УДК 539.3

Зеленський Анатолій Григорович
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри будівельної механіки та опору матеріалів
Придніпровська державна академія будівництва та архітектури
Приварніков Аркадій Костянтинович
доктор фізико-математичних наук, професор,
завідувач кафедри алгебри та геометрії
Запорізький національний університет
Зеленский Анатолий Григорьевич
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры строительной механики и сопротивления материалов
Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры
Приварников Аркадий Константинович
доктор физико-математических наук, профессор,
заведующий кафедрой алгебры и геометрии
Запорожский национальный университет
Zelensky Anatoly
candidate of physico-mathematical Sciences,
associate Professor of structural mechanics and strength of materials
Prydneprovsk state academy of civil engineering and architecture
Privarnikov Arkadiy
doctor of physico-mathematical Sciences, Professor,
head of chair of algebra and geometry
Zaporozhskiy national univercity

ПРО МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ НЕОДНОРІДНИХ РІВНЯНЬ ІЗ ЧАСТИННИМИ ПОХІДНИМИ В МАТЕМАТИЧНІЙ ТЕОРІЇ ПЛИТ

О МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕОДНОРОДНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ПЛИТ

USING THE METHOD OF SOLVING NON-HOMOGENEOUS PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN MATHEMATICAL THEORY OF PLATES

У статті запропоновано метод, який дає можливість звести неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними парного порядку математичної теорії плит до розв'язування неоднорідних рівнянь другого порядку. Розглянуті рівняння шостого і четвертого порядків. Для знаходження частинних розв'язків отриманих рівнянь другого порядку використовується метод інтегрального перетворення Ханкеля.

Ключові слова: *метод зниження порядку, неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними, математична теорія, плита.*

В статье предложен метод, который позволяет свести неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных четного порядка математической теории плит к решению неоднородных уравнений второго порядка. Рассмотрены уравнения шестого и четвертого порядков. Для нахождения частных решений полученных уравнений второго порядка применяется метод интегрального преобразования Ханкеля.

Ключевые слова: *метод понижения порядка, неоднородное дифференциальное уравнение в частных производных, математическая теория, плита.*

As well as analyzing equations of fourth and sixth order, the article suggests a method allowing non-homogeneous partial differential equations of even order in mathematical theory of plates to be reduced to non-homogeneous equations of second order which could be solved using the Hankel integral transform.

Keywords: *reduction of order, non-homogeneous partial differential equation, mathematical theory, plate.*

Вступ. Розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними високого порядку пов'язано з достатніми математичними труднощами. До таких рівнянь зводяться перш за все задачі по визначенню напружено-деформованого стану в некласичній теорії пластин та оболонок [1–3, 7, 8–11, 13, 15], які ураховують всі компоненти напружено-деформованого стану. Складність розв'язування вказаних рівнянь викликана, зокрема, знаходженням їх частинних розв'язків.

У даній роботі метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними, який було запропоновано у [4–6], розвивається на інші типи лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь парного порядку з частинними похідними,

1. Постановка проблеми. Розглянемо лінійне неоднорідне диференціальне рівняння з частинними похідними $2n$-го порядку $(n=2,3,4,...)$ наступного вигляду:

$$(\nabla^{2n}+A_1\nabla^{2(n-1)}A_2\nabla^{2(n-2)}+\cdot...\cdot+A_n)\Phi(x,y)=f(x,y)\ ,\qquad(1)$$

де $A_i\ (i=1,2,...,n)$ – відомі числа, які можуть бути також комплексними;

∇^2 — оператор Лапласа;

$f(x,y)$ — відома функція двох змінних,

$\Phi(x,y)$ — шукана функція двох змінних.

Застосовуючи основну теорему алгебри, ліву частину рівняння (1) можна розкласти на множники вигляду (∇^2-k) і тоді (1) прийме наступний вигляд:

$$(\nabla^2-k_1)(\nabla^2-k_2)\cdot...\cdot(\nabla^2-k_i)\cdot...\cdot(\nabla^2-k_n)\Phi(x,y)==f(x,y)\ ,\qquad(2)$$

де $k_i\ (i=1,2,...,n)$ – корені відповідного характеристичного рівняння, в загальному вигляді комплексні.

