

УДК 004.942

О.О. КРЯЖИЧ

АЛГОРИТМ АПРОКСИМАЦІЇ ФУНКЦІЙ З ВИКОРИСТАННЯМ МЕТОДУ ДЖ. ЗОЙТЕНДЕЙКА

***Анотація.** У статті розглядається варіант кусочно-поліноміальної апроксимації із застосуванням методу можливих напрямків. Розглянута можливість застосування методу Дж. Зойтендейка для вирішення задач опису складних функцій. Представлений алгоритм та первинна комп'ютерна програма. Зроблені висновки з означенням практичної цінності представлених досліджень.*

***Ключові слова:** функція, поліном, апроксимація, похідна.*

Вступ

Нелінійність є однією з властивостей природних систем. Розвиток природної системи часто відбувається через стрибок – коли при плавній зміні зовнішніх умов виникає пороговий характер обмежень. Саме тоді відбувається радикальна зміна системи, яку вже неможливо описати рівнянням типу $a \cdot x = b$.

Нелінійні системи нерівноважні і відкриті, вони створюють і підтримують неоднорідності в середовищі. Така система схильна до самоорганізації з виникненням нових властивостей і станів з певними обмеженнями. Самоорганізація йде через точки біфуркації, в результаті чого роль випадкових факторів в системі різко збільшується. Прикладів розвитку подібних систем можна навести безліч: розростання яру, промивання русла річки, зсуви ґрунту, розповсюдження хмари диму при пожежі в лісі чи степу. Для опису таких процесів використовуються методи випадкових нелінійних обмежень-нерівностей, один з варіантів якого – апроксимація складних функцій за методом можливих напрямків – був запропонований Дж. Зойтендейком ще у 60-х роках минулого століття [1]. Проте, незважаючи на досить великий обсяг робіт з апроксимації складних функцій, що тривають ледь не століття, задача точності таких обрахунків залишається актуальною. Персональні комп'ютери дозволили вирішувати задачі апроксимації складних функцій, проте опис нелінійних систем і надалі залишається важкою задачею через необхідність здійснення багатьох перетворень.

Актуальність теми, що розглядається, полягає у наступному: існує необхідність максимально точно описати і візуалізувати процеси, що відбуваються у природному середовищі, та межі взаємодії людини, техніки і технологій та природи. Нещодавно відомий британський фізик-теоретик Стівен Хокінг попередив, що людству загрожує техногенна катастрофа [2]. Тож при роботі з програмами, що дозволяють візуалізувати за допомогою геоінформаційних технологій зони ураження сильнодіючими отруйними речовинами (СДОР) у разі техногенної аварії, необхідно максимально наближено створити модель небезпечного середовища. Сучасні інструменти моделювання дозволяють наносити ці зони на карти і схеми у вигляді кола, півкола або сектора. Зона фактичного зараження представляється у формі

еліпса і включається у зону можливого зараження. Така візуалізація не дає картини, що є наближеною до реальності, адже природна система, де відбулася аварія, має свої особливості, тож хмара СДОР не буде чітким еліпсом чи колом. Хмара СДОР може бути зваженою, заповнювати певні «кишені» місцевості, розповсюджуватися вздовж водойм або над водою. І тому важливо не лише надати особам, що приймають рішення (ОПР), інформацію про розповсюдження і глибину ураження, а й представити цей площинний варіант карти в об'ємному вимірі з візуалізацією особливостей природної системи.

Метою роботи є розробка алгоритму з використанням методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка для візуалізації опису нелінійних систем.

Завдання роботи:

– розглянути рішення задачі з апроксимації функцій поліномами за методом Дж. Зойтендейка;

– представити алгоритм з виконанням візуалізації довільної задачі.

Питання апроксимації функцій поліномами протягом декількох десятиліть досліджувалися українськими [3–6] і зарубіжними вченими [7–8]. Проте згадуваний метод [1] є дуже цікавим зараз через точність, яку дають розрахунки за цим підходом, а сучасна комп'ютерна техніка дозволяє виконувати складні розрахунки та описи у короткий проміжок часу, що дасть змогу зазначене без обмежень використовувати на практиці.

