

УДК 531.383

**Федоров В. Н.**

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОЛОЖЕНИЯ ГЕОГРАФИЧЕСКОГО  
МЕРИДИАНА ТРЕХСТЕПЕННЫМ МАЯТНИКОВЫМ  
ГИРОКОМПАСОМ ВО ВРЕМЯ РАЗГОНА ЕГО РОТОРА**

**Вступление**

Необходимость определения положения плоскости географического меридиана имеет место в различных областях человеческой деятельности – в геодезии и картографии, на транспорте, в военном деле и пр. При этом в зависимости от решаемой задачи требования по точности и времени

определения колеблются в достаточно широких пределах. Для решения указанной задачи в различных условиях разработаны, спроектированы, изготовлены и эксплуатируются измерительные приборы, отличающиеся по принципу действия, составу, конструкции, стоимости и т.д. Каждый из приборов – лидеров в своей области постоянно совершенствуется – конструктивно, технологически, методически и пр.

В данной статье рассматривается наземный трехстепенной маятниковый гироскоп с торсионным подвесом неуправляемого чувствительного элемента, оснащенный высокоточным цифровым датчиком угла азимутального положения чувствительного элемента и блоком обработки информации. При обработке информации применен косвенный метод [1] получения данных о начальных отклонениях динамических систем.

В процессе совершенствования прибора выяснилось, что дальнейшее повышение точности связано с необходимостью учета следующего фактора. Во время измерения вокруг вертикальной оси чувствительного элемента действует постоянный неконтролируемый момент, обусловленный эксплуатационными причинами, различный от измерения к измерению. Указанный момент смещает центр азимутальных колебаний чувствительного элемента, с которым, в соответствии с принятой методикой отождествляется азимут северного направления, на постоянную величину. Для автокомпенсации этой погрешности были предложены несколько методов, основанных на проведении измерений с разными, но фиксированными параметрами прибора. Однако указанные меры более чем вдвое удлиняли процесс измерений.

В статье предлагается определять положение географического меридиана на основе анализа азимутального движения чувствительного элемента гироскопа в процессе разгона его ротора. Указанное предложение может принести двоякий выигрыш в вопросе сокращения времени измерений: во-первых, режим разгона ротора становится «штатным», а не балластным режимом работы гироскопа, как это было ранее; во-вторых, отпадает необходимость в специальных мерах борьбы с вертикальными вредными моментами, так как смещение положения равновесия, вызванное действием последних, является переменным во времени, что позволяет определить величину вредного момента в процессе одного измерения.

### **Постановка задачи**

Уравнения движения трехстепенного маятникового гироскопа на неподвижном относительно Земли основании, с учетом действующего вокруг вертикальной оси чувствительного элемента неконтролируемого вредного момента  $M = \text{const}$ , имеют вид

**Прилады і метoды контролю**

---

$$\begin{aligned} H\dot{\alpha} + HU_{\Gamma}\beta + mgl\beta + HU_{\text{в}} &= 0 \\ H\dot{\beta} + \dot{H}\beta - HU_{\Gamma}\alpha &= M, \end{aligned} \quad (1)$$

где  $H$  – кинетический момент гироскопа,

$U_{\Gamma}$  и  $U_{\text{в}}$  – горизонтальная и вертикальная составляющие угловой скорости вращения Земли в месте проведения измерений,

$\alpha$  и  $\beta$  – текущие углы отклонения оси ротора гироскопа от меридиана и плоскости горизонта соответственно,

$mgl$  – маятниковость гироскопа.

Нетрудно видеть, что при постоянном значении кинетического момента ( $H = \text{const}$ ) решение системы уравнений (1) при  $mgl \gg HU_{\Gamma}$  по азимутальной координате  $\alpha$  будет иметь вид

$$\alpha = \left( \alpha_0 + \frac{M}{HU_{\Gamma}} \right) \cos \omega t + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega} \sin \omega t - \frac{M}{HU_{\Gamma}}, \quad (2)$$

где  $\alpha_0$  – начальный угол отклонения оси ротора от меридиана,

$\dot{\alpha}_0$  – его начальная угловая скорость.

