

УДК 631.153.3:330.131.7

© Н.А. Голоднікова

## **РИСК В СЕЛЬСКОХОЗЯЙСТВЕННОМ ПРОИЗВОДСТВЕ**

*В статье рассматривается задача оптимизации структуры посевных площадей с учетом риска потерь урожая. Для ее решения предложена математическая модель, в основе которой лежит подход, принятый в теории портфельной оптимизации. Его суть состоит в том, чтобы максимизировать средний ожидаемый результат при ограничениях на риск потерь. Приведен анализ оптимальных решений этой задачи, полученных с использованием статистических данных.*

**Ключевые слова:** математические вероятностные модели, урожайность сельскохозяйственных культур, потери урожая, риск-анализ, мера риска.

### **Введение**

Решения о структуре сельскохозяйственного производства принимаются в условиях неопределенности и риска, поскольку в аграрном секторе результаты производства колеблются по годам в зависимости от погодных условий. Для обеспечения устойчивого снабжения продуктами питания эти решения должны основываться на учете различных возможных сценариев погодных условий. В работе [1] разработана математическая модель сельскохозяйственного производства с учетом погодного риска. Она основана на сценариях урожайности сельскохозяйственных культур при различных погодных условиях. Для численной реализации этой модели было предложено использовать в качестве сценариев исторические данные по урожайности сельскохозяйственных культур за предыдущие годы. В работе [2] на примере частной задачи оптимизации структуры посевных площадей продемонстрирован подход к поиску оптимального решения в аграрном секторе с учетом погодного риска с использованием исторических данных об урожайности сельскохозяйственных культур в Украине за 1990–2009 гг. Выборка такого малого объема недостаточна для получения решения с требуемой степенью статистической достоверности. Поэтому возникает необходимость в генерировании псевдоисторических данных больших объемов с использованием средств статистического имитационного моделирования. Для реализации такого подхода в данной статье предложены вероятностные модели для отдельных неблагоприятных агрометеорологических явлений.

### **1. Модель принятия оптимального решения в аграрном секторе с учетом погодного риска**

В терминах оптимизации структуры посевных площадей задача состоит в поиске такого распределения общей посевной площади между разными сельскохозяйственными

культурами, при котором максимизируется среднегодовая урожайность при ограничении на риск недобора урожая вследствие реализации неблагоприятных погодных условий.

Пусть  $I$  обозначает количество рассматриваемых зерновых и зернобобовых культур;  $\xi_i$  – случайная величина, моделирующая урожайность  $i$ -ой культуры,  $i = 1, \dots, I$ ;  $\xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_I)$  – случайный вектор, компонентами которого являются случайные величины  $\xi_i$ ,  $i = 1, \dots, I$ ;  $x_i$  – доля земельных площадей, отводимых под  $i$ -ю культуру;  $x = (x_1, x_2, \dots, x_I)$  – вектор, обозначающий структуру посевных площадей. Переменные  $x_i, i = 1, \dots, I$  должны удовлетворять условиям:

$$\sum_{i=1}^I x_i = 1, \tag{1}$$

$$x_i \geq 0. \tag{2}$$

Для моделирования урожайности группы “зерновые и зернобобовые культуры”, для любой структуры посевных площадей  $x$  рассматривается случайная функция

$$\eta(x, \xi) = \sum_{i=1}^I x_i \xi_i. \tag{3}$$

При фиксированной структуре посевных площадей  $x$  функция

$$\omega(x, \xi) = E[\eta(x, \xi)] - \eta(x, \xi) \tag{4}$$

представляет собой случайное отклонение урожайности зерновых и зернобобовых культур от среднего значения.

Функцию  $\omega(x, \xi)$  можно трактовать как функцию потерь урожайности. Ее положительные значения соответствуют нежелательным исходам (недобор урожая по отношению к среднему уровню), а отрицательные – благоприятным (урожай, превышающий средний уровень). В связи с этим возникает проблема выбора подходящей меры риска реализации нежелательных исходов. В настоящее время широкое распространение получила мера риска VaR (Value at Risk), учитывающая отклонения только в одну (неблагоприятную) сторону.

