

**ОПТИМІЗАЦІЯ ПАРАМЕТРІВ ФОТОСИНТЕЗУ
В РІВНЯННЯХ ЗРОСТАННЯ ДІАМЕТРІВ ДЕРЕВНИХ РОСЛИН
КОНСОРЦІЙНИХ ЕКОТОНІВ ЗАХИСНОГО ТИПУ**

**OPTIMIZATION OF PHOTOSYNTHESIS PARAMETERS
IN EQUATIONS OF DIAMETER PLANTS GROWTH OF CONCORDIUMS
OF PROTECTED TYPE ECOTONS**

Обшита А. Ф.¹, д-р техн. наук, проф., Руда М. В.², асист., Сорока І. Й.³, ст. викл.

¹ *кафедра обчислювальної математики та програмування,*

Національний університет «Львівська політехніка», Україна; e-mail: obshta2002@gmail.com

² *кафедра екологічної безпеки та природоохоронної діяльності,*

Національний університет «Львівська політехніка», Україна; e-mail: marichkarmv@gmail.com

³ *кафедра технологій управління, Національний університет «Львівська політехніка», Україна*

<https://doi.org/10.23939/istcmtm2018.02.064>

Анотація. На основі запропонованих структур КЕЗТ розроблено математичну модель зростання діаметрів деревних рослин. Це дасть змогу прогнозувати індекс стану консорційних екотонів захисного типу (КЕЗТ). Індекс стану КЕЗТ є одним з важливих параметрів якості функціонування лісових насаджень. Індекс стану деревостану відображає життєздатність деревного пологу через середньозважений ступінь облистяності крон і дає відносне уявлення про біологічну продуктивність та екологічну асимілятивну здатність досліджуваної ділянки КЕЗТ. Якість насадження оцінюють за двома показниками: життєздатністю та захисною ефективністю. На основі статистичного опрацювання зростання висот та діаметрів дубів збільшення висоти та діаметра середнього дерева для заданої ділянки подано функціями Річардса – Чепмена. Для врахування впливу фотосинтезу на ріст дерев необхідно перейти до математичного моделювання зростання лінійних параметрів диференціальним рівнянням, яке одержано на підставі прозорих фізико-біологічних засад.

Ключові слова: консорційні екотони захисного типу, захисні лісові насадження, моделювання ходу росту насаджень, багатокритеріальна оцінка якості, екологічний моніторинг.

Annotation. Ased on the proposed structures of the consortium of protected type ecotones, mathematical model of tree diameter growth has been developed. It allows predict the index of the state. The status index of the last is one of the important parameters of the quality of forest plantations functioning. Quality indexes of CPTE functioning on the basis of the conducted experimental studies are specified and the criteria of their gradation are formulated. Consideration is fulfilled by evaluating the obtained results and taking into account the major physical and chemical parameters. It makes possible the most objectively classification of CPTEs quality and furthermore normalization of their characteristics. Constructive-ecological concept of the CPTE is developed. Its structure is designed as an integral element of forest plantations of protective type which consist of several plant species different in height, texture, habit, and which grow simultaneously in close proximity, merging into one structural unit to protect the environment from railway lines.

Received results allow state that the problem of optimization of photosynthesis parameters for considered structures is solved. Moreover, the algorithm for predicting the trees' diameter and height alterations of over the time depending on conditions of competition for light is obtained. The found parameters can be used to predict the growth of the trees' diameter, of the plantations' mass, and of the leaf area. This creates the underpinning pillar for prediction of one important quality parameter of the functioning of protective plantations that is the CPTE state index. The high mentioned the valuable instrument of the consortium of protected type ecotones state assessment.

Key words: protective consortive ecotone, protection of railroad tracks, horizontal and vertical structures, quality monitoring.

Вступ

Вплив залізничного транспорту з його стаціонарними та пересувними джерелами забруднення навколишнього природного середовища (НПС) породжує багато проблем, оскільки спричиняє: порушення стійкості природних ландшафтних комплексів (ПЛК) транспортною інфраструктурою унаслідок розвитку ерозій і обвалів; забруднення атмосфери відпрацьованими газами; постійне зростання рівня забруднення ґрунту нафтопродуктами, полювантами та седиментами, а також продуктами видудання й осипання сипких вантажів (вугілля, руда, цемент тощо). Одним із важливих екологічних методів

захисту НПС є використання консорційних екотонів захисного типу (КЕЗТ) – природних дискретних структурних одиниць рослинного покриву, які мають специфічні властивості, а саме: здатність захищати НПС від шуму, шкідливих речовин тощо, а залізничну колію – від снігу, вітру, дії інших природно-кліматичних факторів. Сьогодні в Україні актуалізується вирішення науково-технічного завдання вдосконалення нормативно-технічного забезпечення якості (захисної ефективності та життєздатності) функціонування КЕЗТ і гармонізації його з міжнародними стандартами.

Одним із глобальних підходів до підвищення якості функціонування КЕЗТ є модернізування норм

та вимог, які ставляться до КЕЗТ, на основі міжнародних стандартів менеджменту якості та екологічного менеджменту. За таких умов актуалізуються питання щодо методів оцінювання якості КЕЗТ, використання яких сприятиме підвищенню ефективності функціонування інформаційної системи моніторингу захисту НПС.

Постановка проблеми

Аналіз стандартів ISO 9001:2015 та ISO 14001:2015 показав, що їх вимоги до нормування якості захисних насаджень передбачають, зокрема, не лише ретельне дослідження зовнішнього і внутрішнього середовищ насаджень, а й застосування процесного підходу до оцінювання впливу основних ресурсів зовнішнього середовища на процеси функціонування екосистем.

Закономірності росту, динаміки і продуктивності лісових насаджень відображають за допомогою таблиць ходу росту (ТХР), що містять вікову динаміку основних таксаційних показників деревостанів за прийнятими класифікаційними одиницями, якими є класи бонітету або типи лісу та результати досліджень ростових процесів у лісах.

Нормування якості КЕЗТ на основі стандартів ISO 9001:2015 ґрунтується на дослідженнях проблеми підвищення продуктивності деревостанів. Модельна основа ТХР була і залишається доволі недосконалою, часто ТХР містили тільки ряди вирівняних і упорядкованих результатів спостережень. Очевидно, що такі числові моделі малопринятні для опису росту деревостанів у мінливому кліматі.