1. Реалізація методу можливих напрямків Дж. Зойтендейка

Якщо точка x_k знаходиться на межі припустимої області X , то будь-який малий крок $\alpha_k > 0$ в напрямку антиградієнта за методами градієнтного спуску може призвести до неприпустимої точки ($x_k \notin X$). Подолання такого випадку передбачено в методах можливих напрямків, до яких відносяться метод проєкції градієнта, метод умовного градієнта, опуклий симплексний метод Зангвілла і метод Дж. Зойтендейка. Загальна ідея підходу полягає у виборі мінімально можливого напрямку пошуку у граничній точці x_k , з врахуванням всіх обмежень та кута зі спрямуванням антиградієнта в цій точці.

Нехай на проміжку $[a, b]$ задана безперервна обмежена функція $f(x)$. Нас цікавить кусочно-поліноміальна функція $P(x) \in C^1(a, b)$, яка найкращим чином наближує $f(x)$ за підходом Чебишева. Виразом $C^1(a, b)$ означаємо клас функцій, безперервних на відрізку $[a, b]$ разом з першою похідною. Явно, що для $P(x)$ матиме місце наступне представлення:

$$\begin{cases} f_1(x) & x \in [a, C_1] \\ f_2(x) & x \in [C_1, C_2] \\ \dots\dots\dots \\ f_s(x) & x \in [C_s, b] \end{cases} \quad (1)$$

Точки $a = C_0 < C_1 < C_2 < \dots < C_S < C_{S+1} = b$ будемо вважати невідомими.

Функції $f_i(x)$, $i = \overline{1, S}$ є поліноміальними зі ступенем не менше 2. Тобто, наведена задача у випадку, якщо $f_i(x)$ мають однаковий ступінь, і є задачею побудови сплайн функції з фіксованими вузлами [8].

Задача побудови $P(x)$ зводиться до кількох завдань побудови поліномів найкращого наближення $f_i(x)$ в розумінні підходу Чебишева до функції $f(x)$ для $x \in [C_i, C_{i+1}]$ ($i = \overline{0, k}$). Цей факт впливає з принципу оптимальності Беллмана. Саме тому достатньо розглянути задачу побудови полінома найкращого наближення до $f(x)$ на деякому інтервалі. Цей поліном повинен ще задовольняти умови, що забезпечують відповідну гладкість $P(x)$.

Нехай задана функція $f(t)$ і деяка дискретна множина точок:

$$E = \{Y_0, Y_1, \dots, Y_{N+1}\} \in [a, b]$$
$$Y_0 = a, \quad Y_{N+1} = b.$$

Треба відшукати поліном заданого ступеня k :

$$\Pi_k(t) = \sum_{i=0}^k x_i t^i,$$

який мінімізує величину $\varepsilon(x) = \max_{t_i \in E} |f(t_i) - \Pi_k(t_i)|$ по усіх x з області $\Delta \subset E_{n+1}$, де Δ визначається:

$$\Delta = \{x \in E_{n+1} : f^{(i)}(a) = \Pi_k^{(i)}(a); f^{(i)}(b) = \Pi_k^{(i)}(b); i = \overline{0, 1}\}.$$

Якщо прийняти, що $t_j^i = a_{ij}$ $|i = \overline{0, k}; j = \overline{0, n+1}|$, то задача, що розглядається, буде еквівалентною наступній задачі лінійного програмування [9]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \varepsilon \\ \sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq f(Y_i) \\ -\sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq -f(Y_i) \\ \sum_{i=0}^k a_{i,0} x_i = f(Y_0) \\ \sum_{i=0}^k a_{i,n+1} x_i = f(Y_{n+1}) \\ \sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,0} x_i = f'(Y_0) \\ \sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,n+1} x_i = f'(Y_{n+1}) \\ \varepsilon \geq 0; \quad j = \overline{1, n} \end{array} \right. \quad (2)$$

Специфіка наведеної задачі лінійного програмування полягає у тому, що матриця обмежень $A = (a_{ij})$, $i = 0, k$; $j = 0, n+1$ має прямокутний вигляд і кількість рядків домінує над кількістю стовпців, $K \ll N$. Тому для вирішення поставленої задачі обрано метод можливих напрямків Дж. Зойтендейка [1]. Через те, що метод передбачає наявність нерівності, то умова виразу (2) буде розписана як дві нерівності і на майбутнє буде припущено, що всі обмеження (2) мають вигляд нерівностей.