Такий клас рівнянь зустрічається, зокрема, при визначенні напружено-деформованого стану в теорії не тонких пластин [3, 11], яка основана на застосуванні взаємозв'язаних рівнянь, здобутих методом розкладання компонент напружено-деформованого стану у ряди по товщинній координаті за допомогою поліномів Лежандра з використанням варіаційного принципу Рейснера.

Розв'язування неоднорідного диференціального рівняння (2) методом зниження порядку зведено до n неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку. Так у [5] до неоднорідних рівнянь 2-го порядку зведено диференціальні рівняння 4-го, 6-го, 8-го і 12-го порядків вигляду (2), у яких k_i різні числа; у [4] — до рівнянь 2-го порядку зведено рівняння 8-го порядку, в якому $k_1=k_2=0;\ k_3\neq k_4;\ k_3\neq 0;\ k_4\neq 0$, і наведено застосування методу в граничній задачі некласичної теорії пластин [3]. У [6] — розглянуто застосування методу зниження порядку до розв'язування декількох граничних задач теорії пластин.

Слід зазначити, що деякі рівняння вказаних вище класів зустрічаються також в теорії оболонок.

Надалі розглянемо деякі інші неоднорідні диференціальні рівняння з частинними похідними, які мають місце в математичній теорії пластин і класичній теорії оболонок і які зведемо до рівнянь 2-го порядку.

2. Диференціальне рівняння 6-го порядку вигляду

$$\nabla^2(\nabla^2-k_1)(\nabla^2-k_2)\Phi(x,y)=f(x,y)\ ,\qquad(3)$$

де $k_i\ (i=1,2)$ – відомі числа, можуть бути комплексними;

$f(x,y)$ — відома функція двох змінних;

$\Phi(x,y)$ — шукана функція двох змінних.

Рівняння такого типу зустрічається в теорії нетонких пластин [3].

Позначимо надалі для зручності

$$(\nabla^2-k_i)=(\ )_i\ ,\qquad(4)$$

а функції $\Phi(x,y)$ та $f(x,y)$ — через Φ та f відповідно.

Рівняння (3) тоді запишеться так:

$$\nabla^2(\ )_1(\ )_2\Phi=f\ .$$

Зобразимо частинний розв'язок $\Phi(x,y)$ рівняння (3) та функцію $f(x,y)$ у вигляді

$$\Phi(x,y)=\Phi_1(x,y)+\Phi_2(x,y)\ ;\qquad(5)$$

$$f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)\ ,\qquad(6)$$

де функції $\Phi_1(x,y),\Phi_2(x,y)$ — частинні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь:

$$\nabla^2\Phi_1=f_1\ ;\qquad(7)$$

$$(\ )_1(\ )_2\Phi_2=f_2\ ,\qquad(8)$$

у яких функції $f_1(x,y),\ f_2(x,y)$ підлягають визначенню.

Знайдемо праві частини рівнянь (7) і (8).

Підставимо (5) у (3). Дістанемо

$$\nabla^2((\ )_1(\ )_2)\Phi_1 + \nabla^2((\ )_1(\ )_2)\Phi_2 = f .$$

Ураховуючи (7), (8) і те, що $\nabla^2((\ )_1(\ )_2) = ((\ )_1(\ )_2)\nabla^2$, останнє рівняння перетвориться до такого:

$$(\ )_1(\ )_2 f_1 + \nabla^2 f_2 = f ,$$

а приймаючи до уваги (6), дістанемо наступне рівняння для визначення функції $f_1(x,y)$:

$$((\ )_1(\ )_2 - \nabla^2) f_1 = (1-\nabla^2) f . \qquad (9)$$

Рівнянні (9) з урахуванням (4) набуде вигляду

$$(\nabla^4 - (1+k_1+k_2)\nabla^2 + k_1 k_2) f_1 = (1-\nabla^2) f . \qquad (10)$$

Розкладаючи ліву частину рівняння (10) на множники, дістанемо таке неоднорідне диференціальне рівняння 4-го порядку з частинними похідними відносно функції $f_1(x,y)$:

$$(\nabla^2 - k_3)(\nabla^2 - k_4) f_1(x,y) = \phi(x,y) , \qquad (11)$$

де

$$\phi(x,y) = (1-\nabla^2) f(x,y). \qquad (12)$$

В якості функції $f_1(x,y)$ можна взяти частинний розв'язок рівняння (11).