Інший напрям дослідження ростових процесів у лісових насадженнях оснований на моделях, за допомогою яких намагаються описати досліджувані явища на процесному рівні, тобто оцінити вплив основних ресурсів зовнішнього середовища на базові процеси функціонування екосистем, такі як, наприклад, фотосинтез і дихання [1]. Очевидна складність такого підходу, особливо в частині розроблення моделей, які були б прийнятними для застосування у практиці лісового господарства. Моделі процесного типу застосовують в екологічних дослідженнях, зокрема в розробленні динамічних глобальних моделей рослинності [2].

Зближення цих двох підходів видається доцільним за умов істотно мінливого світу. Першим етапом на цьому шляху є подання чинних нормативів росту в модельному вигляді, причому параметри моделей повинні мати змістове трактування.

Якість насадження оцінюють за двома показниками: життєздатністю та захисною ефективністю.

Ефективне вирощування стійких і довговічних захисних лісових насаджень залежить від суворого виконання і послідовного здійснення на високому

технічному рівні всіх заходів щодо їх створення і утримання [3].

Для згоргання різноманітної екологічної інформації, одержуваної в результаті ведення екосистемного моніторингу, ефективні інтегральні показники, що дають змогу оцінити стан біотичних і абіотичних компонентів екосистем і візуалізувати стан НПС на обстежуваних територіях [4–6].

У роботах [7, 8] обґрунтовано систему критеріїв та індикаторів для оцінювання стану лісових екосистем на урбанізованих територіях. Стан біотичної складової лісових екосистем відображають два інтегральні показники: індекс стану деревостану та індекс структурного різноманіття лісового біоценозу.

Індекс стану деревостану H_1 (за методикою Е. Р. Мозолевської [9] зі змінами та доповненнями) відображає життєздатність деревного пологую через середньозважений ступінь залистяності крон і дає відносне уявлення про біологічну продуктивність та екологічну асимілятивну здатність досліджуваної ділянки лісу:

$$H_1 = \sum_{i=1}^k Q_i \cdot f_i, \quad (1)$$

де Q_i – частка суми площ перерізу дерев i -ї категорії стану в загальній сумі площ поперечного перерізу всіх стовбурів дерев; f_i – коефіцієнти залистяності дерев різних категорій станів (1,0 – без ознак ослаблення; 0,8 – малоослаблені (втрата залистяності до 25 %); 0,6 – ослаблені (втрата залистяності до 50 %); 0,4 – сильно ослаблені (втрата залистяності до 75 %); 0,2 – всохлі (втрата залистяності понад 75 %); 0 – сухостій/бурелом поточного року та минулих років).

Одним із найпростіших і практичних підходів до оцінювання маси дерева та його частин є встановлення залежностей маси частин дерева від його лінійних розмірів. Оскільки лінійні розміри визначити простіше, ніж масу, то часто використовують алометричні залежності, які описуються рівняннями регресії. Доволі повні огляди літератури з цієї проблеми зробили А. І. Уткін [10] та В. А. Усольцев [11, 10]. Дослідники використовують різні параметри і типи функцій, проте, як стверджує Д. Г. Щепаченко [12, 2], підхід до цієї проблеми мало змінився з 1944 р., коли J. I. Kittredge [13] вперше застосував алометричну функцію для оцінки маси листя, використовуючи рівняння:

$$M_{fr} = aD_{1,3}^b, \quad (2)$$

де M_{fr} – маса фракції фітомаси; $D_{1,3}$ – середній діаметр дерева на висоті 1,3 м; a, b – коефіцієнти [2, с. 95].

Для визначення компонент індексу стану КЕЗТ розробляють математичні моделі збільшення діаметрів і висот деревних рослин з урахуванням впливу фотосинтезу.

Формулювання цілі статті

Вхідною інформацією для розроблення методів визначення лінійних розмірів дерев (діаметрів та висот) за допомогою математичних моделей слугують таксаційні показники основних лісотвірних порід 100 (дубів) КЕЗТ на ділянці площею 1 га колії Львів – Стрий, що складається з одного ряду дубів. Ці показники подано в двох великих таблицях, де зафіксовано дані змін висот та діаметрів 100 деревних рослин, що росли протягом 88 років. Наводимо лише фрагмент для табл. 2 ходу росту, а саме інформацію про зміну висоти за віком одного дуба. Ці показники подано в табл. 1 та 2.

Розглядаємо ділянку, на якій сформовано КЕЗТ, що складається із одного ряду дубів. У табл. 1 подано ТХР дубів. Статистичне опрацювання росту дубів показало, що розподіл ймовірностей росту дубів не описується нормальним законом. Тому ми одержали оцінки росту на основі критерію Колмогорова–Смірнова (обчислене математичне сподівання та довірчий інтервал для кожного значення $t_i (i = \overline{1,30})$, з табл. 2) [14, с. 359]. Якою б не була істинна функція розподілу росту деревної рослини $F_{\text{mod}}(x)$, маємо: $P\{F^{(n)}(x) - d_a \leq F_{\text{mod}}(x) \leq F^{(n)}(x) + d_a \text{ для всіх } x\} = 1 - \alpha$, де d_a – критичне значення D_n за рівня значущості α .