Нехай нам дана довільна задача лінійного програмування:

$$\left\{ \begin{array}{l} \max \sum_{j=1}^k d_j x_j \\ \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j \leq b_i \\ x_j \geq 0, \quad i = \overline{1, P}; \quad j = \overline{1, k} \end{array} \right. \quad (3)$$

Як і всі методи лінійного програмування, градієнтний метод вимагає відшукування точки, яка задовольняє обмеження задачі лінійного програмування. Позначимо її $X^0 = (x_1^0, \dots, x_k^0)$. Тоді для X^0 виконується:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^0 \leq b_i \\ x_j^0 \geq 0 \quad i = \overline{1, P}; \quad j = \overline{1, k}. \end{array} \right. \quad (4)$$

На відміну від симплексного і двоїстого методів вирішення задачі лінійного програмування, X^0 може й не бути базисною точкою, що значно спрощує вирішення задачі. У цьому дослідженні припустимо, що така точка нам відома. Тоді ірраціональна процедура знаходження рішення задачі (3) зводиться до наступного:

а) з точки X^0 обираємо напрямок S , за яким величина $\sum_{j=1}^k d_j S_j$ має найбільше значення і вектор $S=(S_1, \dots, S_k)$ задовольняє обмеження $\sum_{j=1}^k P_{ij} S_j \leq 0, i = \overline{1, P_1}$ ($P_1 \leq P+K$), де матриця $P=(P_{ij})$ складена з умов матриці обмежень (3), які для точки X^0 виконуються як рівняння, тобто, для матриці P маємо:

$$\sum_{j=1}^k P_{ij} x_j^0 = b_i \quad i = \overline{1, P_1},$$

додаючи сюди і умову невід'ємного невідомого. Після обрання напрямку S , обираємо довжину кроку λ для переходу у наступну точку X^1 , виходячи з умови, що X^1 повинна задовольняти (4);

б) вибір величини λ здійснюємо з відношення:

$$\lambda = \left\{ \min \frac{b_i - \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j^0}{\sum_{j=1}^k a_{ij} S_j} \mid \sum_{j=1}^k a_{ij} S_j > 0, \quad i = \overline{1, P} \right\};$$

в) будуємо точку $X^1 = X^0 + \lambda S$, яка задовольняє умови (4). Величина, на яку збільшилася лінійна форма задачі (3), дорівнює $\lambda \sum_{j=1}^k d_j S_j$;

г) повторюються пункти а) і б) відносно точки X^1 , та отримується X^2 . Це повторюється до того випадку, поки не буде існувати напрям, для якого величина $\sum d_j S_j$ стає від'ємною. Цей факт доводить, що не існує точки, яка задовольняє (4), в якій лінійна форма набувала б значення попередньої форми. Тому точка, на якій зупинився процес, буде вирішенням задачі (3).

Для побудови алгоритму слід більш детально зупинитися на виборі напрямку S . Знаходження вектора $S=(S_1, \dots, S_k)$ зводиться до знаходження рішення наступної задачі математичного програмування:

$$\sum_{j=1}^k d_j S_j \rightarrow \max \tag{5}$$

$$\sum_{j=1}^k P_{ij} S_j \leq 0 \quad (i = \overline{1, P_1}), \quad (6)$$

до якої, як правило, додають ще одне обмеження (нормалізацію) на вектор $S = (S_1, \dots, S_k)$. Для дослідження обираємо обмеження:

$$\sum_{j=1}^k S_j^2 \leq 1. \quad (7)$$

Але можливі і інші варіанти нормалізації: а) $-1 \leq S_j \leq 1$; б) $S_j \leq 1$, коли $d_j \geq 0$; $S_j \geq -1$, коли $d_j < 0$. Оскільки розміри представленої довільної задачі відносно невеликі, то кількість ітерацій для її рішення незначна.

2. Алгоритм та його візуалізація

Спираючись на обмеження (7), можна зазначити, що на практиці дуже важко буде вибрати деяку точку X^0 , яка задовольнятиме (4), то замість задачі (3) можна вирішити задачу, яка у деякому сенсі є еквівалентною задачі (3), тобто застосувати метод можливих напрямків до вирішення задач чебишевського наближення з додатковими обмеженнями:

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^k d_j x_j - M_\xi \rightarrow \max \\ \sum_{j=1}^k a_{ij} x_j + \beta_i \xi \leq b_i & i = \overline{1, P} \\ x_j \geq 0, \quad \xi \geq 0 & j = \overline{1, K} \end{cases} \quad (8)$$

