

О.О. КРЯЖИЧ, О.В. КОВАЛЕНКО, В.О. ГРИЦИШИН

ЗАДАЧА ОПИСУ ЗАБРУДНЕНОЇ ТЕРИТОРІЇ З МІНІМІЗАЦІЄЮ ТОЧОК ЗАБОРУ ПРОБ

***Анотація.** В статті представлені попередні результати роботи з удосконалення способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні. Велика кількість ітерацій, що використовуються при розрахунках за зазначеним способом, призводить до утворення і накопичення похибок, які впливають на побудову подальших прогнозів. В роботі запропоновано криву руху (відбору проб) на пересіченій місцевості, за вектором напрямку розбиту на інтервали, які описуються потім з використанням елементарних та базових тригонометричних функцій. Для мінімізації похибок у цьому випадку пропонується використовувати нев'язки. Представлена практична апробація у вигляді демо-версії програми з внесенням удосконалення до алгоритму. Отримані результати, після додаткової апробації, планується використати в новій версії програми «Випадкова точка».*

***Ключові слова:** спосіб, функція, нев'язка, ітерація, полюсна точка.*

DOI: 10.35350/2409-8876-2019-14-1-20-32

Вступ

При розробці способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні [1] та апробації програмної реалізації [2] з самого початку роботи велися за двома напрямками – дослідження міграції радіоізотопу водню тритію [3] та розповсюдження хімічних речовин на поверхні ґрунту техногенно навантажених територій. За обома напрямками однією із задач дослідження виступало питання мінімізації точок забору проб, необхідних для отримання даних щодо забруднення території, при підвищенні точності опису території програмним засобом.

Актуальність роботи полягала у наступному: використання методу Дж. Зойтендейка передбачає виконання певної кількості ітерацій та визначення полюсних точок, в яких і відбувається забір проб та введення до розрахунку забруднення даних вимірів. За умов відносно незначної за площею території, кількість ітерацій невелика. Проте, якщо територія має велику площу або якщо це сильно пересічена територія (яри, русла, котловани, щільна забудова), то кількість ітерацій зростає, збільшується кількість полюсних точок і, відповідно, починає виникати помилка наближення, яка має вплив на подальший прогноз розповсюдження забруднення на такій території.

Сам спосіб опису, як і програмна реалізація, передбачає надання такого інструменту досліднику, що дозволяв би отримати максимально можливі дані з мінімальної кількості полюсних точок для побудови адекватної моделі забруднення. Тобто, в результаті використання такої програми дослідник має як можна менше знаходитися на забрудненій території, але отримувати при

цьому максимально точний результат для подальшої роботи з побудови прогнозних моделей.

Мета роботи – вдосконалення способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні з мінімізацією точок забору проб та представлення деяких результатів практичної апробації зазначеного способу.

Зазначена мета досягається за допомогою наступних задач:

- провести дослідження та обґрунтування вибору підходу до вдосконалення способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні;

- запропонувати підхід до удосконалення способу опису та його програмної реалізації із застосуванням нев'язок для мінімізації кількості точок, які необхідні для отримання адекватного результату з побудови моделі забрудненої території;

- довести можливість та ефективність використання запропонованого вдосконалення.

1. Аналіз літературних джерел за темою дослідження

У практиці моделювання виникнення та розвитку різноманітних екологічних ризиків, техногенних аварій та інших надзвичайних подій [4], пов'язаних із забрудненням навколишнього середовища, часто виникає задача розповсюдження небезпечних речовин в часі на сильно пересіченій місцевості. Такі нерівності на поверхні можна описати з використанням яружної функції [5]. Вирішення подібної задачі за допомогою лінійних функцій призведе до її неадекватності, оскільки у даному випадку існує ряд нелінійних обмежень, які можна подолати за допомогою методів можливих напрямків [6–8]. Але в існуючих програмних продуктах, наприклад [9], зони ураження будуть представлені колами, півколами або секторами з кутовим розміром і радіусом, що не відображає реального стану забруднення місцевості. Для адекватності побудованих моделей забруднення, деякі зі способів дослідження навколишнього середовища при його забрудненні реалізовані в інструментах моделювання геоінформаційних систем (GRASS GIS, ArcGIS, Quantum GIS та ін.), що дозволяють поєднувати зображення територій з табличною інформацією про стан території [10].

Для вирішення задачі опису забрудненої території, яка дозволить більш точно описати забруднення деякої ділянки земної поверхні, в роботі використано підхід багаторазової обробки даних (ітерацій) з метою поступового наближення до найкращого результату [11].

