УДК 514.18

АНАЛІТИЧНІ УМОВИ КОНСТРУЮВАННЯ КАНАЛОВОЇ ПОВЕРХНІ, ВІДНЕСЕНОЇ ДО ЛІНІЙ КРИВИНИ, ЯК МНОЖИНИ КІЛ КРИВИНИ ПРОСТОРОВОЇ КРИВОЇ

С. Ф. Пилипака, докт. техн. наук, проф.Національний університет біоресурсів і природокористування України; **М. М. Муквич,** канд.. техн. наук Відокремлений підрозділ Національного університету біоресурсів і природокористування України «Ніжинський агротехнічний інститут»

Знайдено аналітичні умови утворення каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, у системі супровідного тригранника просторової кривої. Циклічний каркас ліній кривини каналової поверхні утворено за допомогою кіл кривини конічної гвинтової лінії. Отримано параметричні рівняння каналової поверхні, здійснено її візуалізацію.

***Ключові слова:** каналова поверхня, супровідний тригранник Френе, лінія центрів.*

Стан проблеми у загальному вигляді. Однією із важливих задач теорії поверхонь і координатних сіток є задача аналітичного опису поверхонь, віднесених до ліній кривини. Перевагою вказаного аналітичного задання є особливо простий вигляд першої та другої квадратичних форм у будь-якій точці поверхні, що дозволяє здійснювати дослідження напружено-деформованого стану різноманітних технічних форм. При цьому важливим є знаходження параметричних рівнянь поверхонь без використання наближених методів математики для уникнення суперпозиції (накладання) чисельних методів у подальшому дослідженні взаємодії поверхні із середовищем. Каналові поверхні, утворені циклічним каркасом кіл сталого радіуса (трубчасті поверхні) або змінного радіуса, широко застосовуються при проектуванні різноманітних технічних форм, тому задача їх віднесення до ліній кривини є особливо важливою.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Серед конструктивних способів віднесення каналових поверхонь до ліній кривини використовують спосіб, при якому циклічний каркас каналової поверхні утворюється за допомогою руху твірного кола у системі супровідного тригранника Френе просторової напрямної кривої [2, 4, 5, 6]. Тоді задача віднесення до ліній кривини каналової поверхні приводить до диференціального рівняння Ріккаті, яке у загальному випадку не інтегрується у квадратурах [4].

Мета досліджень — визначити аналітичні умови віднесення каналової поверхні до ліній кривини як множини кіл просторової кривої, знайти параметричні рівняння вказаної поверхні та здійснити її візуалізацію.

Основний матеріал досліджень. Звузимо початкові умови, задавши просторову лінію f векторним рівняннями у вигляді функції довжини її дуги s:

$$\overline{r} = \overline{r}(s) = x(s)\cdot\overline{i} + y(s)\cdot\overline{j} + z(s)\cdot\overline{k}, \tag{1}$$

де $\overline{i}$; $\overline{j}$; $\overline{k}$ – орти нерухомої системи координат $Oxyz$. Кожній точці A просторової кривої (1) поставимо у відповідність її коло кривини, яке буде знаходитись у стичній площині тригранника Френе (рис.1).

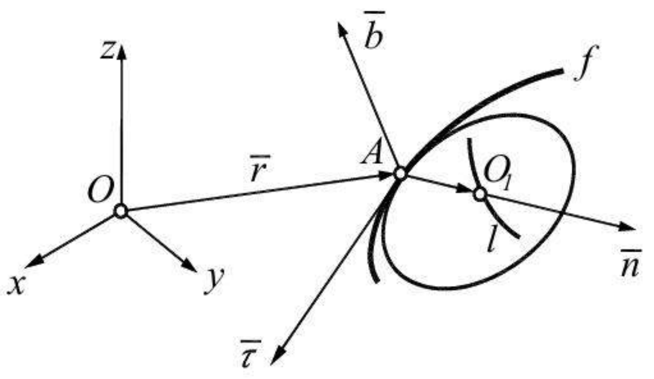

Рис.1. *Утворення каналової поверхні, як множини кіл кривини просторової лінії*

Радіус кола кривини дорівнює: $R = R(s) = \frac{1}{k(s)}$, де $k = k(s) -$ кривина просторової кривої f. Тоді, при русі тригранника Френе по просторовій напрямній кривій f, циклічний каркас кіл кривини кривої f утворить сім'ю із ліній кривини каналової поверхні [4]. Векторне рівняння каналової поверхні, утвореної множиною кіл кривини просторової кривої f, заданої рівняннями (1), має вигляд [4]:

$$\overline{R}(v,s) = \overline{r}(s) + \overline{\tau} \cdot \frac{1}{k(s)} \cdot \cos v + \overline{n} \cdot \frac{1}{k(s)} \cdot \left(1 + \sin v\right), \tag{2}$$

де $v -$ незалежна змінна, $k = k(s) -$ кривина просторової кривої f.