Надалі повторюємо аналогічний процес. Зображуємо частинний розв'язок $f_1(x,y)$ рівняння (11) та відому функцію $\phi(x,y)$ у вигляді

$$f_1(x,y) = f_{11}(x,y) + f_{12}(x,y) ; \qquad (13)$$

$$\phi(x,y) = \phi_1(x,y) + \phi_2(x,y) , \qquad (14)$$

де функції $f_{11}(x,y), f_{12}(x,y)$ — частинні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку:

$$\begin{aligned} &(\nabla^2 - k_3) f_{11}(x,y) = \phi_1(x,y); \\ &(\nabla^2 - k_4) f_{12}(x,y) = \phi_2(x,y) \end{aligned} , \qquad (15)$$

а функції $\phi_1(x,y)$ і $\phi_2(x,y)$ потрібно ще визначити.

Ураховуючи (13)–(15), рівняння (11) перетвориться до такого:

$$(k_3 - k_4)\phi_1(x,y) = (1 + k_3 - \nabla^2)\phi(x,y) .$$

Звідси, приймаючи до уваги (12), дістанемо

$$\begin{aligned} \phi_1(x,y) &= \frac{(1+k_3-\nabla^2)}{(k_3-k_4)}\phi(x,y) = \\ &= \frac{(1+k_3-\nabla^2)(1-\nabla^2)}{(k_3-k_4)} f(x,y) \end{aligned} \qquad (16)$$

А із залежностей (12), (14) і (16) матимемо $\phi_2(x,y)$:

$$\begin{aligned} \phi_2(x,y) &= \frac{(\nabla^2-1-k_4)}{(k_3-k_4)}\phi(x,y) = \\ &= \frac{(\nabla^2-1-k_4)(1-\nabla^2)}{(k_3-k_4)} f(x,y) \end{aligned} \qquad (17)$$

Отже, для визначення правих частин рівнянь (15), тобто для визначення функцій $\phi_1(x,y)$ і $\phi_2(x,y)$ маємо залежності (16) і (17).

Знайшовши функції $f_{11}(x,y), f_{12}(x,y)$ як частинні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку (15), функція $f_1(x,y)$ знайдеться із формули (13), а функція $f_2(x,y)$ — із формули (6), оскільки функція $f(x,y)$ відома. Знаючи функцію $f_1(x,y)$, із неоднорідного диференціального рівняння 2-го порядку (7) знаходиться частинний розв'язок цього рівняння $\Phi_1(x,y)$.

Надалі розглянемо знаходження частинного развязку $\Phi_2(x,y)$ рівняння (8).

Покладемо

$$\Phi_2(x,y) = \Phi_{21}(x,y) + \Phi_{22}(x,y) , \qquad (18)$$

$$f_2(x,y) = f_{21}(x,y) + f_{22}(x,y) , \qquad (19)$$

де функції $\Phi_{21}(x,y), \Phi_{22}(x,y)$ — частинні розв'язки лінійних неоднорідних диференціальних рівнянь 2-го порядку:

$$(\ )_1 \Phi_{21} = f_{21} ; \qquad (20)$$

$$(\ )_2 \Phi_{22} = f_{22} , \qquad (21)$$

а функції $f_{21}(x,y), f_{22}(x,y)$ підлягають визначенню.

Замічаємо, що рівняння (8) з точністю до позначень аналогічне рівнянню (11), а рівняння (20) і (21) аналогічні рівнянням (15). Тоді функції $f_{21}(x,y)$ і $f_{22}(x,y)$ з урахуванням (19) визначатимуться так:

$$f_{21}(x,y) = \frac{(1+k_1-\nabla^2)}{(k_1-k_2)} f_2(x,y) ;$$

$$f_{22}(x,y) = \frac{(\nabla^2-1-k_2)}{(k_1-k_2)} f_2(x,y). \qquad (22)$$

Визначивши із (22) праві частини рівнянь 2-го порядку (20) і (21), знаходяться частинні розв'язки $\Phi_{21}(x,y)$ і $\Phi_{22}(x,y)$ цих рівнянь. Надалі за формулою (18) визначається функція $\Phi_2(x,y)$, яка є частинним розв'язком неоднорідного рівняння 4-го порядку (8).

