УДК: 681.327+656.34-523

Зинченко В. П., Ногин Н. В., Зинченко С. В., Ли Вэй

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДВИЖЕНИЯ ПУЛЬСИРУЮЩЕГО ГАЗА В ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ ТРУБЕ

Введение

Решение задач в режиме реального времени (РВ) требует реализации алгоритмов адекватного вычисления параметров пульсирующего турбулентного потока в горизонтальной полубесконечной цилиндрической трубе, что можно рассматривать как систему управления с распределёнными параметрами [1], [2].

Целью работы является решение задачи нестационарного потока в полубесконечной цилиндрической трубе, которое будет использовано для исследования параметров потока: поля скоростей, напряжений, энергии. В общей постановке, для произвольных начальных условий и известной функции изменения перепада давления по времени, задача была исследована в работах Громеки [3] и других авторов [4] – [6].

Постановка задачи

Уравнение нестационарного осесимметричного движения газа [3] - [5] в цилиндрической системе координат запишем в виде такой краевой задачи:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial w}{\partial t} - \gamma\left(\dfrac{\partial^2 \mathrm{w}}{\partial\, r^2} + \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathrm{w}}{\partial r}\right) = f(t) \\ \qquad -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{dp}{dz} = f(t)\ , \end{cases} \tag{1}$$

где:

$$w(a,t) = 0; \quad w(r,0) = \gamma(r) - w_0; \quad \begin{cases} f \epsilon [0,T] \\ r \epsilon [0,a]; \end{cases} \quad w(0,t) < \infty \tag{2}$$

с граничным $w|_s = 0$ и начальным условиями $w|_{t=0} = \varphi(r)|_{t=0} = w(r,t=0) = \frac{a^2 \Delta p}{\mu L}(1 - \frac{r^2}{a^2}) f(t)$ [1], [2],

где $f(t) = \frac{\Delta P}{\mu L}\psi(t)$, $\psi(t)$ – функция изменения перепада давления по времени;

$\Delta p / L$ – перепад давления на длине L; $0 \le t \le T$; $0 \le r \le a$.

Также задана функция начального условия в виде параболического профиля: $w|_{t=0} = \varphi(r)$.

Причем

$$\varphi(r) = \frac{a^2 \Delta P}{\mu L}(1 - \frac{r^2}{a^2}); \qquad f(t) = \frac{\Delta p}{\rho L}\psi(t), \tag{3}$$

Метод

Решение (1, 2) будем искать в виде суммы двух функций [1], [5], [7]:

$$w(r,t) = \Theta(r,t) + \Omega(r,t), \tag{4}$$

где $\Theta(r,t)$ – вынужденное изменение движения газа от изменения градиента давления при отсутствии начального движения, а $\Omega(r,t)$ – изменение движения, вызванное начальным условием.

Решение (4) находим методом разделения переменных (методом Фурье). Так функция $\Omega(r,t)$ определяется из следующего однородного уравнения:

$$\frac{\partial \Omega}{\partial t} - \gamma\left(\frac{\partial^2 \Omega}{\partial\, r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \Omega}{\partial r}\right) = 0. \tag{5}$$

с нулевым граничным условием Дирихле $\Omega|_{r=a} = 0$ и начальным условием вида $\Omega|_{t=0} = \varphi(r) = \frac{a^2 \Delta P}{\mu L}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$.

В соответствии с общей идеей метода разделения переменных, частное решение однородного уравнения (5) представляем в виде

$$\Omega(r,t) = R(r)T(t). \tag{6}$$

Тогда $T'R = \gamma(R''T + \frac{1}{r}R'T)$, что возможно при выполнении соотношения $\frac{T\prime}{\gamma T} = \frac{R\prime\prime}{R} + \frac{1}{r}\frac{R\prime}{R} = -\lambda^2$, где λ^2 – *const*. Откуда следует система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} R'' + \dfrac{1}{r}R' + \lambda^2 R = 0 \\ T_n(t) = e^{-\gamma\lambda_n}, \qquad n \notin N. \end{cases}$$