Для знаходження сім'ї ліній, ортогональної до множини кіл циклічного каркаса, необхідно розв'язати диференціальне рівняння ортогональних траєкторій, яке для каналової поверхні, заданої векторним рівнянням (2), має вигляд [4]:

$$\frac{dv}{ds} = -\left(\left(\frac{1}{k(s)}\right)_s' \cdot \cos v + 1\right) \cdot k(s). \tag{3}$$

Розв'язок диференціального рівняння (3) є аналітичною умовою віднесення каналової поверхні, циклічний каркас якої утворено множиною кіл кривини просторової кривої f, до ліній кривини. Диференціальне рівняння (3) відноситься до диференціальних рівнянь, *не розв'язуваних відносно похідної* [7] щодо невідомої функції $v = v(s)$. Здійснивши заміну:

$$t(v) = tg\frac{v}{2}, \tag{4}$$

отримаємо: $v = 2 \cdot arctg\left(t\right)$; $dv = \frac{2}{1+t^2} \cdot dt.$

Підстановка останніх рівностей у диференціальне рівняння (3) після спрощень перетворить його у неповне диференціальне рівняння Ріккаті [7]:

$$\frac{dt}{ds} = -\left(t^2\left(s\right) \cdot \frac{k^2\left(s\right) + k_s'}{2 \cdot k\left(s\right)} + \frac{k^2\left(s\right) - k_s'}{2 \cdot k\left(s\right)}\right), \tag{5}$$

де $t = t(s)$ – невідома функція, $k(s)$ – задана кривина просторової напрямної кривої (1).

Диференціальне рівняння (5) у загальному випадку не інтегрується в квадратурах, але може бути зведене до диференціального рівняння з відокремлюваними змінними для окремих функцій $k(s)$. Зокрема, можливі випадки:

1) Якщо $k = const$, то отримаємо умову віднесення трубчастої поверхні (циклічний каркас кіл сталого радіуса $R = \frac{1}{k}$) до ліній кривини. Аналітичний опис указаної поверхні детально здійснено в роботі [1].
2) Якщо $\frac{k^2(s) + k_s'}{2 \cdot k(s)} = 0$, тоді диференціальне рівняння $k^2(s) + k_s' = 0$ має деякий частинний розв'язок $k(s) = \frac{1}{s}$ і умову віднесення каналової поверхні до ліній кривини, записану у вигляді: $v(s) = 2 \cdot arctg(u - \ln s)$. Аналітичний опис указаної поверхні детально здійснено в роботі [7].
3) Якщо у диференціальному рівнянні (5): $a \cdot \frac{k^2(s) + k_s'}{2 \cdot k(s)} = \frac{k^2(s) - k_s'}{2 \cdot k(s)}$,

де a – деяке стале число $(a > 1)$, то кривина напрямної кривої дорівнює:

$$k(s) = \frac{a+1}{(a-1) \cdot s}. \tag{6}$$

Підстановка виразу кривини (6) у диференціальне рівняння Ріккаті (5) зводить його до рівняння: $\frac{dt}{t^2(s) + a} = -\frac{ds}{(a-1)s}$, загальним розв'язком якого є функція:

$$t(s) = \sqrt{a} \cdot tg\left(u + \frac{\sqrt{a}}{1-a} \ln s\right). \tag{7}$$

У виразі (7) змінна u – довільна стала інтегрування, яка буде новою змінною у параметричних рівняннях поверхні замість змінної v. Врахувавши заміну (4) для рівності (7), отримаємо *аналітичну умову віднесення каналової поверхні до ліній кривини,* як множини кіл кривини просторової кривої:

$$v = 2\,arctg\left[\sqrt{a}\cdot tg\left(u+\frac{\sqrt{a}}{1-a}\ln s\right)\right]. \tag{8}$$