Таким чином, знайшовши $\Phi_1(x,y)$ і $\Phi_2(x,y)$, визначається функція $\Phi(x,y)$ як сума цих функцій згідно з (5), тобто визначається частинний розв'язок початкового неоднорідного рівняння 6-го порядку з частинними похідними (3).

Загальний розв'язок початкового рівняння (3) знаходиться як сума загальних розв'язків $\Phi_{10}(x,y)$, $\Phi_{20}(x,y)$, $\Phi_{30}(x,y)$ однорідних рівнянь

$$\nabla^2\Phi_{10}(x,y)=0\ ;\ (\nabla^2-k_1)\Phi_{20}(x,y)=0\ ;$$

$$(\nabla^2-k_2)\Phi_{30}(x,y)=0$$

і частинного розв'язку $\Phi\,(x,y)$ неоднорідного рівняння (3).

3. Диференціальне рівняння 4-го порядку вигляду

$$\nabla^2(\nabla^2-k_1)\Phi(x,y)=f(x,y)\,, \qquad (23)$$

де k_1 — відоме число, може бути комплексним;

$f(x,y)$ — відома функція двох змінних;

$\Phi(x,y)$ — шукана функція двох змінних.

Рівняння такого типу зустрічається після зниженні порядку в математичній теорії плит, а також як основне рівняння в класичній теорії пологих оболонок, зокрема в [14].

На основі викладеної вище методики рівняння (23) розділяється на два неоднорідних диференціальних рівняння 2-го порядку відносно шуканих функцій $\Phi_1(x,y)$ і $\Phi_2(x,y)$:

$$\nabla^2\Phi_1=f_1\,,\ (\nabla^2-k_1)\Phi_2=f_2\,, \qquad (24)$$

де

$$f_1(x,y)=\frac{(\nabla^2-1)}{k_1}f(x,y),\ \ f_2(x,y)=\frac{(1+k_1-\nabla^2)}{k_1}f(x,y).$$

Загальний розв'язок рівняння 4-го порядку (23) визначається як сума загальних розв'язків рівнянь 2-го порядку (24).

4. Використання інтегрального перетворення Ханкеля.

Розглянемо застосування інтегрального перетворення Ханкеля для знаходження частинного розв'язку неоднорідного диференціального рівняння 4-го вигляду (23), розщепивши його попередньо на два диференціальних рівняння 2-го порядку (24). Для прикладу візьмемо рівняння згину пологої сферичної оболонки від дії зовнішнього навантаження, яке вважатимемо прикладеним нормально до оболонки по колу радіуса r_0 [14]:

$$\nabla^2(\nabla^2+ik^2)\sigma(r)=f(r)$$

$$(\ f(r)=q_0\delta(r-r_0)\,/\,D\ ), \qquad (25)$$

де k^2, D — додатні дійсні сталі, які залежать від фізичних і геометричних характеристик оболонки;

$q_0=const$, $i=\sqrt{-1}$, $\sigma(r)$ — шукана комплексна функція змінної r, $\nabla^2=\dfrac{d^2}{dr^2}+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dr}$;

$\delta(r-r_0)$ — дельта-функція Дірака: $\delta(r-r_0)=0$, якщо $r\neq r_0$; $\delta(r-r_0)=\infty$, якщо $r=r_0$.

Частинний розв'язок $\sigma(r)$ рівняння (25) згідно з (23) і (24) зобразиться у вигляді суми частинних розв'язків $\sigma_1(r)$ і $\sigma_2(r)$ неоднорідних рівнянь

$$\nabla^2\sigma_1=f_1\,,\ (\nabla^2+ik^2)\sigma_2=f_2\,, \qquad (26)$$

де

$$f_1(r)=\frac{i(\nabla^2-1)}{k^2D}q_0\delta(r-r_0),$$

$$f_2(r)=\frac{k^2+i(1-\nabla^2)}{k^2D}q_0\delta(r-r_0)$$

Знайдемо частинний розв'язок першого рівняння (26) методом інтегрального перетворення Ханкеля. Помножимо обидві частини рівняння на $rJ_0(pr)$, де $J_0(pr)$ — функція Бесселя першого роду нульового порядку, і проінтегруємо по r в межах від 0 до ∞. Послідовно отримуємо, приймаючи до уваги [12]:

$$\int_0^\infty rJ_0(pr)\nabla^2\sigma_1(r)dr=\frac{iq_0}{k^2D}\int_0^\infty rJ_0(pr)(\nabla^2-1)\delta(r-r_0)dr\ ;$$

$$-p^2\bar{\sigma}_1(p)==\frac{iq_0}{k^2D}(-p^2r_0J_0(pr_0)-r_0J_0(pr_0))\,,$$

де $\bar{\sigma}_1(p)$ — зображення функції $\sigma_1(r)$.

Із останнього рівняння маємо:

$$\bar{\sigma}_1(p)==\frac{iq_0r_0}{k^2D}(1+\frac{1}{p^2})J_0(pr_0)\,.$$

Повертаємось до оригінала $\sigma_1(r)$ за формулою оберненого переходу. Дістанемо

$$\sigma_1(r)=\int_0^\infty pJ_0(pr)\bar{\sigma}_1(p)dp=$$
$$=\frac{iq_0r_0}{k^2D}\int_0^\infty(p+\frac{1}{p})J_0(pr)J_0(pr_0)dp \qquad (27)$$

Визначимо тепер частинний розв'язок другого рівняння (26). Виконуючи аналогічні перетворення, дістанемо:

$$\int_0^\infty rJ_0(pr)(\nabla^2+ik^2)\sigma_2(r)dr=$$

$$=\frac{q_0}{k^2D}\int_0^\infty rJ_0(pr)(-i\nabla^2+(k^2+i))\delta(r-r_0)dr$$

$$-p^2\bar{\sigma}_2(p)+ik^2\bar{\sigma}_2(p)=\frac{q_0r_0}{k^2D}(ip^2+(k^2+i))J_0(pr_0)\,,$$

де $\bar{\sigma}_2(p)$ — зображення функції $\sigma_2(r)$.

Із останньої залежності отримуємо:

$$\bar{\sigma}_2(p) = -\frac{q_0 r_0}{k^2 D(p^2 - ik^2)}(ip^2 + k^2 + i)J_0(pr_0).$$

Повертаючись до оригінала, дістанемо:

$$\sigma_2(r) = \int_0^\infty pJ_0(pr)\bar{\sigma}_2(p)dp =$$

$$= -\frac{q_0 r_0}{k^2 D}\int_0^\infty \left(\frac{ip^3}{p^2 - ik^2} + \frac{p(k^2 + i)}{p^2 - ik^2}\right)J_0(pr)J_0(pr_0)dp$$

або ж

$$\sigma_2(r) = -\frac{q_0 r_0}{k^2 D}\int_0^\infty \left(i\left(p + \frac{ik^2 p}{p^2 - ik^2}\right) + \frac{p(k^2 + i)}{p^2 - ik^2}\right)J_0(pr)J_0(pr_0)dp. \quad (28)$$

Отже, частинний розв'язок $\sigma(r)$ неоднорідного рівняння (25) з урахуванням (27) і (28) буде

$$\sigma(r) = \sigma_1(r) + \sigma_2(r) =$$

$$= \frac{iq_0 r_0}{k^2 D}\left(\int_0^\infty \frac{J_0(pr)J_0(pr_0)}{p}dp - \int_0^\infty \frac{pJ_0(pr)J_0(pr_0)}{p^2 - ik^2}dp\right). \quad (29)$$

Обчислюючи інтеграли у правій частині (29), дістанемо

$$\sigma(r) = \begin{cases} \dfrac{\pi q_0 r_0}{2k^2 D} J_0(k\sqrt{i}\,r)H_0^{(1)}(k\sqrt{i}\,r_0) - \dfrac{q_0 r_0 i \ln r_0}{k^2 D}, & (r \langle r_0); \\ \dfrac{\pi q_0 r_0}{2k^2 D} J_0(k\sqrt{i}\,r_0)H_0^{(1)}(k\sqrt{i}\,r) - \dfrac{q_0 r_0 i \ln r}{k^2 D}, & (r \rangle r_0), \end{cases} \quad (30)$$

де $H_0^{(1)}(k\sqrt{i}\,r)$, $H_0^{(1)}(k\sqrt{i}\,r_0)$ — функції Ханкеля відповідних аргументів.