Пусть для каждого  $x$  вероятностное распределение функции  $\omega(x, \xi)$  равно

$$F(x, z) = P\{\omega(x, \xi) \leq z\}. \tag{5}$$

Тогда VaR при уровне значимости  $\alpha$  ( $0 < \alpha < 1$ ) функции потерь урожайности  $\omega(x, \xi)$ , обусловленных выбором структуры урожайности  $x$ , определяется по формуле [3]:

$$VaR_\alpha(x) = \min\{z / F(x, z) \geq \alpha\}. \tag{6}$$

Это определение означает, что при фиксированном  $x$  с вероятностью  $\alpha$  недобор урожая по отношению к среднему уровню не будет превышать значение  $VaR_\alpha(x)$ . Если при

фіксованому  $x$  функція розподілення  $F(x, z)$  неперервна і строго монотонна, то  $VaR_\alpha(x)$  представляє собою квантиль рівня  $\alpha$  для цієї функції. Данна міра ризику має просту інтуїтивно зрозумілу сутність. Однак вона не відображає можливість реалізації великих втрат за межами  $VaR_\alpha(x)$  з малими ймовірностями.

Для урахування "важких хвостів" в функції розподілення втрат як міри ризику використовують CVaR (conditional VaR). Ця міра ризику визначає середні втрати, що перевищують відповідне значення VaR. В тому випадку, коли при фіксованому  $x$  функція розподілення  $F(x, z)$  неперервна в точці  $VaR_\alpha(x)$ , CVaR визначається за формулою [3]:

$$CVaR_\alpha(x) = E\{\omega(x, \xi) \mid \omega(x, \xi) \geq VaR_\alpha(x)\}. \quad (7)$$

Розглянемо тепер випадок, коли при фіксованому  $x$  випадкова величина  $\omega(x, \xi)$  приймає кінцеве число значень, які впорядковані наступним чином  $z_1 < z_2 < \dots < z_N$ . При цьому ймовірність реалізації значення  $z_k$  дорівнює  $p_k > 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ . Нехай при цьому індекс  $k_\alpha$  задовольняє умову:

$$\sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k \geq \alpha > \sum_{k=1}^{k_\alpha-1} p_k.$$

Тоді  $CVaR_\alpha(x)$  обчислюється за формулою [3]:

$$CVaR_\alpha(x) = \frac{1}{1-\alpha} \left[ \left( \sum_{k=1}^{k_\alpha} p_k - \alpha \right) z_{k_\alpha} + \sum_{k=k_\alpha+1}^N p_k z_k \right]. \quad (8)$$

Оскільки на практиці розподілення  $\omega(x, \xi)$  невідомо, то для обчислення  $CVaR_\alpha(x)$  використовується широко розповсюджений сценарний підхід, оснований на історичних даних. В межах цього підходу будемо вважати, що випадкова величина  $\xi_i$  приймає з рівними ймовірностями значення  $u_{i1}, \dots, u_{iJ}$ , де  $u_{ij}$  – історична урожайність  $i$ -ої культури,  $i = 1, \dots, I$ , в  $j$ -ом році;  $J$  – період, за який використовуються статистичні дані про урожайність зернових і зернобобових культур за минулі роки. При цьому випадковий вектор  $\xi$  приймає з рівними ймовірностями векторні значення  $u^1, \dots, u^J$ , де  $u^j = (u_{1j}, \dots, u_{Ij})$ ,  $j = 1, \dots, J$ . Вектор  $u^j$  трактується як випадкова реалізація ( $j$ -ий сценарій) вектора  $\xi$ . При фіксованому  $x$  випадкова функція  $\eta(x, \xi)$  приймає з рівними ймовірностями значення  $\eta_1(x), \dots, \eta_J(x)$ , де

$$\eta_j(x) = \sum_{i=1}^I x_i u_{ij}, \quad j = 1, 2, \dots, J. \quad (9)$$

Аналогічно, функція втрат урожайності  $\omega(x, \xi)$  при фіксованому  $x$  буде дискретною випадковою величиною, що приймає значення  $\omega_1(x), \omega_2(x), \dots, \omega_J(x)$ , де

$$\omega_j(x) = \sum_{i=1}^I x_i \left[ \left\{ \frac{1}{J} \sum_{j=1}^J u_{ij} \right\} - u_{ij} \right], j = 1, 2, \dots, J. \quad (10)$$

Используя в качестве меры риска  $CVaR_\alpha(x)$ , сформулируем задачу оптимизации структуры посевных площадей следующим образом.