У ролі просторової напрямної кривої (1) розглянемо *конічну гвинтову лінію* укосу, задану залежністю (6) кривини від довжини дуги і кутом $\beta = const$, який утворює дотична до напрямної кривої із горизонтальною площиною. Тоді параметричні рівняння вказаної кривої знайдемо за формулами [3]:

$$x = \cos\beta\cdot\int\cos\left(\frac{1}{\cos\beta}\int kds\right)ds;$$
$$y = \cos\beta\cdot\int\sin\left(\frac{1}{\cos\beta}\int kds\right)ds; \tag{9}$$
$$z = s\cdot\sin\beta.$$

Підставивши (6) у (9), отримаємо параметричні рівняння конічної гвинтової лінії:

$$x(s) = A\cdot s\cdot\left((a-1)\cos\beta\cdot\cos\left(\gamma(s)\right)+(a+1)\sin\left(\gamma(s)\right)\right);$$
$$y(s) = A\cdot s\cdot\left((a-1)\cos\beta\cdot\sin\left(\gamma(s)\right)-(a+1)\cos\left(\gamma(s)\right)\right);$$
$$z(s) = s\cdot\sin\beta, \tag{10}$$

де $A = \dfrac{(a-1)\cos^2\beta}{(a+1)^2+(a-1)^2\cos^2\beta}$ – стала величина, $\gamma(s) = \dfrac{(a+1)}{(a-1)\cos\beta}\cdot\ln s.$

За методикою, детально описаною у роботі [3], знайдемо параметричні рівняння, які відповідають векторному рівнянню (2) каналової поверхні, утвореної множиною кіл кривини конічної гвинтової лінії:

$$X(v,s) = x(s)+\frac{a-1}{a+1}\cdot s\cdot\left(\cos\beta\cos v\cos\gamma-(1+\sin v)\sin\gamma\right);$$
$$Y(v,s) = y(s)+\frac{a-1}{a+1}\cdot s\cdot\left(\cos\beta\cos v\sin\gamma+(1+\sin v)\cos\gamma\right); \tag{11}$$
$$Z(v,s) = z(s)+\frac{a-1}{a+1}\cdot\sin\beta\cdot s\cdot\cos v;$$

де $x(s), y(s), z(s)$ – параметричні рівняння (10), $\gamma(s) = \dfrac{(a+1)}{(a-1)\cos\beta}\cdot\ln s.$

Каналова поверхня, задана рівняннями (11), має тільки одну сім'ю ліній кривини — циклічний каркас. Якщо у рівняння (11) підставити умову (8), тобто $v = 2\,arctg\left[\sqrt{a}\cdot tg\left(u + \frac{\sqrt{a}}{1-a}\ln s\right)\right]$, то отримаємо параметричні рівняння $X(u,s), Y(u,s), Z(u,s)$ каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини конічної гвинтової лінії (рис. 2).

Висновки.

При утворенні циклічного каркаса каналової поверхні множиною кіл кривини просторової кривої f *аналітичними умовами віднесення цієї поверхні до ліній кривини є* загальні розв'язки диференціального рівняння Ріккаті (5). Його вдалося проінтегрувати у квадратурах тільки у випадку використання у ролі напрямної просторової кривої — лінії, одне із натуральних рівнянь якої має вигляд: $k(s) = \frac{1}{s}$ або $k(s) = \frac{a+1}{(a-1)\cdot s}$, де a – параметр кривої. Знайдено параметричні рівняння каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, та здійснено її візуалізацію.

Бібліографія

1. *Несвідомін В. М.* Конструювання трубчастої поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини гвинтової лінії / В. М. Несвідомін, В. М. Бабка, М. М. Муквич // Геометричне та комп'ютерне моделювання. — Харків: ХДУХТ, 2011. — № 28. — С.45-50.
2. *Пилипака С. Ф.* Конструювання каналових поверхонь Іоахімсталя сім'ями ліній кривини / С. Ф. Пилипака // Прикладна геометрія та інженерна графіка. — К.: КДТУБА, 1998. — № 64. – С. 171-173.
3. *Пилипака С. Ф.* Конструювання лінійчатих поверхонь загального виду в системі супровідного тригранника напрямної просторової кривої / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Праці Таврійської державної агротехнічної академії. — Мелітополь: ТДАТА, 2007. — № 4. — Прикл. геометрія та інж. граф. — Т. 35. — С. 10-18.

