Competence of usage of the Frenet's formulas for determination of absolute velocity of a point in projections to basis vectors of mobile three-edge is proved. The absolute trajectories of driving are retrieved visualization of the obtained outcomes is realized.*

***Key words**: complex motion, a material point, relative movement of mobile trihedron Frene.*

**УДК 631.33**

# ОБГРУНТУВАННЯ ЕКСПЛУАТАЦІЙНИХ ПАРАМЕТРІВ ПНЕВМАТИЧНОГО БАГАТОКАНАЛЬНОГО ТУКОРОЗПОДІЛЬНИКА

**Ю.Г. Вожик**, канд.техн.наук
*ННЦ «ІМЕСГ»*

*Обгрунтовано експлуатаційні параметри багатоканального тукорозподульника.*

***Ключові слова**: пневматичний багатоканальний тукорозподільник, потужність, робоча ширина захвату, доза внесення, інтервал між розпилювачами, масова місткість бункера, продуктивність, прямі експлуатаційні витрати.*

**Проблема.** При обґрунтуванні експлуатаційних параметрів пневматичного багатоканального тукорозподільника (далі ПБТ) головним його чинником є робоча ширина захвату через те, що занижені її значення  можуть призвести до зменшення економічних показників, а значне її підвищення – до невиправданого ускладнення машини і зменшення її надійності.

На експлуатаційні параметри впливають з одного боку як енергетичні показники агрегату, так і економічні, що треба розглядати в комплексі, враховуючи при цьому і фактори конструкційного характеру – масову місткість бункера й інтервал між розпилювачами.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питання оптимізації технологічних параметрів машини для внесення мінеральних до-

© Ю.Г. Вожик.
Механізація та електрифікація сільського господарства. Вип. 97. 2013.