Найти структуру посевных площадей  $x = (x_1, x_2, \dots, x_I)$ , максимизирующую среднюю урожайность зерновых и зернобобовых культур:

$$\max_x E[\eta(x, \xi)] \quad (11)$$

при ограничениях:

на риск недобора урожая вследствие реализации неблагоприятных погодных условий

$$CVaR_\alpha(x) \leq R, \quad (12)$$

на переменные задачи

$$\sum_{i=1}^I x_i = 1, \quad (13)$$

$$l_i \leq x_i \leq u_i, \quad i = 1, \dots, I. \quad (14)$$

Для решения задачи (12)–(14) в работе [2] использовался сценарный подход, основанный на исторических данных об урожайности сельскохозяйственных культур в Украине за 1990–2009 годы. Выборка такого малого объема недостаточна для получения решения с требуемой степенью статистической достоверности. Поэтому возникает необходимость в генерировании псевдоисторических данных больших объемов с использованием средств статистического имитационного моделирования. Для реализации такого подхода необходимо разработать вероятностные модели для отдельных неблагоприятных агрометеорологических явлений.

## **2. Неблагоприятные агрометеорологические явления**

К источникам риска потерь урожая относятся такие неблагоприятные агрометеорологические явления, как засухи, наводнения, вымерзание, вымокание, выпревание озимых культур, образование ледовой корки, заморозки, ливень, град [4]–[5].

К засушливым явлениям относят высокую температуру и низкую влажность воздуха, длительные бездождевые периоды, атмосферную и грунтовую засухи, суховеи.

Высокая температура воздуха – один из основных факторов риска потери урожая. Особенно опасны для сельского хозяйства высокие температуры в сочетании с отсутствием осадков.

Следует заметить, что вред, наносимый неблагоприятными погодными явлениями сельскохозяйственным культурам, зависит от фазы их развития. Например, заморозки могут наблюдаться в весенне-летний период (апрель-июнь) или в осенний период

(сентябрь-октябрь), а иногда и в августе. Критическая температура, ниже которой растения повреждаются или гибнут, зависит от фазы развития: озимые, ранние яровые зерновые и зернобобовые культуры в начальные фазы развития выносят кратковременные заморозки до  $-7\text{ }^{\circ}\text{C}$ . В период колошения озимые, ранние яровые зерновые и зернобобовые культуры повреждаются при температуре  $-3\text{ }^{\circ}\text{C}$ , а во время цветения при  $-1\text{ }^{\circ}\text{C}$ , теплолюбивые растения (гречиха, фасоль, рис, бахчевые) повреждаются при  $-0.5\text{ }^{\circ}\text{C}$ .

Вредоносность каждого из перечисленных неблагоприятных агрометеорологических явлений определяется его повторяемостью, интенсивностью и размерами территории, которую оно охватывает.

### **3. Вероятностные модели риска возникновения неблагоприятных погодных явлений**

Данные о неблагоприятных погодных явлениях за многолетний период наблюдений содержатся в разных источниках. Первичными являются данные наблюдений на станциях метеорологической сети Украины. На основе результатов наблюдений на метеорологических станциях разработаны ежегодные технические обзоры погоды и особо опасных гидрометеорологических явлений, наблюдавшихся на территории деятельности гидрометеорологической службы Украины.

Следует также отметить, что основной объем информации о неблагоприятных погодных явлениях относится к периоду, предшествующему началу изменения климата. В то же время, объемов данных, полученных в условиях изменяющегося климата, явно недостаточно для получения статистически значимых оценок.