Методи побудови ітераційних формул відомі з початку виникнення математики як науки [12]. Але розвиток вчення та отримання ітераційних формул високих порядків пов'язують з роботами П.Л. Чебишова [13], Е. Шредера [14] та Й.Г. Ламберта [15]. Ітерації високого порядку розглянуті в роботах О.П. Доморяда, який втілює деякі аспекти цього у своїх роботах з математичних ігор [16], Ф. Хільдебранда з відомим вирішенням крайової задачі в прикладній математиці [17], Ш.С. Микеладзе щодо вирішення інтегральних рівнянь та методів математичного аналізу [18], Дж. Трауба із запропонованням підходів ітераційного методу вирішення рівнянь [19]. Дослідниками розглядаються підходи до отримання базових послідовностей ітераційних формул при розкладанні в ряд Тейлора [20], використання

інтерполяційних багаточленів [21], апроксимації Паде [22], різноманітних дробових розкладань та наближень [23]. Проте зазначені методи і підходи не стосувалися випадку, коли функція задається в неявному вигляді, що було розглянуто Г.С. Теслером [24] для використання в задачах підвищення швидкодії апаратної складової гарантоздатних інформаційних систем [25]. Останній підхід, за допомогою модифікації методу Чебишова [26], і застосований для виконання мети роботи. А за критерієм оптимального використання інформації [19, 27] такий підхід і, частково, О.П. Доморяда [28] дозволяє оптимально оперувати базовими послідовностями ітераційних формул, навіть якщо мова йде про неповнорозрядну інформацію [27]. Це призводить до зменшення похибок округлення в технології програмування [29], що важливо для забезпечення сходження алгоритмів, а з виникненням можливості широкого розгалужування процесів відбору інформації при запиті можна створювати розпаралелювання циклічних процесів за допомогою ітераційних формул з врахуванням помилки початкового наближення [19].

2. Постановка задачі

Для досягнення поставленої мети при зборі та обробці даних слід забезпечити повноту, несуперечливість і своєчасність інформації, яка використовується при моделюванні, що у разі програмної реалізації забезпечить живучість інформаційної системи в часі.

Повноту інформації можна представити як міру достатності інформації для вирішення певної задачі [30] або як можливість подати всі значення істини з множини логічних операцій за допомогою формул з елементів цієї множини [31]. Це можна описати за допомогою двох множин A і B через оператори диз'юнкції («або», \vee) та імплікації («якщо, то», \rightarrow):

$$A \vee B := (A \rightarrow B) \rightarrow B.$$

Несуперечність можна визначити у якості властивості системи, з якої не можна вивести поняття суперечності [32], коли одна множина параметрів заперечує іншу. У логічному вираженні це можна представити як хибу [31] або неоднозначність. Тобто, не можна визначити як істину два поняття, що впливає з закону суперечності і виражається через оператори заперечення (\neg) та кон'юнкцію («та», \wedge) як оператор істинності:

$$\neg (A \wedge \neg A).$$

Своєчасність може означати надходження інформації в зручний або призначений час [30]. Вона може бути представлена за підходом [33] математичною залежністю інформації від відрізка часу $[t_0 - t_k]$, на якому ця інформація є актуальною.

Виходячи з наведених визначень, живучість інформаційної системи можна визначити через категорію релевантності інформації, яка надається, але не просто як її відповідність потребам користувача [34], а як можливість представити повну та несуперечну інформацію в межах зміни події на часовому відрізку.

Врахування викладеного дозволяє досліднику побудувати власний шлях дослідження, який більше підходить для реалізації поставлених задач.

3. Територія та час проведення дослідження

Дослідження проводилися в місті, що є центром хімічної промисловості Луганської області – Северодонецьку, у 2017-2018 рр. Нині м. Северодонецьк – обласний центр Луганщини. Містоутворюючим підприємством є ПАТ Северодонецьке об'єднання «Азот», яке працює з 1951 року і є третім за розміром в Україні з виробництва аміаку та одним з найбільших в Європі з виробництва добрив, метанолу, вінілацетату та ряду іншої хімічної продукції. З моменту початку військової операції на Сході України підприємство працює періодично [35]. Обрана територія для дослідження – міський парк, площею 14 Га, розташований на півночі м. Северодонецька (рис. 1).



Рисунок 1 – Територія дослідження на плані м. Северодонецьк

Дослідження проводилися як за відомим методом «конверту» [36], так і за способом дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні з деякими удосконаленнями. Точки дослідження за методом «конверту» наведені на рис. 2. Для цього було обрано 150 квадратів зі сторонами 1 x 1 м, з кожного квадрату взято 5 проб ґрунту, які змішувалися в одну пробу для проведення спектрального аналізу.