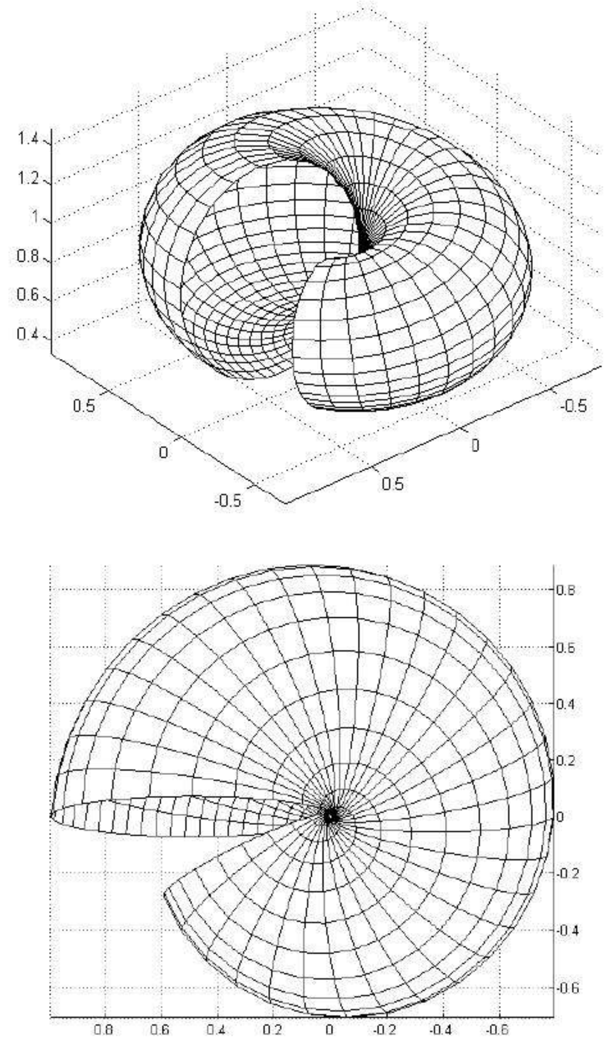

***Рис. 2**. Каналова поверхня, віднесена до ліній кривини та її горизонтальна проекція*

4. *Пилипака С. Ф*. Аналітична умова віднесення поверхні до ліній кривини як множини кіл кривини просторової кривої / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Міжвузівський збірник «Комп'ютерно-інтегровані технології: освіта, наука, виробництво». — Луцьк: видавництво ЛНТУ, 2011. — № 6. — С. 178-181.
5. *Муквич М. М.* Конструювання каналової поверхні, віднесеної до ліній кривини, як множини кіл кривини конічної гвинтової лінії [Електронний ресурс] / М. М. Муквич // Наукові доповіді НУБіП України. — 2013. — 1/37. — Режим доступу до журн.: http://www.nbuv.gov.ua/e-journals/Nd/2013_1/13mmm.pdf.
6. *Пилипака С. Ф.* Один із способів віднесення каналової поверхні до ліній кривини у системі супровідного тригранника напрямної кривої / С. Ф. Пилипака, М. М. Муквич // Прикладна геометрія та інженерна графіка. Праці / Таврійський державний агротехнологічний університет — Вип. 4, Т. 57. — Мелітополь: ТДАТУ, 2013. — С.183-190.
7. *Самойленко А. М.* Дифференциальные уравнения /А. М. Самойленко, С. А. Кривошея, Н. А. Перестюк. — К.: Вища школа, 1989. — 384 с.

АНАЛИТИЧЕСКИЕ УСЛОВИЯ КОНСТРУИРОВАНИЯ КАНАЛОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОТНЕСЕННОЙ К ЛИНИЯМ КРИВИЗНЫ, КАК МНОЖЕСТВА ОКРУЖНОСТЕЙ КРИВИЗНЫ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ КРИВОЙ

Найдены аналитические условия образования каналовой поверхности, отнесенной к линиям кривизны в системе сопровождающего трёхгранника пространственной кривой. Циклический каркас линий кривизны каналовой поверхности образован с помощью окружностей кривизны конической винтовой линии. Получены параметрические уравнения каналовой поверхности, осуществлена её визуализация.

Ключевые слова: *каналовая поверхность, сопровождающий трёхгранник Френе, линия центров*

THE ANALYTICAL CONDITIONS OF A CONSTRUCTING OF A CANAL SURFACE, REFERRED TO CURVATURE LINES, AS A SET OF CIRCLES OF THE CURVATURE OF A SPACE CURVES

We found the analytical conditions for the formation of channels surface, referred to the curvature lines in the system of an accompanying three-edge of a *space curves. A cyclic framework of the curvature lines of the canal surface was formed by the curvature circles of a conical helix. Parametric equations of the canal surface were obtained and visualized.*

Key words: *canal surface, accompanying three-edge of Frenet, line of centers.*