В результате получаем задачу Штурма - Лиувилля [5] вида:

$$\frac{d}{dr}\left(r\frac{dR}{dr}\right) + \lambda_k^2 rR = 0.$$

Метод Фурье позволяет получить спектр частных решений вида

$$R_k(r) = A_k J_0(\lambda_k r) + B_k Y_0(\lambda_k r),$$

где A_k, B_k – произвольные постоянные; поскольку $\lim_{r\to 0} Y_0(kr) = \infty$, а решение должно быть конечным, то $B_k \equiv 0$; $J_0(\lambda_k r)$, $Y_0(\lambda_k r)$ – функции Бесселя 1-го и 2-го рода нулевого порядка соответственно [7], [8];

λ_k – собственные числа, которые определяются из соответствующих однородных граничных условий краевой задачи, то есть из граничного условия $R(a) = 0$, как корни трансцендентного уравнения

$$J_0(\lambda_k a) = 0. \tag{9}$$

Положим $A_k \equiv 1$ и получим частные решения однородного уравнения (5), удовлетворяющее нулевому граничному условию Дирихле, в виде $\Omega_n(r,t) = C_n J_0(\lambda_n r)e^{-\gamma\lambda_n^2 t}$, $n \in N$.

Далее, составим функциональный ряд вида $\Omega(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r)e^{-\gamma\lambda_n^2 t}$ и потребуем выполнения начального условия (6) в виде равенства

$$\Omega(r,t) = \frac{a^2\Delta P}{\mu L}\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n J_0(\lambda_n r), \tag{7}$$

где коэффициенты Фурье находим по фундаментальной ортогональной системе функций:

$$C_n = \frac{2\Delta P}{\mu L J_0^2(\lambda_n a)} \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2}\right) J_0(\lambda_n r)dr. \tag{8}$$

Известно, что ряд (7) с учётом (8) является знакочередующимся рядом с быстро убывающими членами по всех переменным, следовательно, он быстросходящийся.

При вычислении коэффициентов C_n (8) необходимо учитывать следующее свойство функций Бесселя $J_0(k_m r)$ [6], [7]:
$\int_0^r rJ_0(k_n r)J_0(k_m r)\,dr = \frac{1}{k_m^2 - k_n^2}[k_m r J_0(k_n r)J_1(k_m r) - k_n r J_0(k_m r)J_1(k_n r)]$.
При $k_m \neq k_n$ и $r = a$ правая часть этого выражения равна нулю, поскольку $J_0(k_m a) = J_0(k_n a) = 0$. Если же $m = n$, то $\int_0^a rJ_0^2(k_n r)dr = \frac{a^2}{2}J_1^2(k_n a)$.

Теперь решим задачу о вынужденном изменении движения жидкости, то есть найдем решение неоднородного дифференциального уравнения вида [3], [4], [7]:

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} - \gamma\left(\frac{\partial^2\Theta}{\partial\, t^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Theta}{\partial r}\right) = f(t) = \rho A\cos\omega t. \tag{9}$$

При условиях

$$\Theta|_{r=0} = 0, \qquad \Theta|_{t=0} = 0.$$

Решение (9) ищем в виде:

$$\Theta(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}_n\,(t)\tilde{R}_n(r). \tag{10}$$

Причем $R_n(r)$ определяется по (6), а для определения $\tilde{T}_n(t)$ получаем линейное дифференциальное уравнения I-го порядка вида:

$$\frac{d\tilde{T}_n(t)}{dt} + \gamma k_n^2 \tilde{T}_n(t) = f_n(t), \qquad (11)$$

где $f_n(t)$ являются коэффициентами Фурье разложения правой части $f(t)$ в ряд по ортонормированной с весом r системе функций $\tilde{R}_n(r)$ (10), а именно

$$f_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{\phi a I_1(k_n a)} \int_0^a r f(t) I_0(k_n r)\, dr = \frac{\sqrt{2} f(t)}{\phi a I_1(k_n a)} \int_0^a r I_0(k_n r)\, dr.$$

В частном случае рассмотрим установившееся пульсирующее движение, соответствующее гармоническому закону перепада давления в трубе: $f(t) = \rho A \cos \omega t$.