Рисунок 2 – Точки відбору проб для спектрального аналізу

На рис. 2 більшими цифрами від 1 до 5 визначені місця відбору рослин для спектрального аналізу наявності важких металів в біомасі.

Точки відбору проб за способом дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні були визначені за допомогою програми «Випадкова точка» [2].

4. Математичний апарат вдосконалення способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні

Велику сильно пересічену територію важко розбити на рівні квадрати зони дослідження. За допомогою програми «Випадкова точка» можна визначити масив полюсних точок, з яких будуть зібрані дані із забруднення та побудована модель. Проте при вирахуванні функцій, за якими будуються напрями руху (відбору проб), виникатимуть помилки наближення, які будуть накопичуватися. Помилки також будуть виникати при отриманні точки, яка лежить не на рівній поверхні у порівнянні з початковою точкою, а деякі отримані полюсні точки можуть бути недосяжними для забору проб через щільну забудову території. У цьому випадку рух за вектором можливий або зі зменшенням кроку або з розкладанням функції за нев'язками.

Нев'язка використовується тоді, коли точне значення функції невідоме або, інакше, як показник відхилення апроксимації від точного рішення. Нев'язка може бути використана при реалізації підходу за методом Дж. Зойтендейка [8], коли, при здійсненні чергового кроку, необхідно отримати рішення на інтервалі, який описується деякою функцією $y = f(x)$. У цьому випадку величина нев'язки $Z_0 = F(x, y_0)$ характеризує близькість початкового наближення y_0 до шуканої функції. Параметр y_0 виступає елементом наближення до умов застосування, і чим більше він наближується до функції $y = f(x)$, тим більше наближується до 0 величина нев'язки. Такі

дії вимагають перетворень з врахуванням мінімізації похибок, які виникатимуть в процесі зазначених дій. Для реалізації такої задачі більш раціональним є використання таблиць ряду широко вживаних функцій та розкладання функцій в ряди за похибками. За основу перетворення функцій в ряди за похибками, наприклад, може бути взятий ряд послідовних ітераційних формул, оптимальних за Траубом [19].

Вказаний підхід дозволяє отримати вірогідне найбільш оптимальне рішення за параметрами, заданими за допомогою функції, та з врахуванням обмежень, у тому числі нелінійних. При описі місцевості, яка задана яружною функцією, це дозволяє у складних випадках здійснювати кроки в різні боки від заданого вектора таким чином, щоб отримати найбільш відповідний результат або результати з мінімальною похибкою у значенні. Наприклад, сам вектор руху на місцевості можна розбити на відрізки, які описати потім з використанням елементарних функцій $(1 + x)^n$, x^a , e^x , $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\arctg x$ через взаємно-обернені функції, у інших випадках застосувати нев'язки при вирішенні функціональних рівнянь.

Припустимо, що якийсь відрізок на векторі руху може бути описаний експонентою $y = e^x$ (рис. 3). При вирішенні функції можна отримати координати нових точок забору проб.

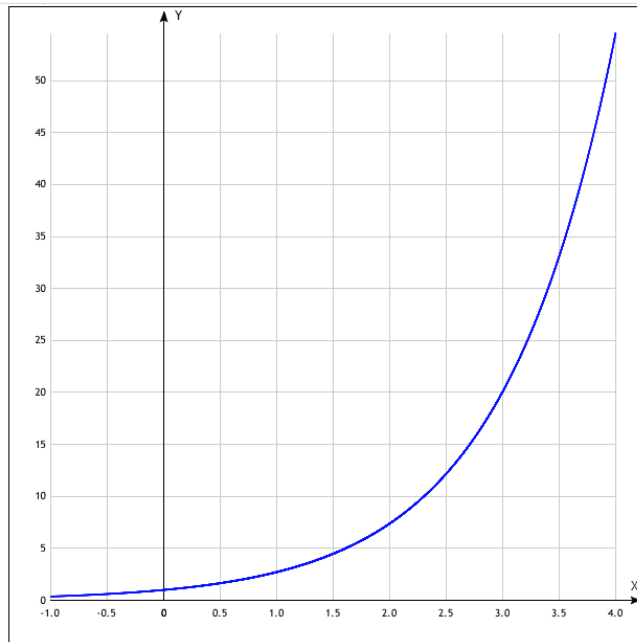


Рисунок 3 – Графік функції $y = e^x$

У цьому випадку функцію $y = e^x$ можна розкласти в ряд нев'язок, використовуючи [27] та багаточлени Чебишова [13], що є узагальненим розкладанням ряду Тейлора [37]. Зробивши відповідні заміни за [27], можна перейти від $z_0 \in [-\beta, \beta]$ до змінної $u = z_0/\beta$, забезпечуючи приналежність змінної до сегменту $[-1,1]$. Для отримання вишукуваного розкладення, буде

проведена заміна у вихідному ряді нев'язок ступеня z_0 на багаточлени Чебишова $T_n(u)$. При цьому враховується, що

$$1 = T_0(u), \quad z_0 = \beta u = \beta T_1(u), \quad z_0^2 = \beta^2 u^2 = \frac{1}{2} \beta^2 (T_0(u) + T_2(u)), \quad z_0^3 = \beta^3 u^3 = \frac{1}{4} \beta^3 (3T_1(u) + T_3(u))$$

і т. п.