Каждое из рассмотренных неблагоприятных агрометеорологических явлений наступает в случайные моменты времени, образуя поток событий. С учетом того, что при оценке повторяемости этих событий минимальной единицей времени является один год, приемлемой моделью для описания случайного числа появления определенных событий в фиксированном промежутке времени, в фиксированной области пространства является распределение Пуассона [6]. Пусть  $\lambda > 0$  – некоторая постоянная;  $\xi_n, n \geq 1$ , – последовательность независимых экспоненциально распределенных случайных величин с параметром  $\lambda$ . Тогда множество моментов времени  $\{t_n, n \geq 1\}$ , где

$$t_n = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_n, \quad n \geq 1, \quad (15)$$

называется пуассоновским потоком [6]. Для пуассоновского потока время от момента  $t = 0$  до наступления следующего события потока имеет экспоненциальное распределение с параметром  $\lambda$ . Плотность распределения промежутка времени между двумя последовательными событиями имеет вид

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad t > 0. \quad (16)$$

Предположим, что событие, связанное с рассматриваемым неблагоприятным агрометеорологическим явлением, произошло в момент времени  $t = 0$ . Тогда вероятность того, что оно не произойдет повторно на промежутке времени  $(0, t)$ , вычисляется по формуле

$$P(t) = e^{-\lambda t}. \quad (17)$$

Оценив для каждого неблагоприятного агрометеорологического явления параметр  $\lambda$ , мы получим вероятностные модели, которые можно использовать для генерирования псевдоисторических данных больших объемов.

### **Заключение**

Для проведения риск-анализа посевных площадей рассматривается задача поиска такого распределения общей посевной площади между разными сельскохозяйственными культурами, при котором максимизируется среднегодовая урожайность при ограничении на риск недобора урожая вследствие реализации неблагоприятных погодных условий. При этом значения урожайности сельскохозяйственных культур рассматриваются как набор случайных величин, каждая из которых имеет свою функцию распределения, которая на практике неизвестна. В связи с этим, в качестве сценариев используются статистические данные об урожайности сельскохозяйственных культур за прошедшие годы. Поэтому возникает необходимость в генерировании псевдоисторических данных больших объемов с использованием средств статистического имитационного моделирования. В статье намечены подходы к решению этой сложной задачи.

### **Список использованной литературы**

1. Пепеляев В.А., Голодникова Н.А. Оптимизация структуры сельскохозяйственного производства для обеспечения продовольственной безопасности Украины. // Компьютерная математика. – Киев, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, – 2011. – Вып. 1. – С. 46–55.
2. Голодникова Н.А. Оптимизация структуры посевных площадей с учетом риска. // Компьютерная математика. – Киев, Ин-т кибернетики им. В.М. Глушкова НАН Украины, – 2013. – Вып. 1. – С. 85–92.
3. Rockafellar R.T. and S. Uryasev. Conditional Value-at-Risk for General Loss Distributions. Journal of Banking and Finance, – 2002. – Vol. 26. – P. 1443–1471.
4. Дмитренко В.П. Погода, клімат і урожай польових культур – Український науково-дослідний гідрометеорологічний інститут. – К: Ніка-Центр, 2010. – 620 с.
5. Дмитренко В.П., Щербак Л.В., Бібик В.В. Сільськогосподарська метеорологія: Термінологічний довідник. – К: Ніка-Центр, 2009. – 272 с.
6. Корольок В.С., Портенко Н.И., Скороход А.В., Турбин А.Ф. Справочник по теории вероятностей и математической статистике. – М.: Наука, 1985. – 640 с.

*Стаття надійшла до редакції 11.02.13 російською мовою*

**© Н.О. Голоднікова**

**РИЗИК У СІЛЬСЬКОГОСПОДАРСЬКОМУ ВИРОБНИЦТВІ**

*У статті розглядається задача оптимізації структури посівних площ з врахуванням ризику втрат урожаю. Для її розв'язання запропонована математична модель, в основі якої лежить підхід, що використовується в теорії портфельної оптимізації. Його суть полягає у тому, щоб максимізувати середній очікуваний результат при обмеженнях на ризик втрат. Наведено аналіз оптимальних розв'язків цієї задачі, отриманих з використанням статистичних даних.*

**© N.A. Golodnikova**

**RISK IN AGRICULTURAL PRODUCTION**

*The paper considers the problem of optimizing the structure of sown areas, taking into account the risk of crop losses. To solve the problem, we suggested a mathematical model, which is based on the approach used in the theory of portfolio optimization. It consists of in maximizing the average expected outcome under the constraints on the risk of loss. An analysis of optimal solutions obtained by using statistical data is presented.*