Таблиця 1

Таблиця ходу росту КЕЗТ за роками

Table 1

Table of growth rates of CPTE over the years

| Вік, років | Склад | $H_{\text{сер}}, \text{ м}$ | $D_{\text{сер}}, \text{ м}$ | N дерев, шт.·га ⁻¹ | $G, \text{ м}^2 \cdot \text{га}^{-1}$ | Видове число | Запас, м ³ ·га ⁻¹ | Зміна запасу, м ³ ·га ⁻¹ | |
|------------|-------|-----------------------------|-----------------------------|---------------------------------|---------------------------------------|--------------|---|--|-------|
| | | | | | | | | сер. | пот. |
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 40 | 54Дз | 16,6 | 17,6 | 367 | 8,9 | 0,491 | 73 | 1,8 | 2,74 |
| | 15Клг | 13,4 | 14,5 | 146 | 2,4 | 0,520 | 17 | 0,4 | 0,24 |
| | 13Лпд | 13,6 | 15,0 | 123 | 2,2 | 0,519 | 15 | 0,4 | 0,51 |
| | 10Клп | 12,3 | 13,9 | 111 | 1,7 | 0,528 | 11 | 0,3 | 0,09 |
| | 8Яс | 13,5 | 15 | 82 | 1,4 | 0,519 | 10 | 0,3 | 0,34 |
| | Разом | - | - | 829 | 16,6 | - | 126 | 3,1 | 3,93 |
| 50 | 60Дз | 19,1 | 20,9 | 329 | 11,3 | 0,481 | 104,0 | 2,1 | 3,42 |
| | 13Лпд | 16,5 | 18,6 | 89 | 2,4 | 0,502 | 20,0 | 0,4 | 0,47 |
| | 10Клг | 16,0 | 17,7 | 77 | 1,9 | 0,504 | 15,0 | 0,3 | -0,06 |
| | 10Клп | 15,0 | 16,8 | 58 | 1,9 | 0,510 | 15,0 | 0,3 | 0,34 |
| | 7Яс | 16,6 | 18,6 | 50 | 1,3 | 0,501 | 11,0 | 0,2 | -0,12 |
| | Разом | - | - | 630 | 18,8 | - | 165 | 3,3 | 4,05 |
| 60 | 68Дз | 21,3 | 23,9 | 306 | 13,7 | 0,473 | 138,0 | 2,3 | 3,76 |
| | 11Лпд | 18,9 | 21,7 | 63 | 2,3 | 0,492 | 22,0 | 0,4 | 0,39 |
| | 9Клг | 18,2 | 20,5 | 53 | 1,8 | 0,495 | 16,0 | 0,3 | 0,26 |
| | 7Яс | 19,4 | 22 | 38 | 1,5 | 0,490 | 14,0 | 0,2 | 0,26 |
| | 5Клп | 17,2 | 19,3 | 30 | 0,9 | 0,499 | 7,0 | 0,1 | -1,23 |
| | Разом | - | - | 491 | 20,1 | - | 197 | 3,3 | 3,44 |
| 70 | 77Дз | 23,0 | 26,8 | 291 | 16,4 | 0,467 | 177 | 2,5 | 3,78 |
| | 8Клг | 20,0 | 23 | 45 | 1,9 | 0,488 | 18 | 0,3 | 0,23 |
| | 7Яс | 21,9 | 25,4 | 31 | 1,6 | 0,483 | 16 | 0,2 | 0,24 |
| | 5Лпд | 20,9 | 24,4 | 20 | 0,9 | 0,486 | 9 | 0,1 | -1,05 |
| | 3Клп | 18,9 | 21,5 | 17 | 0,6 | 0,492 | 6 | 0,1 | -0,47 |
| | Разом | - | - | 404 | 21,4 | - | 226 | 3,2 | 2,74 |
| 80 | 86Дз | 24,5 | 29,6 | 278 | 19,1 | 0,463 | 217 | 2,7 | 3,95 |
| | 6Яс | 24,0 | 28,6 | 20 | 1,3 | 0,478 | 15 | 0,2 | -0,54 |
| | 4Клг | 21,4 | 25,0 | 20 | 1,0 | 0,484 | 10 | 0,1 | -0,55 |
| | 3Лпд | 22,5 | 26,5 | 12 | 0,6 | 0,481 | 7 | 0,1 | -0,60 |
| | 1Клп | 20,4 | 23,4 | 8 | 0,3 | 0,487 | 3 | 0,0 | 0,03 |
| | Разом | - | - | 337 | 22,4 | - | 252 | 3,2 | 2,30 |

Таблиця 2

Визначення висоти Quercus robur за групами віку в КЕЗТ захисного типу на ділянці колії Львів – Стрий (фрагмент таблиці)

Table 2

Definition of height Quercus robur by age groups in the CPTE protective type on the Lviv-Stryi track

| № з/п | Зміна висоти дуба за віком | | | | | | | | | | | | | | |
|-------|----------------------------|------|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 |
| 1. | 0,07 | 0,1 | 0,6 | 1,1 | 1,9 | 3,5 | 5,3 | 5,7 | 6,3 | 6,9 | 8,6 | 9,2 | 13,4 | 14,6 | 17,2 |
| № з/п | Зміна висоти дуба за віком | | | | | | | | | | | | | | |
| | 47 | 50 | 53 | 56 | 59 | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 | 77 | 80 | 83 | 85 | 88 |
| 1. | 18,8 | 19,2 | 21 | 22,6 | 24,2 | 25,9 | 26,3 | 27,4 | 29,8 | 31,6 | 33,5 | 34,7 | 34,8 | 34,9 | 35,1 |

Отже, довірча область – це смуга завширшки $\pm d_a$ навколо функції вибірки $F^{(n)}(x)$ і з ймовірністю $1-a$ істинна функція $F_{mod}(x)$ лежить цілком всередині цієї смуги. Використовуючи цей результат, можна одержати оцінки об'єму вибірки, необхідні для апроксимації функції розподілу з необхідною

точністю. Відомо, що для $a \leq 0,2$ і $n \geq 80, d \approx \sqrt{\frac{-\frac{1}{2} \ln a}{\frac{2}{\sqrt{n}}}}$

[14]. Наприклад, для $\alpha=0,05$ одержимо, що у вибірці об'єму $n = 100$ з ймовірністю 0,095 емпірична функція розподілу віддалена від істинної не більше ніж на $\Delta = 0,061$. Мета роботи – дослідження ефективності КФС у результаті аналізу спектра їх метрологічного та програмного забезпечення.

На основі статистичного опрацювання зростання висот та діаметрів дубів, висоти та діаметра середнього дерева для заданої ділянки подано функціями Річардса–Чепмена.

Коефіцієнти функції Річардса–Чепмена $H(t) = c_1(1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_3}$ мають змістове біологічне трактування: c_1 – максимально можливе значення ростової функції (асимптоти), тобто відображення величини використаного потенціалу та умов росту; c_2 – масштабує часову вісь і характеризує швидкість росту деревостану, пропорційно до максимуму приросту. Величина $c_1 c_2 \left(1 - \frac{1}{c_3}\right) \exp(c_3 - 1)$ дає максимальне значення поточного приросту і є точкою перегину ростової функції. Моделювання багатьох ТХР показало, що набори коефіцієнтів c_1, c_2, c_3 добре описують особливості росту різних порід для різних умов росту [15, с. 190].