Тоді приклад з відрізком, що описується експонентою

$$e^x = y_0 e^{z_0} = y_0 \sum_{k=0}^{\infty} z_0^k / k!,$$

де $z_0 = x - \ln y_0 = x - x_0$, можна записати, залишаючи при розкладанні три члени, наступним чином:

$$\begin{aligned} e^x &\approx y_0 \left(T_0(u) + \beta T_1(u) + \frac{1}{2!} \frac{1}{2} \beta^2 (T_0(u) + T_2(u)) + \frac{1}{3!} \frac{1}{4} \beta^3 (3T_1(u) + T_3(u)) \right) = \\ &= y_0 \left(1 + \beta^2 / 4 T_0(u) + (\beta + \beta^3 / 8) T_1(u) + \beta^2 / 4 T_2(u) + \beta^3 / 8 T_3(u) \right) \end{aligned}$$

Аналогічно вищевикладеному можна отримати розкладання функцій за нев'язками з використанням багаточленів Чебишова другого роду $u_n(x)$.

Подібні розкладання можуть ускладнити процес програмування, проте на початку було зазначено, що використовуються елементарні та базові тригонометричні функції. Тобто, розкладання їх за нев'язками може бути проведене заздалегідь або взяте з існуючих довідників та в табличному варіанті внесене до програми. При виконанні розрахунків за алгоритмом з виконання опису екологічного стану території необхідна функція та її нев'язка вибиратиметься з таблиці бази даних.

5. Результати

Для апробації вдосконалень до способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні з метою подальшого внесення змін до програмного продукту [2], була виконана демо-версія програми з використанням експоненціальної функції при описі кривої довкола озера (рис. 2). За допомогою програми «Випадкова точка» територія парку була розбита на свої зони дослідження (рис. 5), де за векторами та в полюсних точках, а також на кривій, описаній довкола озера, були відібрані проби ґрунту та виконані Інститутом геохімії, мінералогії та рудоутворення імені М.П. Семененка НАН України спектральні дослідження забруднення важкими металами. Усього було відібрано 80 проб ґрунту, на відміну від методу «конверту» у 150 проб.

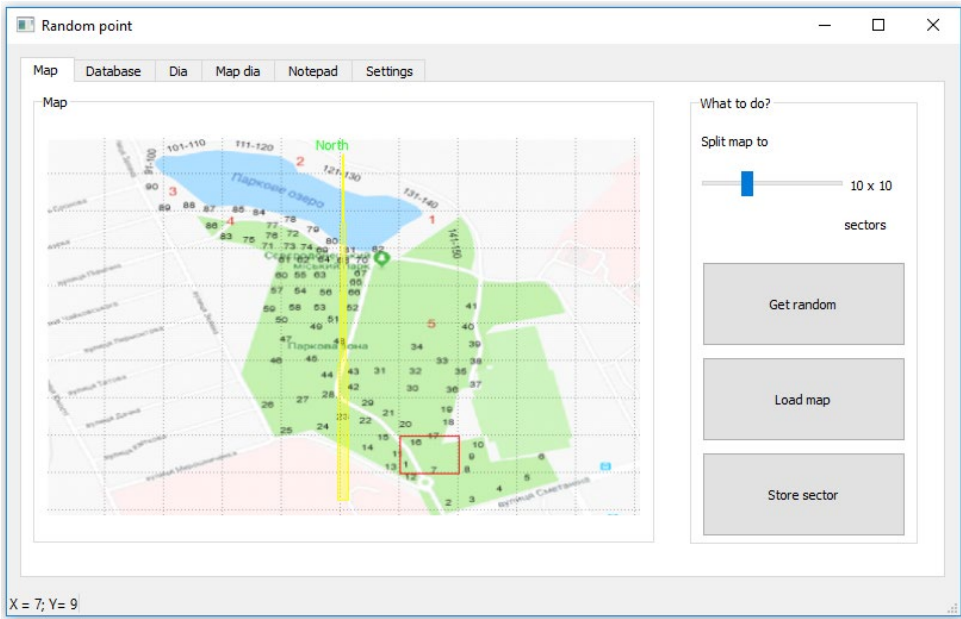


Рисунок 5 – Вибір зон дослідження за допомогою програми «Випадкова точка»

Результати вимірів були внесені до програми «Випадкова точка» з метою побудови карти забруднення важкими металами (рис. 6).