Поскольку [6] $\frac{d}{dx}\left(x^n I_{\text{n}}(x)\right) = x^n I_{\text{n}}(x),\ n \epsilon N$, поэтому $x^n I_{\text{n}}(x) = \int_0^a \xi^n\, I_{\text{n}}(\xi) d\xi$, и, следовательно, получаем, что $\int_0^a r I_0(k_n r)\, dr = \frac{a}{k_n} I_1(k_n a)$. Это обстоятельство позволяет коэффициенты $f_n(t)$ вычислить в явном виде

$$f_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t. \qquad (12)$$

В силу выше представленного можно просто решить линейное дифференциальное уравнение I-го порядка (11):

$$\frac{d\tilde{T}_n(t)}{dt} + \gamma k_n^2 \tilde{T}_n(t) = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t. \qquad (13)$$

Решение (13) ищем в виде: $\tilde{T}_n(t) = \text{u}\nu$. Тогда $u'\nu + u\nu' + \gamma k_n^2 u\nu = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t$ или $u'\nu + u(\nu' + \gamma k_n^2 \nu) = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t$, где: $\frac{d\nu}{dt} = -\gamma k_n^2 \nu$; $\int \frac{d\nu}{\nu} = -\gamma k_n^2 \int dt$; $ln\nu = -\gamma k_n^2 t$; $\nu = e^{-\gamma k_n^2 t}$; $u = \frac{\sqrt{2}}{k_n} u'^{e^{-\gamma k_n^2 t}} = \frac{\sqrt{2}}{k_n} A \cos \omega t$; $\int e^{\gamma k_n^2 t} \cos \omega t\, dt + C$; $u = \cos \omega t \Longrightarrow du = -\omega \sin \omega t$; $d\nu = e^{\gamma k_n^2 t} dt \Longrightarrow \nu = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t}$.

В результате получаем, что $I = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} + \frac{\omega}{\gamma k_n^2} \int e^{\gamma k_n^2 t} \sin \omega t\, dt$.

Вторично: $u = sin\omega t \ \Longrightarrow du = \omega cosdt$; $d\nu = e^{\gamma k_n^2 t} dt$ $\Longrightarrow \nu = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t}$; $\left[\frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} sin\omega t - \frac{\omega}{\gamma k_n^2} I\right]$ или $I = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t} cos\omega t + \frac{\omega}{\gamma^2 k_n^3} e^{\gamma k_n^2 t} sin\omega t - \frac{\omega^2}{\gamma^2 k_n^4} I$.

Отсюда $I\left(1 + \frac{\omega^2}{\gamma^2 k_n^4}\right) = \frac{1}{\gamma k_n^2} e^{\gamma k_n^2 t}(cos\omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} sin\omega t)$

или

$$I(\frac{\gamma^2 k_n^4+\omega^2}{\gamma k_n^2}) = e^{\gamma k_n^2 t}(cos\omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} sin\omega t),$$

и наконец $I = (\frac{\gamma k_n^2}{\gamma^2 k_n^4+\omega^2}) e^{\gamma k_n^2 t}(cos\omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} sin\omega t)$.

В результате получим такое замкнутое решение:

$$\tilde{T}_n(t) = \sqrt{2}A\frac{e^{-\gamma k_n^2 t}}{k_n}\left[C_n + \frac{\gamma k_n^2}{\gamma^2 k_n^4 + \omega^2} e^{\gamma k_n^2 t}(cos\omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} sin\omega t)\right].$$

При этом очевидно, что $\lim_{t\to\infty} e^{-\gamma k_n^2 t} = 0$.

Учитывая следующие известные соотношения [6]:

$x^{\nu} J_{\nu}(x) = \int x^{\nu} J_{\nu-1}(x)dx \ldots x^{-\nu} J_{\nu}(x) = -\int x^{-\nu} J_{\nu+1}(x)dx$

следует, что

$$\frac{a^2 2\Delta P}{\mu}\int_0^a rJ_0(k_n r)dr = \frac{rJ_1(k_n r)}{k_n}$$

и $-\frac{\Delta P}{\mu}\int_0^a r^3 J_0(k_n r)dr = |u = r^2; \quad du = 2rdu; \; d\text{v} = rJ_0(k_n r)dr \Longrightarrow$ $\text{v} = \frac{rJ_1(r)}{k_n}| \Longrightarrow \int_0^a r^3 J_0(k_n r)dr = \frac{r^3}{k_n} J_1(r)|_0^a - \frac{2}{k_n}\int r^2 J_1(r)dr.$