де M є великим невід'ємним числом, а величини визначаються системою

$$\beta_i = \begin{cases} 0, & \text{якщо } b_i \geq 0 \\ -1, & \text{якщо } b_i < 0, \quad i = \overline{1, P} \end{cases}$$

Припустімо, значення невідомої ξ дорівнює $\xi_0 = \{\max(-b_i) / b_i < 0, \quad i = \overline{1, P}\}$. У зазначеному випадку вектор $X_\xi^0 = (O_1 O, \dots, O_1 \xi_0)$ стане початковим вирішенням задачі (8). А якщо область умов, що задана у (4), є не порожньою, то задача (8) матиме оптимальне рішення, а невідома ξ дорівнюватиме 0. Саме тому, у разі отримання від'ємного рішення задачі (8) $X_\xi^{on} = \{X_1^{on}, X_2^{on}, \dots, X_k^{on}, O\}$ ми матимемо і оптимальне рішення задачі (3) $X_{on} = \{X_1^{on}, X_2^{on}, \dots, X_k^{on}\}$.

Для побудови початкового вирішення задачі (2) за допомогою комп'ютерної програми можна застосувати додаткові перетворення (9). Перехід від задачі (2) до задачі (9) обумовлюється тим, що значення точок t_i та $f(t_i)$, а також обчислення похідних $f'(a)$, $f'(b)$ завжди мають деяку похибку. Саме тому, замість рівностей (2), можна обмежитися вимогами виконання відповідних умов нерівностей:

$$\begin{aligned} |\Pi_k(a) - f(a)| &\leq \alpha_1 \varepsilon \\ |\Pi'_k(a) - f'(a)| &\leq \alpha_2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Аналогічно будуються умови для точки b . Величини α_1, α_2 додатні та обрані в залежності від необхідної точності виконання нерівностей.

$$\left\{ \begin{aligned} &-\varepsilon \rightarrow \max \\ &\sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq f(Y_j) \\ &-\sum_{i=0}^k a_{ij} x_i - \varepsilon \leq -f(Y_j) \\ &\sum_{i=0}^k a_{i,0} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq f(Y_0) \\ &-\sum_{i=0}^k a_{i,0} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq -f(Y_0) \\ &\sum_{i=0}^k a_{i,N+1} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq f(Y_{N+1}) \\ &-\sum_{i=0}^k a_{i,N+1} x_i - \alpha_1 \varepsilon \leq -f(Y_{N+1}) \\ &\sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,0} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq f'(Y_0) \\ &-\sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,0} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq -f'(Y_0) \\ &\sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,N+1} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq f'(Y_{N+1}) \\ &-\sum_{i=1}^k i \cdot a_{i-1,N+1} x_i - \alpha_2 \varepsilon \leq -f'(Y_{N+1}) \\ &\varepsilon \geq 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \right. \quad (9)$$

Вибір початкового вирішення для системи (9) можна отримати наступним чином.

Візьмемо $x_i = 0, i = 0, K$. Значення ε визначаємо за формулою

$$\varepsilon^0 \left\{ \max \frac{-f(Y_i)}{a_{i,\varepsilon}} \mid f(Y_i) < 0, \quad i = \overline{0, N+1} \right\},$$

де $a_{i,\varepsilon}$ – коефіцієнт при ε ($a_{i,\varepsilon} = -1, -\alpha_1, -\alpha_2$).

У цьому випадку точка $X^0 = \left\{ \underbrace{0_1 0, \dots 0}_{k+1} \varepsilon^0 \right\}$ буде задовольняти

обмеженням задачі (9), тобто, її можна означити як початкову точку.

Таким чином, вирішуючи задачу (9) методом можливих напрямків, можна отримати вирішення довільної задачі найкращого наближення поліномом $\Pi_k(x)$ функції $f(x)$ на відрізку $[a, b]$.

Далі припустимо, що поставлену задачу слід вирішити на кінцевому проміжку $[\alpha, \beta]$, де функція $f(x)$, що апроксимується, є обмеженою, безперервною та однозначною. При обраному масштабі оберемо відрізок одиничної довжини $[C_0, C_1]$. Також приймаємо, що всередині цього відрізка відсутні полюсні точки. Попередньо досліджуємо на цьому відрізку $f(x)$. Приймаємо, що $C_1 > C_0$. Нехай відрізок розбито на N частин, тобто $N+1$ точки апроксимації є заданими. Серед них є:

- а) точки C_0 і C_1 ;
- б) \bar{N} фіксованих точок;
- в) $(N+1) - \bar{N} - 2 = N - \bar{N} - 1$ звичайних точок.