На основі експериментальної інформації методом найменших квадратів автори розрахували $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, t_0$.

$$H(t) = c_1(1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_3},$$

де $c_1 = 26,5; c_2 = 0,024; c_3 = 2,804; t_0 = -23,3$.

$$D(t) = d_1(1 - \exp[-d_2(t - t_0)])^{d_2},$$

де $d_1 = 0,31; d_2 = 0,029; d_3 = 3,772; t_0 = -17,6$.

Виклад основного матеріалу

Для врахування впливу фотосинтезу на ріст дерев необхідно перейти до математичного моделювання зростання лінійних параметрів диференціальним рівнянням, яке одержано на основі прозорих фізико-біологічних засад.

Математичне моделювання росту дерева є дуже розвинутою сферою наукового пошуку. Однією із заслуг цієї сфери стало істотне упорядкування великої кількості емпіричних даних про ріст [16]. Разом з тим, мабуть, ще не знайдено загальноприйнятої моделі (функції росту) дерева і не виділено моделі для різних видів дерев, хоча вважають, що базова феноменологія процесу росту добре відома. Тому використовують різні моделі для різних видів дерев, з урахуванням досвіду опрацювання експериментальних даних про КЕЗТ, якими можна скористатися.

У табл. 1 ходу росту насаджень є моделі, в яких вплив віку деревостанів проявляється тільки в детермінованій складовій з тим або іншим ступенем надійності та достовірності. Регресію (лінійну або криволінійну) зазвичай можна використати для аналітичного вирівнювання дослідних даних, однак застосовувати її для екстраполяції або прогнозу росту деревостанів треба дуже обережно. Нарешті, дослідження, як правило, здійснюють за умов так званого пасивного експерименту, коли експеримент проводить природа (деревостан росте під впливом чинників навколишнього середовища) з урахуванням господарської діяльності людини. Ця обставина пояснює одну із причин незначної придатності регресійних моделей, отриманих за умов пасивного експерименту за сильної кореляції вхідних змінних і викривлень в оцінках коефіцієнтів регресії.

Для математичного опису детермінованої складової часового ряду росту деревостанів застосовують різні функції. Це – параболи другого–третього порядків, рівняння, які запропонував Ф. Корсунь, модель логарифмічного типу Бакман тощо [17].

М. Продан і Е. Ассман [18] вказують дві основні ознаки кривих росту дерев і деревостанів:

Ø криві росту мають асимптоту за необмеженого збільшення віку – пряму, паралельну до осі абсцис;

Ø поточний приріст кривої росту збільшується і досягає максимуму в точці перегину кривої, а потім зменшується і повільно зменшується до нуля, тобто до повного розпаду деревостану.

Максимум приросту залежить від деревної породи й умов росту. Якщо ці принципи процесу росту насаджень задовольняються математичною моделлю, то така модель цілком підходить для моделювання продуктивності деревостанів.

Кількість функцій росту, які запропонували в різний час дослідники, становить кілька десятків і збільшується з кожним роком. Техніку розрахунків параметрів функцій росту описано в книзі М. Продана [19]. Всі формули можна розділити на дві групи: отримані у результаті формально-математичних побудов або сконструйовані на основі енергетичних уявлень.

Математичні моделі росту захисних насаджень дають змогу розраховувати процес утворення фітомаси в таких межах, які забезпечують фотосинтез, достатній для росту та оптимального функціонування КЕЗТ. Для цього застосовують методи розрахунку росту і продуктивності насаджень на основі зміни ваги і площі асиміляційного апарату за певний проміжок часу.

Періодичне визначення ваги рослин (W) і площі асиміляційного апарату (A) дає змогу отримувати такі показники: абсолютний і відносний прирости, абсолютну і відносну швидкість росту, величину нетто-асиміляції, відношення площі листя до ваги рослини [15].

Залежно від значень параметрів, які характеризують зовнішню та внутрішню середовища КЕЗТ, можна використовувати різні математичні моделі.

Ми розглядаємо математичні моделі, які допускають прозору фізико-хімічну та біологічну інтерпретацію, що дає можливість обґрунтувати вимоги нормативного забезпечення функціонування КЕЗТ.

Результати й обговорення

Для опису росту дерева як вихідний пункт Колобов [20–22] використав модель вільного росту

дерева, запропоновану в роботі Полетаєва [23]. Модель ґрунтується на таких гіпотезах:

Ø зріла рослина, що росте, зберігає геометричну подібність. Це означає, що у зрілої рослини з ростом не змінюються відношення геометричних розмірів, наприклад відношення висоти до діаметра;

Ø вільну енергію (або активну речовину) рослина отримує тільки у результаті фотосинтезу;

Ø вільна енергія витрачається на фотосинтез, на побудову живої тканини і на підняття розчину з ґрунту;

Ø у середньому за великі відрізки часу рослина отримує постійну кількість світла на одиницю поверхні й може поглинати необхідні речовини з необмеженого запасу.

У цих працях рівняння росту дерева подано у формі закону збереження енергії:

$$ax^2 - abx^2 - gx^2x - d \frac{d}{dt}(rx^2) = 0, \quad (3)$$

де x – лінійний розмір дерева; a , b , g , d – деякі константи; ρ – густина рослини.

Поверхня крони дерева вважається пропорційною до x^2 , об'єм дерева – пропорційним до x^3 . Перший член у рівнянні дорівнює отриманій у результаті фотосинтезу енергії, другий – витратанню енергії на потреби фотосинтезу, третій – витратам на транспортування живильного розчину у всіх частинах рослини, які пропорційні до об'єму добутку дерева і висоти, оскільки пов'язані з подоланням сили тяжіння, четвертий – витратам на збільшення маси рослини.