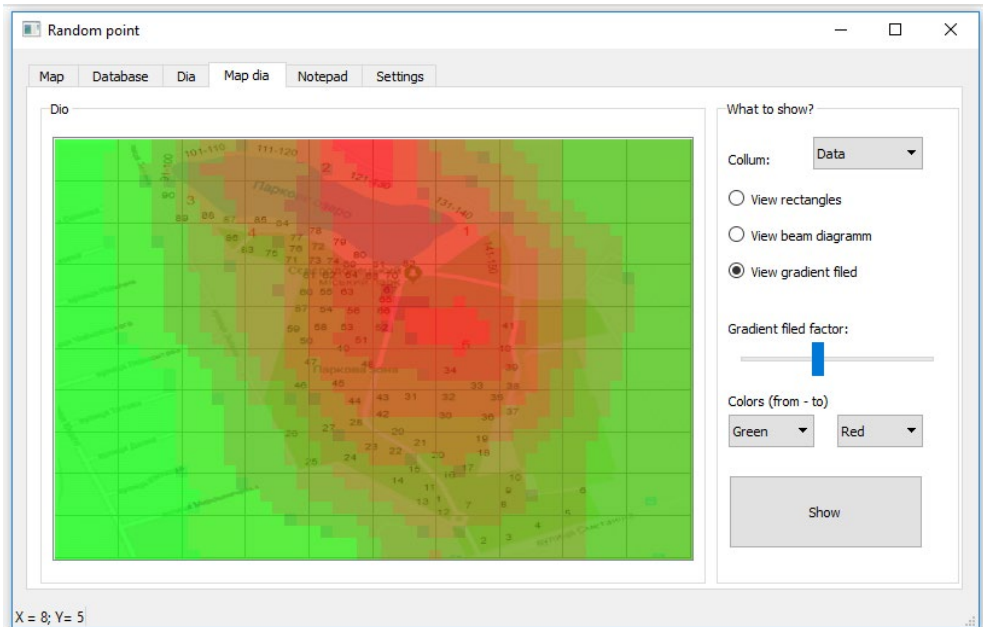


Рисунок 6 – Карта забруднення важкими металами, побудована за допомогою програми «Випадкова точка»

Отримані результати за вдосконаленим способом дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні дозволили створити карту місцевості, яка співпала з картою, побудованою на основі зібраних даних за методом «конверту». В цілому слід зазначити, що стан забруднення важкими металами території парку знаходиться в межах норми.

Висновки

У даній роботі наведені попередні результати з удосконалення способу дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні.

Можна навести наступні висновки:

1) при розрахунку руху за векторами на сильно пересіченій території та здійсненні великої кількості ітерацій для досягнення шуканого результату, виникають помилки наближення, які можуть накопичуватися та призводити до неточного результату, особливо при прогнозуванні розповсюдження забруднення. У цьому випадку рух за вектором можливий або зі зменшенням кроку або з розкладанням функції за нев'язками;

2) в роботі запропоновано криву руху по пересіченій місцевості, за вектором напряму розбиту на інтервали. Ці інтервали описуються з використанням елементарних та базових тригонометричних функцій. У випадку, коли при здійсненні чергового кроку необхідно отримати рішення на інтервалі, який описується деякою функцією, використовується її нев'язка. Найкращим результатом є, коли величина нев'язки наближується до нуля;

3) представлена практична апробація у вигляді демо-версії програми з внесенням удосконалення до алгоритму з урахуванням мінімізації похибок, які виникатимуть в процесі зазначених дій. Визначено, що для виконання такої задачі більш раціональним є використання таблиць ряду широко живаних функцій та розкладання функцій в ряди за похибками.

Отриманий результат дозволив зменшити кількість точок відбору проб зі 150 до 80 при збереженні точності опису території на площі 14 Га.

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Патент України на корисну модель 113110. Спосіб дослідження екологічного стану території при техногенному забрудненні / Ольга Олександрівна Кряжич, Олександр Васильович Коваленко // Зарєстровано в державному реєстрі патентів України на корисні моделі 10.01.2017.
2. Свідоцтво про реєстрацію авторського права на твір № 67750 «Комп'ютерна програма з реалізації способу опису забрудненої території «Випадкова точка» («Випадкова точка (Random point)»). Автори: Кряжич Ольга Олександрівна, Коваленко Олександр Васильович. Дата заявки: 12.07.2016. Дата реєстрації: 12.09.2016.
3. Кряжич О.О., Коваленко О.В., Іванченко В.В. Спосіб опису забрудненої території: програмна реалізація // Математичне моделювання в економіці. – 2016. – №2. – С. 22–35.
4. Довгий О.С., Коржнев М.М., Трофимчук О.М., Чумаченко С.М., Яковлев Є.О. Екологічні ризики, збитки та раціональні межі використання надр в Україні. – К.: Ніка-Центр, 2013. – 314 с.