Из выражения (2) можно сделать вывод, что при  $H = \text{const}$  чувствительный элемент гироскопа совершает гармонические

азимутальные колебания с известной частотой  $\omega = \sqrt{\frac{mglU_{\Gamma}}{H}}$  и неизвестной амплитудой, зависящей от начальных условий  $\alpha$  и  $\dot{\alpha}_0$ . Это азимутальное движение осуществляется относительно положения, смещенного от меридиана на неизвестный, постоянный при  $M = \text{const}$ , угол  $\alpha_{\text{частн.}} = -\frac{M}{HU_{\Gamma}}$ .

Поскольку азимутальный датчик измеряет угол отклонения оси ротора относительно корпуса прибора, будем считать, что измеряемой величиной является угол отклонения оси ротора относительно своего начального положения, т.е.  $\alpha - \alpha_0$ . Преобразовав выражение (2) к виду

$$\alpha - \alpha_0 = \left( \alpha_0 + \frac{M}{HU_{\Gamma}} \right) (\cos \omega t - 1) + \frac{\dot{\alpha}_0}{\omega} \sin \omega t,$$

видим, что применение методики [1] позволит оценить угол  $\alpha_0 + \frac{M}{HU_{\Gamma}}$  между начальным положением оси ротора и положением, смещенным от меридиана на  $\frac{M}{HU_{\Gamma}}$ , а не угол  $\alpha_0$  между начальным положением оси ротора и истинным положением меридиана.

### Основная часть

Найдем решение системы уравнений (1) по азимутальной координате  $\alpha$  в случае изменения кинетического момента по линейному закону:

$$H = H_0 + ht, \quad (3)$$

где  $H_0$  – начальное значение кинетического момента,

$h$  – скорость изменения кинетического момента,

$t$  – текущее время.

Два уравнения (1) с учетом  $mgl \gg HU_\Gamma$  и выражения (3) могут быть приведены к одному уравнению второго порядка относительно интересующей нас переменной  $\alpha$ :

$$H\ddot{\alpha} + 2\dot{H}\dot{\alpha} + U_\Gamma mgl\alpha = -2\dot{H}U_B - MH^{-1}mgl. \quad (4)$$

Введем новую независимую переменную

$$z = 2\sqrt{bH},$$

где 
$$b = mglU_\Gamma h^{-2}.$$

Тогда, определяя  $t$  из (3)

$$t = (H - H_0)h^{-1}$$

и обозначая  $\alpha' = \frac{d\alpha}{dz}$ ;  $\alpha'' = \frac{d^2\alpha}{dz^2}$ , запишем уравнение (4) в виде

$$z^2\alpha'' + 3z\alpha' + z^2\alpha = -2U'_B b^{-1}h^{-1}z^2 - M4bU_\Gamma^{-1}. \quad (5)$$

Однородное уравнение, соответствующее (5), является уравнением Бесселя и имеет решение [2]

$$\alpha = C_1 z^{-1}I_1(z) + C_2 z^{-1}Y_1(z),$$

где  $C_1$  и  $C_2$  – произвольные постоянные,

$I_1(z)$  и  $Y_1(z)$  – функции Бесселя 1-го порядка первого и второго рода соответственно.

Частное решение уравнения (5), полученное применением методики вариации произвольных постоянных, после некоторых преобразований с использованием рекуррентных соотношений для функций Бесселя [3], [4] можно представить в виде

$$\alpha_z = -2U_B b^{-1}h^{-1} - M4bU_\Gamma^{-1}z^{-2}.$$

Следовательно, общее решение уравнения (5) имеет вид

$$\alpha = C_1 z^{-1}I_1(z) + C_2 z^{-1}Y_1(z) - 2U_B b^{-1}h^{-1} - M4bU_\Gamma^{-1}z^{-2}. \quad (6)$$

Решение уравнения (9) ищем при начальных условиях

$$t = 0 \Rightarrow \alpha(0) = \alpha_0; \beta(0) = \beta_0; H(0) = H_0(z(0) = z_0 = 2\sqrt{bH_0} \quad (7)$$

Из первого уравнения системы (1) определяем

$$\beta = -H(mgl)^{-1}(\dot{\alpha} + U_2),$$

и, подставляя в него предварительно продифференцированное выражение (6), получаем

$$\beta = C_1 \frac{I_2(z)h}{2mgl} + C_2 \frac{Y_2(z)h}{2mgl} - \frac{U_B z^2}{4bmg} - M \frac{4bh}{U_T z^2 mgl}, \quad (8)$$

где  $I_2(z)$  и  $Y_2(z)$  – функции Бесселя 2-го порядка первого и второго рода соответственно.