Розв'язок (30) співпадає з розв'язком, отриманим у [14], в якій інтегральне перетворення Ханкеля застосовувалось безпосередньо до неоднорідного рівняння 4-го порядку (25).

5. Висновок. Описаний метод розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь з частинними похідними високого парного порядку полягає у знаходженні суми розв'язків декількох неоднорідних рівнянь другого порядку, або ж у знаходженні суми розв'язків неоднорідних рівнянь нижчого порядку, сума порядків яких дорівнює порядку початкового рівняння. Очевидно, що в залежності від структури правих частин неоднорідних рівнянь високого порядку такий підхід може спростити методику визначення частинних, а отже і загальних розв'язків. Запропонований метод зниження порядку диференціальних рівнянь може бути поширено також і на інші класи неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними. Крім цього, він може бути ефективним при розв'язуванні звичайних неоднорідних диференціальних рівнянь високого порядку.

Література

1. Векуа И.Н. Об одном методе расчета призматических оболочек / И.Н. Векуа // Тр. Тбилисского матем. ин-та. — 1955. — Т. 21. — С. 191–293.

2. Зеленський А.Г. Метод розв'язування системи диференціальних рівнянь високого порядку в аналітичній теорії нетонких оболонок / А.Г. Зеленський // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. — 2008. — Вип. 9. — С. 93–103.

3. Зеленський А.Г. Моделі аналітичної теорії трансверсально-ізотропних плит / А.Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. — Т. 17, № 5. — 2009. — Механіка. В. 13, т. 2. — С. 54–62.

4. Зеленський А.Г. До питання про розв'язування неоднорідних диференціальних рівнянь / А.Г. Зеленський // Theoretical Foundations of Civil Engineering. — 2011. — Vol 19. — P. 263–266.

5. Зеленський А.Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними в теорії пластин середньої товщини / А.Г. Зеленський // Вісник Дніпропетр. ун-ту. — Т. 20, № 5. — 2012. — Механіка. В. 16, т. 2 / 1. — С. 60–66.

6. Зеленський А.Г. Метод зниження порядку неоднорідних диференціальних рівнянь із частинними похідними / А.Г. Зеленський // Методи розв'язування прикладних задач механіки деформівного твердого тіла. Зб. наук. праць. — В. 13. — 2012. — С. 188–196.

7. Кильчевский Н.А. Основы аналитической механики оболочек / Н.А. Кильчевский. — К.: Изд-во АН УССР. — 1963. — 354 с.

8. Немиш Ю.Н. Напряженно-деформированное состояние нетонких оболочек и пластин. Обобщенная теория. Обзор / Ю.Н. Немиш, И.Ю. Хома // Прикл. механіка. — 1991. — 29, № 11. — С. 3–27.

9. Плеханов А.В. Об одном асимптотическом методе построения теории изгиба пластин средней толщины / А.В. Плеханов., А.П. Прусаков // Механика твердого тела. — 1976. — № 3. — С. 84–90.

10. Понятовский В.В. Уравнения теории анизотропных пластинок / В.В. Понятовский // Исследование по упругости и пластичности. Л.: ЛГУ, 1965. — № 4. — С. 3–28.

11. Прусаков А.П. О построении уравнений изгиба двенадцатого порядка для трансверсально-изотропной пластины / А.П. Прусаков // Прикл. механика. — 1993. — Т. 29, № 12. — С. 51–58.

12. Снеддон И. Преобразования Фурье. / И. Снеддон. — М.: Изд-во иностранной лит., 1955. — 668 с.

13. Хома И.Ю. Обобщенная теория анизотропных оболочек / И.Ю. Хома. — К.: Наук. думка, 1986. — 170 с.

14. Шевляков Ю. А, Розв'язок задачі згину пологих сферичних оболонок / Ю.А. Шевляков, В.П. Шевченко // Прикл. механіка. — 1964. — Т. 10. Вип. 4. — С. 382–391.