5. Трофимчук О.М., Кряжич О.О. Кусково-поліноміальна апроксимація яружних функцій // Технічні науки та технології : науковий журнал / Черніг. нац. технол. ун-т. – Чернігів : Черніг. нац. технол. ун-т, 2015. – № 1 (1). – С. 67-75.
6. Jan A. Snyman (2005). Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms. Springer Publishing. ISBN 0-387-24348-8.
7. Zangwill Willard I. Nonlinear Programming a Unified Approach. Englewood Cliffs, N.J. 1969. 312 p.
8. Zoutendijk G. Methods of feasible directions; a study in linear and nonlinear programming. Amsterdam, New York, Elsevier Pub. Co. – 1960. – 178 p.
9. Програмний виріб «Прогнозування та оцінка наслідків катастроф з хімічною речовиною на об'єктах ЗС України». Керівництво з адміністрування. ИКПЛ.466452.009 32. – Київ: ІПММС НАНУ, 2008 – 37 с.
10. Research Methods in Geography: A Critical Introduction / B. Gomez, J.P. Jones (Eds.). – Blackwell Publishing, 2010. – 459 p.
11. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 1st edition, PWS 1996.
12. Історія математики / Бевз В. Г. – Харків: Основа, 2006. – 171 с. – (Бібліотека журналу «Математика в школах України»: серія заснована в 2003 р.; вип. 2(38)). – Бібліогр.: с. 166–169. – ISBN 9663332867.
13. Чебышев П.Л. Полное собрание сочинений П.Л. Чебышева : [В 5 томах] / П.Л. Чебышев ; АН СССР. – М. ; Л. : Изд-во АН СССР, 1944–1951. - Т. 2. Математический анализ. – 1947. – 520 с., 1 л. портр.
14. Schröder, E., 1890–1905. Vorlesungen über die Algebra der Logik, 3 vols. Leipzig: B.G. Teubner. Reprints: 1966, Chelsea; 2000, Thoemmes Press.
15. Храмов Ю. А. Ламберт Иоганн Генрих (Lambert Johann Heinrich) // Физики: Биографический справочник / Под ред. А. И. Ахиезера. – Изд. 2-е, испр. и дополн. – М.: Наука, 1983. – С. 152. – 400 с.
16. Доморяд А.П. Математические игры и развлечения. – М.: ГИФМЛ, 1961. – 267 с.
17. Hildebrand F. Methods of Applied Mathematics. Prentice Hall, 1965. – 373 p.
18. Микеладзе Ш.Е. Численные методы математического анализа. М. «Гостехиздат», – 1953, – 526 с.
19. Traub J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, 1964. Reissued Chelsea Publishing Company, 1982; Russian translation MIR, 1985; reissued American Mathematical Society, 1998. - 264 p.
20. Greenberg, Michael (1998), Advanced Engineering Mathematics (2nd ed.), Prentice Hall, ISBN 0-13-321431-1.
21. Atkinson, Kendell A. (1988), «Chapter 3.», An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley and Sons, ISBN 0-471-50023-2.
22. George A. Baker, Jr.; Peter Graves-Morris. Padé approximants. Cambridge University Press. Encyclopedia of Mathematics and its Applications Series #59. 2010. 764 p. ISBN-13: 9780521135092.
23. Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas (1985). "2.2 Fixed-Point Iteration". Numerical Analysis (3rd ed.). PWS Publishers. ISBN 0-87150-857-5.
24. Теслер Г.С. Обобщенные адаптивные аппроксимации функций. / Г.С. Теслер // Математические машины и системы – 1998 – №2. – С. 3–8.
25. Теслер Г.С. Концепция построения гарантоспособных вычислительных систем / Г.С. Теслер // Математичні машини і системи. – 2006. – №1. – С. 134-145.
26. Чебышев П. Л. Вычисление корней уравнений // Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. – Москва – Ленинград, 1951. – Т. 5. – С. 7 – 25.
27. Теслер Г.С. Новая кибернетика. – К.: Логос, 2004. – 404 с.
28. Александров П.С., Маркушевич А.И., Хинчин А.Я. (ред.) Энциклопедия элементарной математики. Книга 2. Алгебра. / Доморяд А.П. Численные и графические методы решения уравнений, с. 313-417. – М.-Л.: ГИТТЛ. – 1951. – 426 с.