Подставляем в выражения (6) и (8) начальные условия (7) и определяем постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$ , после чего, произведя несложные преобразования, окончательно запишем аналитический закон движения чувствительного элемента в горизонтальной плоскости при линейном разгоне ротора в виде

$$\begin{aligned} \alpha = & \alpha_0 \frac{\pi z_0^2}{2z} [I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \beta_0 mgl \frac{\pi z_0}{zh} [Y_1(z_0)I_1(z) - \\ & - I_1(z_0)Y_1(z)] \frac{Mz_0}{U_1 H_0 z} \left\{ \frac{\pi z_0}{2} [I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \right. \\ & + \pi [Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{z_0}{z} \left. \right\} + \frac{U_2}{h} \left\{ \frac{\pi z_0^2}{bz} [I_2(z_0)Y_1(z) - \right. \\ & \left. - Y_2(z_0)I_1(z)] + \frac{\pi z_0 H_0}{z} [Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{2}{b} \right\}. \end{aligned} \quad (9)$$

Предполагая, как и ранее, что измеряемой величиной является угол отклонения оси ротора от своего начального положения, т.е.  $\alpha - \alpha_0$ , выражение (9) с учетом обозначений:

$$\begin{aligned} f_1(z) &= \frac{\pi z_0^2}{2z} [I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] - 1; \\ f_2(z) &= mgl \frac{\pi z_0}{zh} [Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)]; \\ f_3(z) &= \frac{z_0}{U_1 H_0 z} \left\{ \frac{\pi z_0}{2} [I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \right. \\ & \left. + \pi [Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{z_0}{z} \right\}; \\ f_4(z) &= \alpha - \alpha_0 - \frac{U_2}{h} \left\{ \frac{\pi z_0^2}{bz} [I_2(z_0)Y_1(z) - Y_2(z_0)I_1(z)] + \right. \\ & \left. + \frac{\pi z_0 H_0}{z} [Y_1(z_0)I_1(z) - I_1(z_0)Y_1(z)] - \frac{2}{b} \right\}. \end{aligned}$$

Можно записать так:

$$f_4 = \alpha_0 f_1 + \beta_0 f_2 + M f_3.$$

Производя изменения в дискретные моменты времени можно, применяя при обработке информации, например, метод наименьших квадратов, найти наилучшие оценки  $\widehat{\alpha}_0$ ,  $\widehat{\beta}_0$ ,  $\widehat{M}$  неизвестных. Оценка  $\widehat{\alpha}_0$  дает однозначную информацию о положении плоскости географического меридиана.

**Выводы**

В статье предложена методика определения положения географического меридиана трехстепенным маятниковым гирокомпасом, основанная на анализе азимутального движения чувствительного элемента в режиме линейного разгона его ротора. Получены аналитические выражения, описывающие движение чувствительного элемента в указанном режиме с учетом действия вокруг его вертикальной оси постоянного неконтролируемого момента. Означенные аналитические выражения могут быть положены в основу построения алгоритма оценивания параметра, указывающего положение плоскости меридиана.

Предложенная методика позволит существенно сократить время определения меридиана за счет двух факторов:

- отсутствия необходимости в специальных средствах борьбы с вертикальным неконтролируемым моментом,
- использования времени разгона ротора, ранее считавшегося балластным, для набора информации об азимутальном движении чувствительного элемента.

Дальнейшие исследования, совершенствующие применение указанной методики, возможны в направлениях

- алгоритмического учета и компенсации других (кроме постоянного) видов неконтролируемых моментов, возникающих в процессе эксплуатации гирокомпаса;
- разработки алгоритмов определения меридиана при иных (отличных от линейного) законах изменения кинетического момента ротора гирокомпаса.

**Список использованной литературы**

1. *Ройтенберг Я. Н.* О некоторых косвенных методах получения информации о положении управляемой системы в фазовом пространстве // Я. Н. Ройтенберг / ПММ, 1961. т. XXV, вып. 3, с.440-444.
  2. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям // Э. Камке / – М. : Наука, 1971. – 576 с.
  3. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. Под ред. Абрамовица М. и Стиган И. – М. : Наука, 1979. – 832 с.
- Янке Е.* Специальные функции. Формулы, графики, таблицы // Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Леш/ - М.: Наука, 1977. – 344 с.