У роботах [24, 25] відзначено той факт, що в разі обмеження світлових ресурсів дерево перерозподіляє свій приріст на користь приросту висоти. Тому вважається, що дерево, яке росте в умовах конкуренції за світло, не зберігає геометричної подібності між приростом об'єму і висоти. Тому Колобов запропонував виразити висоту дерева (H) як незалежну змінну, а x^2 позначити як об'єм (V). Отже, з огляду на зміну геометричних пропорцій дерева в ході його росту, рівняння (3.3) модифікується і набуває такого вигляду:

$$aS - abS - gVH - d \frac{d}{dt}(rV) = 0, \quad (4)$$

де V – об'єм стовбура; H – висота; S – площа листової поверхні дерева.

Тоді:

$$\frac{dV}{dT} = EbS - cVH, \quad (5)$$

де $b = \frac{a-a \cdot b}{d \cdot r}$, та $c = \frac{g}{d \cdot r}$ – сталі; E – інтенсивність

фотосинтезу одиниці листової поверхні.

Залежність інтенсивності фотосинтезу від сонячної радіації описується функцією типу Міхаеліса–Ментена [26, 27]:

$$E = \frac{aIP_{\max}}{aI + P_{\max Q}}, \quad (6)$$

де I – інтенсивність радіації; a – початковий нахил кривої продуктивності; $P_{\max Q}$ – максимальна інтенсивність фотосинтезу одиниці листової поверхні.

Як показано в монографіях [28, 29], інтенсивність сонячної радіації всередині рослинного покриву визначається зовнішніми і внутрішніми чинниками; до других належать кількість і розподіл листової поверхні. Залежність ослаблення радіації рослинним покривом можна виразити моделлю Монсі та Саекі [30], згідно з якою коефіцієнт пропускання світла залежить від щільності й товщини рослинного шару.

Отже, дотримуючись ходу обґрунтувань, які викладені в працях [31, 32], розглянемо гіпотезу про те, що дерево отримує енергію тільки у результаті фотосинтезу, вільна енергія витрачається на потреби фотосинтезу, на побудову живої тканини і на підняття розчину з ґрунту. Рівняння росту записують у формі закону збереження енергії. Ріст окремого дерева описаний системою рівнянь, що дає можливість обчислювати об'єм, висоту і діаметр стовбура на кожному кроці моделювання з урахуванням впливу конкуренції з боку дерев, які ростуть поруч:

$$\frac{dV}{dt} = Pb - cVH, \quad (7)$$

$$P = \frac{P_{\max} V^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{p} \cdot \ln \left(\frac{P_{\max} + aQ}{P_m + aQ \cdot \exp(-pV^d)} \right) \quad (8)$$

$$H(t) = c(1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_3}, \quad (9)$$

$$D(t) = d_1(1 - \exp[-d_2(t - t_0)])^{d_3}, \quad (10)$$

$$D = \sqrt{\frac{4V}{pHaV^{-g}}}, \quad (11)$$

де V, H, D – об'єм, висота і діаметр стовбура дерева; a – початковий нахил кривої продуктивності; P – інтенсивність фотосинтезу дерева; P_m – максимальна інтенсивність фотосинтезу одиниці листової поверхні; p – коефіцієнт поглинання світла; d – фрактальна розмірність крони; b – коефіцієнт перетворення енергії на приріст об'єму стовбура; c – коефіцієнт пропорційності витрат енергії на транспорт асимілятів; Q – частка сонячної радіації, що падає на зовнішню поверхню крони; c_1, c_2, c_3 – видоспецифічні параметри росту дерева у висоту; d_1, d_2, d_3 – видоспецифічні параметри росту діаметра на висоті 1,3 м; α, γ – коефіцієнт залежності видового числа від об'єму стовбура.

Для визначення параметрів фотосинтезу необхідно здійснити деякі підготовчі перетворення.

Зауважимо, по-перше, що зі співвідношення (7) можна виразити об'єм стовбура дерева через його діаметр та висоту:

$$V = \left(apH \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}, \quad (12)$$

Виконавши елементарні перетворення (7)–(10), отримаємо рівняння зміни діаметра і висоти дерева за умов конкуренції за світло вигляду:

$$\frac{dD}{dt} = -\frac{1}{D^2 \cdot H} \cdot \frac{dH}{dt} - c \cdot D^2 \cdot H + \frac{D^2 \cdot P \cdot H}{\left(apH \cdot \left(\frac{D}{2} \right)^2 \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}}, \quad (13)$$

Знайдемо похідні від $D(t)$ і $H(t)$, скориставшись поданням (9), (10), та підставимо їх у (11). Одержимо функціональне рівняння, яке залежить від шуканих параметрів $a, p, P_{\max Q}, b, c, d, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, t_0, \alpha, \gamma$:

$$\begin{aligned} & d_1 d_2 d_3 (1 - \exp[-d_2(t - t_0)])^{d_2-1} \cdot \exp[-c_2(t - t_0)] = \\ & = -\frac{1}{D^2 \cdot H} \cdot c_1 \cdot c_2 \cdot c_3 (1 - \exp[-c_2(t - t_0)])^{c_2-1} \cdot \exp[-c_2(t - t_0)] + \\ & \quad \left(D^2 \left(\frac{P_{\max} V^{\left(\frac{2}{3}\right)}}{p} \right) \right) \cdot \ln \frac{(P_{\max} + aQ)}{(P_{\max} + aQ \cdot \exp(-pV^d)) \cdot b} \cdot \\ & \quad + \frac{1}{\left(apH \left[\left(\frac{D}{2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{1+\gamma}} \right)} - c \cdot D^2 \cdot H, \end{aligned} \quad (14)$$

Алгоритм пошуку коефіцієнтів математичної моделі такий:

По-перше, знаходимо такі значення $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$, за яких досягають мінімуму вирази $S_1(d_1, d_2, d_3, t_0), S_2(c_1, c_2, c_3, t_0)$, які визначаються співвідношеннями:

$$S_1(d_1, d_2, d_3, t_0) = \sum_{i=1}^n (D(t_k) - D_{tab}(t_k))^2 \quad (15)$$

$$S_2(c_1, c_2, c_3, t_0) = \sum_{i=1}^n (H(t_k) - H_{tab}(t_k))^2, \quad (16)$$

де $D_{tab}(t_k), H_{tab}(t_k)$ – фактичні значення діаметра та висоти дерева, одержані з ТХР, $D(t_k), H(t_k)$ значення діаметра та висоти дерева відповідно, розраховані за формулами моделі (8, 9), t_k – час, років.