29. Жоголев Е. А. Технология программирования. – М.: Научный мир. – 2004. – 216 с.
30. Плєскач В. Л. Інформаційні системи і технології на підприємствах : підручник / В. Л. Плєскач, Т. Г. Затонацька. – К. : Знання, 2011. – 718 с.
31. Філософський енциклопедичний словник / В. І. Шинкарук (голова редколегії) та ін. ; Л. В. Озадовська, Н. П. Поліщук (наукові редактори) ; І. О. Покаржевська (художнє оформлення). – Київ : Абрис, 2002. – 742 с. – ISBN 966-531-128-X.
32. Кондаков Н. И. Введение в логику. – Москва: «Наука», 1967. – 467 с.
33. Коваленко О.В. Концептуальні основи створення бази даних наукового експерименту та спостереження / О.В. Коваленко // Математичні машини і системи. – 2016. – №2. – С. 91-101.
34. Словарь по кибернетике / Под редакцией академика В. С. Михалевича. – 2-е. – Киев: Главная редакция Украинской Советской Энциклопедии имени М. П. Бажана, 1989. – 751 с. – ISBN 5-88500-008-5.
35. Сєвєродонєцький «Азот» випустив перші 1,5 тис. тонн карбаміду після тривалої перерви. Електронний ресурс – Режим доступу: <http://uprom.info/news/himachal/syevyerononetskiy-azot-vipustiv-pershi-1-5-tis-tonn-karbamidu-pislya-trivaloyi-perervi/>
36. ДСТУ ISO 10381-2:2004 Якість ґрунту. Відбирання проб. Частина 2. Настанови з методів відбирання проб.
37. Филер З. Е. Об одном обобщении формулы Тейлора и её применении к решению дифференциальных уравнений // УМЖ. – 1981. – Т. 33, – №1. – С. 123-128.

REFERENCES

1. Patent of Ukraine for utility model 113110. The method of investigation of ecological condition of the territory in the technogenic contaminated / Olha Oleksandrivna Kryazhych, Oleksandr Vasylovych Kovalenko // Registered in the State Register of Patents of Ukraine for utility models 10.01.2017.
2. Certificate of Registration of Copyright in the works № 67750 «Computer program for the implementation of the method of description of the contaminated area «Random point» («Випадкова точка»). Authors: Kryazhych Olha Oleksandrivna, Kovalenko Oleksandr Vasylovych. Application date: 12.07.2016. Registration date: 12.09.2016.
3. Kryazhych O.O., Kovalenko O.V., Ivanchenko V.V. A way to describe contaminated area: software implementation // Mathematical modeling in Economy. – 2016. – №2. – P. 22–35.
4. Dovhyi O.S., Korzhniev M.M., Trofymchuk O.M., Chumachenko S.M., Yakovlev Ye.O. Environmental risks, losses and rational limits of subsoil use in Ukraine. – К.: Nika-Tsentr, 2013. – 314 p.
5. Trofymchuk O.M., Kryazhych O.O. Piecewise-polynomial approximation of the ravine functions // Technical Sciences and technologies: scientific journal / Chernih. nats. tekhnol. un-t. – Chernihiv : Chernih. nats. tekhnol. un-t, 2015. – № 1 (1). – P. 67-75.
6. Jan A. Snyman (2005). Practical Mathematical Optimization: An Introduction to Basic Optimization Theory and Classical and New Gradient-Based Algorithms. Springer Publishing. ISBN 0-387-24348-8.
7. Zangwill Willard I. Nonlinear Programming a Unified Approach. Englewood Cliffs, N.J. 1969. 312 p.
8. Zoutendijk G. Methods of feasible directions; a study in linear and nonlinear programming. Amsterdam, New York, Elsevier Pub. Co. – 1960. – 178 p.
9. Software product "Forecasting and assessment of the consequences of accidents with chemical substances at the facilities of the armed forces of Ukraine". Administration guide. IKPL.466452.009 32. – Kyiv: IMMSP NASU, 2008 – 37 p.
10. Research Methods in Geography: A Critical Introduction / B. Gomez, J.P. Jones (Eds.). – Blackwell Publishing, 2010. – 459 p.