Поскольку $\tilde{T}_n(t)|_{t=0} = 0$, то возможно сразу определить коэффициенты C_n при $t = 0$:

$$C_n = -\frac{\gamma k_n^2}{\gamma k_n^4 + \omega^2}.$$

Далее, очевидно, что решение ограничено на оси при $r = 0$. Более того, функции (12) ограничены по модулю, очевидно, мажорирующая последовательность вида

$$|M_n| \le \frac{|c_1|}{k_n} + \frac{1}{\sqrt{\gamma^2 k_n^2 + \omega^2}}$$

Сумма ряда $\Theta(r, t)$ является непрерывной по t функцией, а также интегрируема с квадратом и весом r на $r \in [0, \; a]$, имеет непрерывную производную по t и непрерывные производные второго порядка по r.

Результат

Общий закон изменения скорости по времени в любом сечении трубы такой:

$$w(t) = \pi a^2 w_0 + + \frac{2A}{a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{c_1}{k_n} e^{-\gamma k_n^2 t} + \frac{\gamma k_n}{\gamma^2 k_n^4+\omega^2}(cos\omega t + \frac{\omega}{\gamma k_n} sin\omega t)\right] \times \frac{2\pi}{I_1(k_n a)}\int_0^a rJ_0(k_n r)dr + \frac{2\Delta P}{\mu L J_0^2(\lambda_n a)}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2}\right) J_0(\lambda_n r)dr \cdot e^{-\gamma k_n t} \times J_0(\lambda_n r). \quad (14)$$

Выводы

Предложен метод решения задачи потока нестационарного пульсирующего несжимаемого изотермического газа в полубесконечной цилиндрической трубе в горизонтальной плоскости без учёта объёмных сил. Для случая периодического закона изменения давления получено решение уравнения Навье - Стокса на основе быстросходящихся двойных функциональных рядов, показана идентичность решения с решением частной граничной задачи теплопроводности.

Кром того, показано что: $\frac{\partial P}{\partial z}$ является функцией только времени; начальное условие не существенно в отличие от граничного; так как входящие в решение нули функций Бесселя известны, то вычисление компонент скорости возможно в РВ; несмотря на то, что функциональные ряды не есть знакопеременными, наличие убывающих экспонент, умноженных на ограниченную функцию, обеспечивают быструю сходимость; наличие слагаемого $k\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)$ является контролем правильности решения.

Список использованной литературы

1. *Зинченко В. П.* Метод моделирования динамических процессов в аэродинамических трубах малых дозвуковых скоростей // В. П. Зинченко, В. М. Египко / К., 1996. – 19 с. (Преп./ НАН Украины Ин-т кибернетики им. В. М. Глушкова; 96–13).
2. *Ли Вэй* Алгоритм управления потоком в аэродинамической трубе // Ли Вэй, С. В. Зинченко, В. П. Зинченко, И. П. Муха, Э. Э. Кулиев/ УСиМ, 2014. – № 3. – С. 52 – 60.
3. *Громека И. С.* Собр. соч. – М: АПССР, 1952. – 302 с.
4. *Лойцянский Л. Г.* Механика жидкости и газа // Л. Г. Лойцянский / – М: Наука, 1973. - 848 с.
5. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды // Л. И. Седов / - М.: Наука, 1973. т. 1, 2.
6. *Ногін М. В.* Періодичний рух в’язкої нестисливої рідини в необмеженій циліндричній трубі// М. В. Ногін/ Вісник ХПІ, 2013. – м. Харків, – С. 46– 54.
7. *Тихонов А. Н.* Уравнения математической физики // А. Н. Тихонов, А. А. Самарский / - М.: Наука, 1972. – 735 с.
8. *Грей Э.* Функции Бесселя и их приложения в физике и механике // Э. Грей, Г. Метьюз / – М.: ИЛ, 1949, – 348 с.