Нехай x_j^0 – довільна точка ділення; $x_0^0 = C_0$ і $x_{N+1}^0 = C_1$. Вважаємо, що нам задані значення $f(x)$ в кожній із точок x_j^0 , тобто задана сукупність $f(x_j^0)$.

Визначимо

$$\delta_{1,j}^{(0)} = f(x_{j+1}^0) - f(x_j^0), \tag{10}$$

а також обчислюємо величини

$$\sigma_{1,j}^{(0)} = \frac{\delta_{1,j}^{(0)}}{x_{j+1}^0 - x_j^0}. \tag{11}$$

Тепер досліджуємо поведінку функції $\sigma_1^{(0)}(x)$, заданої точками $\sigma_{1,j}^{(0)}$ на відрізку $[C_0, C_1]$. Будемо розрізняти наступні три випадки:

- 1) $|\sigma_{1,j+1}^{(0)} - \sigma_{1,j}^{(0)}| \leq \xi^{(0)}$, де $\xi^{(0)} > 0$ – досить мале число. Тобто, функція $\sigma_1^{(0)}(x)$ з відомою точністю поводитья як постійна величина. У цьому випадку природно покласти ступінь полінома рівним одиниці $n = 1$.

2) Функція $\sigma_1^{(0)}(x)$ – знакопостійна на $[C_0, C_1]$ й $\sigma_{1,j}^{(0)} \neq 0$. Тоді $n = 2$. Якщо ж $\sigma_1^{(0)}(x)$ приймає нульове значення в m різних точках, між якими перебувають $\sigma_{1,j}^{(0)}$ відмінні від нуля, то $n = m + 2$.

3) $\sigma_1^{(0)}(x)$ – знаковмінна на $[C_0, C_1]$. З врахуванням того, що число N настільки велике щодо довжини відрізка, що ймовірність втрати зміни знака стає дуже малою. Нехай $\sigma_1^{(0)}(x)$ змінює знак у l точках з $[C_0, C_1]$ і, крім цього, в m різних точках $\sigma_{1,j}^{(0)} = 0$ (між цими точками обов'язково перебувають такі, у яких $\sigma_{1,j}^{(0)} \neq 0$), але не має знака в їх оточенні. Нехай далі в P точках, зазначених $l + m / f(x_j^0) = 0$. Тоді ступінь полінома

$$n = l + m + p + 1. \quad (12)$$

Задамося деяким числом $\tilde{\varepsilon} > 0$. Будемо говорити, що $P(x)$ задовольняє по точності, якщо

$$\begin{aligned} \max |P(x) - f(x)| &\leq \tilde{\varepsilon} \\ x &\in [a, b] \end{aligned}$$

Очевидно, що кожний поліном $f_i(x)$, що становить $P(x)$, повинен задовольняти по точності.

Нехай на деякому інтервалі $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$ побудовано поліном $f_s(x)$ ступеня n . Побудувавши відповідну задачу лінійного програмування, як було показано вище (9), і вирішивши її, ми одержимо величину ε . Вирішення задачі відшукування $f_s(x)$ з уточненням ступеня полінома й підінтервалу апроксимації є кінцевим. У такому випадку алгоритм опису яружних цільових функцій для поставленої довільної задачі буде наступним:

1. Здійснюється введення необхідних параметрів.
2. Вибір фактичних параметрів і визначення величин, потрібних для роботи програми.
3. Визначається довжина підінтервалу апроксимації.
4. Здійснюється одночасна побудова масивів.
5. Визначається попередній ступінь полінома апроксимації за допомогою масивів.
6. Здійснюється зменшення довжини підінтервалу наполовину й відновлення лічильників.
7. Побудова матриці обмежень за допомогою масивів.
8. Побудова C_1 й початкове рішення X^1 задачі лінійного програмування.
9. Побудова напрямку S_1 .
10. Обчислення довжини кроку для побудови нового вектора X^1 .

11. Побудова нового вектора X^1 .
 12. Блок коректування ступеня.
 13. Зниження ступеня. Побудова нових обмежень задачі лінійного програмування.
 14. Підвищення ступеня. Побудова обмежень задачі лінійного програмування.
 15. Фіксація результатів і перехід до нового підінтервалу апроксимації.
- Результати візуалізації довільної задачі з опису яру, виконані за допомогою мови програмування C#, представлені на рис. 1.