11. Saad Y. Iterative Methods for Sparse Linear Systems, 1st edition, PWS 1996.
12. History of mathematics / Bevz V. H. – Kharkiv: Osnova, 2006. – 171 p. – (Library of the journal "Mathematics in schools of Ukraine": the series is based in 2003 ; Vol. 2(38)). – Ref.: p. 166–169. – ISBN 9663332867.
13. Chebyshev P.L. Complete Chebyshev's works : [In 5 volumes] / P.L. Chebyshev ; USSR ACADEMY OF SCIENCES. – M. ; L. : Publ. USSR AS, 1944–1951. - V. 2. Mathematical analysis. – 1947. – 520 p.
14. Schröder, E., 1890–1905. Vorlesungen über die Algebra der Logik, 3 vols. Leipzig: B.G. Teubner. Reprints: 1966, Chelsea; 2000, Thoemmes Press.
15. Khramov Yu. A. Lambert Johann Heinrich // Physics: Biographical dictionary / edit. A. Y. Akhyezer. – M.: Nauka, 1983. – 400 p.
16. Domoriad A.P. Math games and fun. – M.: GITTL, 1961. – 267 p.
17. Hildebrand F. Methods of Applied Mathematics. Prentice Hall, 1965. – 373 p.
18. Mykeladze Sh.E. Numerical methods of mathematical analysis. M. «Hostekhizdat», – 1953, – 526 p.
19. Traub J. F. Iterative Methods for the Solution of Equations, Prentice Hall, 1964. Reissued Chelsea Publishing Company, 1982; Russian translation MIR, 1985; reissued American Mathematical Society, 1998. - 264 p.
20. Greenberg, Michael (1998), Advanced Engineering Mathematics (2nd ed.), Prentice Hall, ISBN 0-13-321431-1.
21. Atkinson, Kendall A. (1988), «Chapter 3.», An Introduction to Numerical Analysis (2nd ed.), John Wiley and Sons, ISBN 0-471-50023-2.
22. George A. Baker, Jr.; Peter Graves-Morris. Padé approximants. Cambridge University Press. Encyclopedia of Mathematics and its Applications Series #59. 2010. 764 p. ISBN-13: 9780521135092.
23. Burden, Richard L.; Faires, J. Douglas (1985). "2.2 Fixed-Point Iteration". Numerical Analysis (3rd ed.). PWS Publishers. ISBN 0-87150-857-5.
24. Tesler H.S. Generalized adaptive approximations of functions // Mathematical machines and systems.– 1998 – №2. – P. 3–8.
25. Tesler H.S. The concept of construction of dependable computing systems // Mathematical machines and systems. – 2006. – №1. – P. 134-145.
26. Chebyshev P.L. Complete Chebyshev's works : [In 5 volumes] / P.L. Chebyshev ; USSR ACADEMY OF SCIENCES. – M. ; L. : Publ. USSR AS, 1944–1951. - V.5. Calculation of roots of equations. 1951. P. 7 – 25.
27. Tesler H.S. New Cybernetics. – K.: Lohos, 2004. – 404 p.
28. Aleksandrov P.S., Markushevych A.I., Khynchyn A.Ya. Encyclopedia of elementary mathematics. Book 2. Algebra. / Domoriad A.P. Numerical and graphical methods for solving equations. p. 313-417. – M.-L.: GITTL. – 1951. – 426 p.
29. Zhoholev E. A. Programming technology. – M.: Nauchnyi mir. – 2004. – 216 p.
30. Pleskach V. L. Information systems and technologies in enterprises: textbook / V. L. Pleskach, T. H. Zatonatska. – K. : Znannia, 2011. – 718 p.
31. Philosophical encyclopedic dictionary / V. I. Shynkaruk (head of editorial board) et al.; L. V. Ozadovska, N. P. Polishchuk (scientific editors). – K. : Abrys, 2002. – 742 p. – ISBN 966-531-128-X.
32. Kondakov N. I. Introduction to logic. – M.: Nauka, 1967. – 467 p.
33. Kovalenko O.V. Conceptual bases of creation of a database of scientific experiment and observation // Mathematical machines and systems. – 2016. – №2. – P. 91-101.
34. Dictionary of Cybernetics / Edited by academician V. S. Mikhalevich. – II. – K.: The main edition of Ukrainian Soviet Encyclopedia named after M. P. Bazhan, 1989. – 751 p. – ISBN 5-88500-008-5.
35. Severodonetsk "Azot" produced the first 1.5 thousand tons of urea after a long break. Electronic resource: <http://uprom.info/news/himachal/syevyerodonetskiy-azot-vipustiv-pershi-1-5-tis-tonn-karbamidu-pislya-trivaloyi-perervi/>

36. DSTU ISO 10381-2:2004. Quality of soil. Sampling. Part 2. Instruction of the methods of obtaining samples.
37. Filer Z. E. On a generalization of the Taylor's formula and its application to the solution of differential equations // UMJ. – 1981. – Vol. 33, – №1. – P. 123-128.

Стаття надійшла до редакції 28.02.2019.