Рівняння (13) після підстановки знайдених значень $c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3$ матиме вигляд:

$$\begin{aligned} & G(t, a, b, c, d, \alpha, \gamma, P_{\max}, p, Q) = \\ & = \frac{1,8(1 - \exp[-0,024(t + 23,3)])^{1,804} - 1,8(1 - \exp[-0,024(t + 23,3)])^{2,804}}{0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}} - \\ & - c \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804} + \\ & + \frac{1}{\left(\frac{a \cdot p \cdot 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{4} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \right)^{\frac{1}{1+\gamma}}} \\ & \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \cdot b \end{aligned}$$

$$P_{\max} \cdot \left(\frac{a \cdot p \cdot 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{4} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \right)^{\frac{2}{3+3t}}$$

$$\ln \left(\frac{P_{\max} + aQ}{P_{\max} \cdot aQ \cdot \exp \left(-p \left(\frac{a \cdot p \cdot 26,5(1 - \exp(-0,024(t + 23,3)))^{2,804}}{4} \cdot 0,1(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{7,55} \right)^{\frac{2}{3+3t}} \right)} \right) - 0,04(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{2,772} - 0,04(1 - \exp(-0,029(t + 17,6)))^{3,772}, \quad (17)$$

Методом нелінійної оптимізації обчислюємо корені $a, p, P_{\max}, b, c, d, \alpha, \gamma, Q$ цього рівняння.

Для оцінки параметрів моделі розроблено програму на основі методів найменших квадратів і нелінійної оптимізації [33, с. 5–37]. Підібрано такі значення параметрів $a, p, P_{\max}, b, c, d, c_1, c_2, c_3, d_1, d_2, d_3, \alpha, \gamma$, за яких ряд отриманих модельних значень найкраще апроксимує дані, тобто розв'язана така задача.

Задано функцію формулою (17). Необхідно знайти такі значення параметрів $a, b, c, d, \alpha, \gamma, P_{\max}, p, Q$, за яких вираз

$$\min_{1 \leq \alpha \leq 180} \sum_{i=1}^{30} G^2(t_i, a, b, c, d, \alpha, \gamma, P_{\max}, p, Q)$$

$$0,022 \leq b \leq 0,06$$

$$0,0005 \leq c \leq 0,0025$$

$$0,125 \leq d \leq 0,45$$

$$0,275 \leq \alpha \leq 0,495$$

$$0,01 \leq \gamma \leq 0,08$$

$$10 \leq P_{\max} \leq 50$$

$$75 \leq p \leq 95$$

$$0,4 \leq Q \leq 0,9$$

досягає мінімуму, та обчислити цей мінімум. Час t_i набуває значень, заданих у табл. 3.

Результати розв'язання цієї задачі: $a = 5,00$
 $b = 0,05$ $c = 0,0005$ $d = 0,30$ $d_1 = 0,30$ $gam = 0.02$
 $P_{\max} = 50,00$ $p = 90,00$ $q = 0,40$

Знайдені параметри можна використати для прогнозування збільшення діаметра дерева, прогнозування зростання маси насаджень, збільшення площі листя КЕЗТ, а отже, прогнозування параметра стану КЕЗТ.

Таблиця 3

Зміна значень t_i

Table 3

Change values t_i

| i | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| t_i | 3 | 5 | 8 | 11 | 14 | 17 | 20 | 23 | 26 | 29 | 32 | 35 | 38 | 41 | 44 |
| i | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |
| t_i | 47 | 50 | 53 | 56 | 59 | 62 | 65 | 68 | 71 | 74 | 77 | 80 | 83 | 85 | 88 |

Висновки

Результати дають підстави стверджувати, що розв'язано задачу оптимізації параметрів фотосинтезу для КЕЗТ та розроблено алгоритм прогнозування зміни діаметра і висоти дерева з часом за умов конкуренції за світло, що дає змогу прогнозувати один із важливих параметрів якості функціонування захисних насаджень – індекс стану КЕЗТ.

Подяка

Автори висловлюють вдячність колективу кафедри інформаційно-вимірвальних технологій Національного університету «Львівська політехніка» за надану допомогу та всебічне сприяння у підготовці статті.

Конфлікт інтересів

Не існує фінансового або іншого конфлікту стосовно роботи.

Список літератури

1. Голубець М. А. Екосистемологія / М. А. Голубець. – Львів: Поллі, 2000. – 316 с.
2. Щепаченко Д. Г. Биологическая продуктивность и бюджет углерода листовных лесов Северо-Востока России: монография / Д. Г. Щепаченко, А. З. Шведенко, В. С. Шаляев. – М.: Московский гос. ун-т леса, 2008. – 296 с.
3. Методичні вказівки щодо устрою, створення, відновлення та поточного утримання захисних насаджень на землях залізниць України / А. С. Бедрицький, М. М. Гузь, М. Д. Костюк, М. О. Плахтій, В. М. Гузь, Л. А. Бедрицька, Н. І. Попова. – К: Транспорт України, 2003. – 264 с.
4. Воробейчик Е. Л. Экологическое нормирование техногенных загрязнений / Е. Л. Воробейчик, О. Ф. Садьков, М. Г. Фарафонов. – Екатеринбург: Наука, 1994. – 280 с.
5. Количественные методы в экологии и гидробиологии / под ред. Г. С. Розенберга. – Тольятти: ИЭВБ, 2005. – 404 с.
6. Левич А. П. Теоретические и методические основы технологии регионального контроля природной среды по данным экологического мониторинга / А. П. Левич, Н. Г. Булгаков, В. Н. Максимов. – М.: НИИ-Природа, 2004. – 271 с.
7. Гладун Г. Б. Захисні лісові насадження: проектування, вирощування, впорядкування / Г. Б. Гладун,