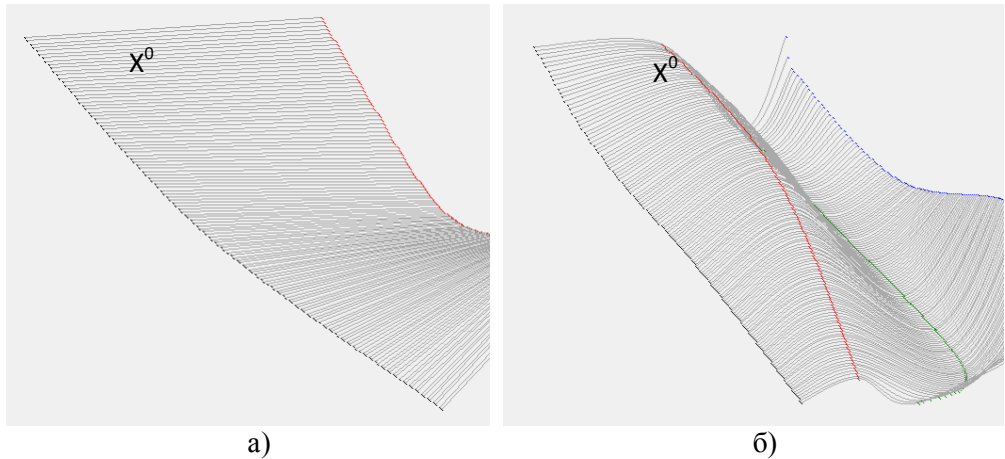


Рисунок 1 – Візуалізація рішення задачі за методом можливих напрямів
Дж. Зойтендейка

- а) довільна задача – візуалізація яру на схемі;
- б) опис, наближений до реальності

На рисунку представлений початковий вибір точки X^0 , що задовольняє обмеження задачі лінійного програмування і може бути не базисною точкою. Вигнутими горизонтальними лініями позначені кроки для побудови нового вектора X^1 , а вертикальною – напрям до пошуку від’ємної величини.

Висновки

Перспективним у представленому дослідженні є прорахунок конкретних ситуацій, які описуються яружними функціями, та візуалізація результатів, розробка модуля моделювання розповсюдження надзвичайних ситуацій з використанням геоінформаційних систем, створення програмного продукту, який би дозволяв візуалізувати моделювання нелінійних процесів.

Враховуючи те, що задачі отримання рівномірних наближень сплайнами з мінімальною погрішністю розвивалися у багатьох роботах лише у теоретичному плані, практична розробка з метою програмної реалізації є актуальною та необхідною. Слід зазначити, що наведений підхід та алгоритм може буде застосований у сфері підтримки прийняття рішень для вирішення багатьох задач, пов’язаних з описом складних систем з нелінійною динамікою процесів, що в них протікають.

Практичне значення наведеного в роботі полягає у можливості розширення інструментарію ОПР для опису зон ураження пересічених територій при техногенних аваріях.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Зойтендейк Г. Методы возможных направлений. – М.: Издательство Иностранной литературы, 1963. – 178 с.
2. Стивен Хокинг предупредил о возможной техногенной катастрофе [Електронний ресурс]. – Режим доступу: <https://kievsmi.net/novosti/ukraina/139763-stiven-xoking-predupredil-o-vozmozhnoj-technogennoj-katastrofe.html>
3. Василенко В.А. Сплайн-функции: теория, алгоритмы, программы. – Новосибирск: Наука, 1983. – 218 с.
4. Дзядик В.К. Введение в теорию равномерного приближения функций полиномами. – М.: Наука, 1977. – 512 с.
5. Попов Б.А. Равномерное приближение сплайнами. – К.: Наук. думка, 1989. – 272 с.
6. Киселева Е.М., Коряшкина Л.С. Модели и методы решения непрерывных задач оптимального разбиения множеств: линейные, нелинейные, динамические задачи: монография. – К.: Наукова думка, 2013. – 606 с.
7. Люк Ю. Специальные математические функции и их аппроксимации. – М.: Мир, 1980. – 608 с.
8. Альберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и её приложения: Пер. с англ. – М.: Мир, 1972. – 318 с.

Стаття надійшла до редакції 30.01.2016