15. Cicala P. Sulla teria elastica della plate sottile // Giorn genio Civile. — 1959. — 97, № 4. — P. 238–256.

References

1. Vekua Y.N. Ob odnom metode rascheta pryzmatycheskykh obolochek / Y.N. Vekua // Tr. Tbylysskoho matem. yn-ta. — 1955. — T.21. — S. 191–293.

2. Zelens'kyy A.H. Metod rozv"yazuvannya systemy dyferentsial'nykh rivnyan' vysokoho poryadku v analitychniy teoriyi netonkykh obolonok / A.H. Zelens'kyy // Metody rozv"yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila. — 2008. — Vyp. 9. — S. 93–103.

3. Zelens'kyy A.H. Modeli analitychnoyi teoriyi transversal'no-izotropnykh plyt / A.H. Zelens'kyy // Visnyk Dnipropetr. un-tu. — T. 17, # 5. — 2009. — Mekhanika. V. 13, t. 2. — S. 54–62.

4. Zelens'kyy A.H. Do pytannya pro rozv"yazuvannya neodnoridnykh dyferentsial'nykh rivnyan' / A.H. Zelens'kyy // Theoretical Foundations of Civil Engineering. — 2011. — Vol. 19. — P. 263–266.

5. Zelens'kyy A.H. Metod znyzhennya poryadku neodnoridnykh dyferentsial'nykh rivnyan' iz chastynnymy pokhidnymy v teoriyi plastyn seredn'oyi tovshchyny / A.H. Zelens'kyy // Visnyk Dnipropetr. un-tu. — T. 20, # 5. — 2012. — Mekhanika. V. 16, t. 2 / 1. — S. 60–66.

6. Zelens'kyy A.H. Metod znyzhennya poryadku neodnoridnykh dyferentsial'nykh rivnyan' iz chastynnymy pokhidnymy / A.H. Zelens'kyy // Metody rozv"yazuvannya prykladnykh zadach mekhaniky deformivnoho tverdoho tila. Zb. nauk. prats'. — V. 13. — 2012. — S. 188–196.

7. Kyl'chevskyy N.A. Osnovы analytycheskoy mekhanyky obolochek / N.A. Kyl'chevskyy. — K.: Yzd-vo AN USSR. — 1963. — 354 s.

8. Nemysh Yu. N. Napryazhenno-deformyrovannoe sostoyanye netonkykh obolochek y plastyn. Obobshchennaya teoryya. Obzor / Yu. N. Nemysh, Y. Yu. Khoma // Prykl. mekhanika. — 1991. — 29, #11. — S. 3–27.

9. Plekhanov A.V. Ob odnom asymptotycheskom metode postroenyya teoryy yz·hyba plastyn sredney tolshchynы / A.V. Plekhanov., A.P. Prusakov // Mekhanyka tverdoho tela. — 1976. — #3. — S. 84–90.

10. Ponyatovskyy V.V. Uravnenyya teoryy anyzotropnыkh plastynok / V.V. Ponyatovskyy // Yssledovanye po upruhosty y plastychnosty. L.: LHU, 1965. — #4. — S. 3–28.

11. Prusakov A.P. O postroenyy uravnenyy yz·hyba dvenadtsatoho poryadka dlya transversal'no-yzotropnoy plastynы / A.P. Prusakov // Prykl. mekhanyka. — 1993. — T. 29, # 12. — S. 51–58.

12. Sneddon Y. Preobrazovanyya Fur'e. / Y. Sneddon. — M.: Yzd-vo ynostrannoy lyt., 1955. — 668 s.

13. Khoma Y. Yu. Obobshchennaya teoryya anyzotropnыkh obolochek / Y. Yu. Khoma. — K.: Nauk. dumka, 1986. — 170 s.

14. Shevlyakov Yu. A, Rozv"yazok zadachi z·hynu polohykh sferychnykh obolonok / Yu. A. Shevlyakov, V.P. Shevchenko // Prykl. mekhanika. — 1964. — T. 10. Vyp. 4. — S. 382–391.

15. Cicala P. Sulla teria elastica della plate sottile // Giorn genio Civile. — 1959. — 97, № 4. — P. 238–256.