- М. Є. Трофименко, М. А. Лохматов; за ред. Г. Б. Гладуна. – Харків: Нове слово, 2005. – 390 с.
8. Гладун Г. Б. Захист автомобільних доріг лісовими насадженнями лінійного типу та їхні прогностичні обсяги / Г. Б. Гладун, Ю. Г. Гладун // *Лісівництво і агролісові агролісові системи*. – Харків: УкрНДІЛГ, 2013. – Вип. 123. – С. 103–113.
9. Мозолева Е. Г. Информационное обеспечение урбо-мониторинга / Е. Г. Мозолева // *Мониторинг состояния лесных и городских экосистем*. – М.: МГУЛ, 2004. – С. 108–123.
10. Уткин А. И. Методика исследований первичной биологической продуктивности лесов // *Биологическая продуктивность лесов Поволжья*. – М.: Наука, 1982. – С. 59–72.
11. Усольцев В. А. Продуктивность и структура фитомассы древостоев: автореф. дис. ... д-ра с.-х. наук / В. А. Усольцев. – К., 1985. – 46 с.
12. Усольцев В. А. Рост и структура фитомассы древостоев / В. А. Усольцев. – Новосибирск: Наука, 1988. – 253 с.
13. Kitting J. Estimation of the amount of foliage of trees and stands. – *J. Forest*, 1944. – Vol. 42, No. 11.
14. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: справ. изд. / С. А. Айвазян, И. С. Енюков, Л. Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1983. – 471 с., С. 359–360.
15. Карманова И. В. Математические методы изучения роста и продуктивности растений / И. В. Карманова. – М.: Наука, 1976. – 223 с., С. 5.
16. Гавриков В. Л. Моделирование роста деревьев в контексте углеродного цикла 03.02.08 – Экология: дис. д-ра биол. наук / В. Л. Гавриков. – Красноярск, 2016. – 493 с. С. 71–91.
17. Багинский В. Ф. Таксация леса: учеб. пособ. для студ. учреждений высшего образования по специальностям "Лесное хозяйство", "Лесное инженерное дело" / В. Ф. Багинский; рец.: О. А. Апрощенко, В. Б. Гедых; Министерство образования Республики Беларусь, Учреждение образования "Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины". – Гомель: ГГУ им. Ф. Скорины, 2013. – 398 с.
18. Asmann E. *Waldtragekunde* / E. Asmann. – München-Bonn-Wien: BLW, 1961. – 327 s.
19. Prodan M. *Holzmesstechnik* / M. Prodan. – Frankfurt am Main: Sauerlandere Verlag, 1965. – 644 s.
20. Колобов А. Н. Моделирование процессов конкуренции за свет в смешанных разновозрастных древостоях // *Вестник Томского государственного университета*. – 2011. – № 351.
21. Kolobov A. N., Frisman E. Ya. Individual-based model of spatio-temporal dynamics of mixed forest stands // *Ecological Complexity*. – 2016. – Vol. 27. – P. 29–39.
22. Колобов А. Н. Моделирование пространственно-временной динамики древесных сообществ: индивидуально-ориентированный подход // *Лесоведение*. – 2014. – № 5. – С. 72–82.
23. Поляев И. А. Проблемы кибернетики / И. А. Поляев. – М.: Наука, 1966. – Т. 16. – С. 171–190.
24. Harper J. L. Darwinian approach to plant ecology // *J. Ecol.*, 1967. – Vol. 55. – P. 247–270.
25. Harper J. L. *Population biology of plants*. – N.Y.: Acad. Press, 1977. – 892 p.
26. Торнли Дж. Г. М. Математические модели в физиологии растений / Дж. Г. М. Торнли. – К.: Наукова думка, 1982. – 312 с.
27. Куль К. Динамическое моделирование роста деревьев / Куль К., Куль О. – Таллинн: Валгус, 1989. – 231 с.
28. Алексеев В. А. Световой режим леса / В. А. Алексеев. – Л.: Наука, 1975. – 227 с.
29. Росс Ю. К. Радиационный режим и архитектура растительного покрова / Ю. К. Росс. – Л.: Гидрометеоиздат, 1975. – 327 с.
30. Monsi M., Saeki T. *Über den Lichtfactor in den Pflanzengesellschaften und seine Bedeutung für die Stoffproduktion* // *Jap. Jour. Bot.* 1953. Vol. 14. № 1. P. 22–52.
31. Колобов А. Н. Моделирование процесса конкуренции за свет в одновозрастных древостоях / А. Н. Колобов, Е. Я. Фрисман // *Известия РАН. Серия биологическая*. – 2013. – № 4. – С. 463–473.
32. Колобов А. Н. Имитационное моделирование процессов самоизреживания в одновозрастных однопорядковых древостоях / А. Н. Колобов, Е. Я. Фрисман // *Математическая биология и биоинформатика*. – 2016. – Т. 11. – № 2. – С. 323–335.
33. Расчет и конструирование механизмов и деталей приборов / под ред. проф. д-ра техн. наук Ф. Л. Лутина. – Л.: Машиностроение. Ленингр. отд-е, 1975. – 199 с.: ил.; 22 см. В огл. авт.: С. А. Родионов, Е. И. Гутман, Э. Е. Пейсах и др. Глава книги "Оптимизация нелинейных систем". С. 5–37.

References

1. Golubez` M. A. (2000). *Ekosy`stemologiya*. – L`viv: Polli, 316 p.
2. Shhepachenko D. G., Shvedenko A. Z., Shalaev V. S. (2008). *Biologicheskaja produktivnost' i bjudzhet ugleroda listvennichnyh lesov Severo-Vostoka Rossii: monografija*. – M.: Moskovskij gos. un-t lesa, 296 p.
3. *Metody`chni v kazivky` shhodo ustroju, stvorennja, vidnovlennja ta potocznego utry`mannja zachy`sny`x nasadzen` na zemlyax zalizny`cz` Ukrainy` / A. S. Bedry`cz`ky`j, M. M. Guz`, M. D. Kostjuk, M. O. Plaxtij, V. M. Guz`, L. A. Bedry`cz`ka, N. I. Popova*. – K.: Transport Ukrainy, 2003. – 264 p.
4. Vorobejchik E. L., Sadykov O. F., Farafonov M. G. (1994). *Jekologicheskoe normirovanie tehnogennyh zagraznjenij*. – Ekaterinburg: Nauka, 280 p.
5. *Kolichestvennyye metody v jekologii i gidrobiologii / pod red. Rozenberga G. S.* – Tol`jatti: IJeVB, 2005. – 404 p.
6. Levich A. P., Bulgakov N. G., Maksimov V. N. (2004). *Teoreticheskie i metodicheskie osnovy tehnologii regional'nogo kontrolja prirodnoj sredy po dannym jekologicheskogo monitoringa*. – M.: NIA-Priroda. – 271 p.
7. Gladun G. B., Trofy`menko M. Ye., Loxmatov M. A. (2005). *Zaxy`sni lisovi nasadzhennja: proektuvannja, vy`roshhuvannja, vporyadkuvannja / za red. G. B. Gladuna* – Харків: Нове слово. – 390 p.
8. Gladyn G. B., Gladyn Yu. G. (2013). *Zaxy`ct avtomobil`ny`x dopig licovy`my` nacadzhenyamy` linijnogo ty`py ta yixni prognosty` obcyagy` Licivny`cz`tyvo i agromeliopaczija* Харків: УкрНДІЛГ, 2013. – Vy`p. 123, p. 103–113.
9. Mozolevska E. G. (2004). *Informacionnoe obespechenie urbomonitoringa / E. G. Mozolevska* // *Monitoring sostojanija lesnyh i gorodskih jekosistem*. – M.: MGUL. – P. 108–123.
10. Utkin A. I. (1982). *Metodika issledovanij pervichnoj biologicheskaj produktivnosti lesov* // *Biologicheskaja produktivnost' lesov Povolzh'ja*. – M.: Nauka. – P. 59–72.
11. Usol'cev, V. A. (1985). *Produktivnost' i struktura fitomassy drevostoev: avtoref. dis. ... d-ra s.-h. nauk / V. A. Usol'cev*. – Kiev. – 46 p.
12. Usol'cev, V. A. (1988). *Rost i struktura fitomassy drevostoev / V. A. Usol'cev*. – Novosibirsk: Nauka. – 253 p.

13. Kittredge J. Estimation of the amount of foliage of trees and stands. – *J. Forest*, 1944, Vol. 42, No. 11.
14. Ajvazjan S. A. i dr. (1983). *Prikladnaja statistika: Osnovy modelirovanija i pervichnaja obrabotka dannyh. spravocnoe izd.* / S. A. Ajvazjan, I. S. Enjukov, L. D. Meshalkin. – M.: Finansy i statistika. – P. 359–360.
15. Karmanova I. V. (1976). *Matematicheskie metody izuchenija rosta i produktivnosti rastenij.* – M.: Nauka. – 223 p.
16. Gavrikov V. L. (2016). *Modelirovanie rosta derev'ev i drevostoev v kontekste uglerodnogo cikla 03.02.08 – Jekologija dissertacija na soiskanie uchenoj stepeni doktora biologicheskikh nauk.* – Krasnojarsk. – P. 71–91.
17. Baginskij V. F. *Taksacija lesa : uchebnoe posobie dlja studentov uchrezhdenij vysshego obrazovanija po special'nostjam "Lesnoe hozjajstvo", "Lesoinzhenernoje delo" / V. F. Baginskij ; rec.: O. A. Atroshhenko, V. B. Gedyh; Ministerstvo obrazovanija Respubliki Belarus', Uchrezhdenie obrazovanija "Gomel'skij gosudarstvennyj universitet imeni Franciska Skoriny".* – Gomel': GGU im. F. Skoriny, 2013. – 398 p.
18. Asmann E. *Waldertragekunde / E. Asmann.* – München-Bonn-Wien: BLW, 1961. – 327 s.
19. Prodan M. *Holzmesslehre / M. Prodan.* – Frankfurt am Mein: Sauerlandere Verlag, 1965. – 644 s.
20. Kolobov A. N. (2011). *Modelirovanie processov konkurencii za svet v smeshannyh raznovozrastnyh drevostojah // Vestnik Tomskogo gosudarstvennogo universiteta.* – No. 351.
21. Kolobov A. N., Frisman E. Ya. (2016). *Individual-based model of spatio-temporal dynamics of mixed forest stands // Ecological Complexity.* Vol. 27. P. 29–39.
22. Kolobov A. N. (2014). *Modelirovanie prostranstvenno-vremennoj dinamiki drevesnyh soobshhestv: individual'no-orientirovannyj podhod // Lesovedenie.* № 5. P. 72–82.
23. Poletaev I. A. (1966). *Problemy kibernetiki.* M.: Nauka. T. 16. – P. 171–190.
24. Harper J. L. *Darwinian approach to plant ecology // J. Ecol.* 1967. Vol. 55. P. 247–270.
25. Harper J. L. *Population biology of plants.* – N. Y.: Acad. Press. 1977. – 892 p.
26. Tornli Dzh. G. M. (1982). *Matematicheskie modeli v fiziologii rastenij.* Kiev: Naukova dumka. – 312 p.
27. Kull' K., Kull' O. (1989). *Dinamicheskoe modelirovanie rosta derev'ev.* Tallinn: Valgus. – 231 p.
28. Alekseev V. A. (1975). *Svetovoj rezhim lesa.* L.: Nauka. – 227 p.
29. Ross Ju. K. (1975). *Radiacionnyj rezhim i arhitektura rastitel'nogo pokrova.* Leningrad.: Gidrometeoizda, 327 p.
30. Monsi M., Saeki T. *Über den Lichtfactor in den Pflanzengesellschaften und seine Bedeutung für die Stoffproduktion // Jap. Jour. Bot.* 1953. Vol. 14. No. 1. P. 22–52.
31. Kolobov A. N., Frisman E. Y. *Simulation of the competition for light in forest stands of the same age // Biology Bulletin.* 2013. Vol. 40. No. 4. P. 394–403.
32. Kolobov A. N., Frisman E. Ja. (2016). *Imitacionnoe modelirovanie processov samoizrezhivaniya v odnovozrastnyh odnorodnyh drevostojah // Matematicheskaja biologija i bioinformatika.* T. 11. No. 2. P. 323–335.
33. *Raschet i konstruirovanie mehanizmov i detalej priborov / pod red. prof. d-ra tehn. nauk F. L. Litvina.* – Leningrad: Mashinostroenie. Leningr. otd-nie, 1975. – 199 s.: il.; 22 sm. V ogl. avt.: S. A. Rodionov, E. I. Gutman, Je. E. Pejsah i dr. Glava knigi *Optimizacija nelinejnyh sistem* S. 5–37.