

Fitim D.

кандидат, доцент кафедри фінансів і обліку, факультет бізнесу та економіки, Університет Південно-Східної Європи, Республіка Македонія

Гудим П. В.

аспірант, Дніпропетровський університет імені Альфреда Нобеля

Fitim D.

кандидат, доцент кафедри фінансов и учета, факультет бизнеса и экономики, Университет Юго-Восточной Европы, Республика Македония

Гудым П. В.

аспирант, Днепрпетровский университет имени Альфреда Нобеля

Fitim D.

PhD, Docent at Department of Finance and Accounting, Faculty of Business and Economics, South East European University, Republic of Macedonia

Hudym P. V

PhD Student, Alfred Nobel University Dnipropetrovsk

ПОБУДОВА ДИНАМІЧНОЇ МОДЕЛІ УПРАВЛІННЯ ІНВЕСТИЦІЙНИМ ПОРТФЕЛЕМ ПОСТРОЕНИЕ ДИНАМИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ УПРАВЛЕНИЯ ИНВЕСТИЦИОННЫМ ПОРТФЕЛЕМ BUILDING A DYNAMIC MODEL OF INVESTMENT PORTFOLIO MANAGEMENT

Анотація: Розглянуто різні способи та задачі оптимізації інвестиційного портфеля, котрі пов'язані із способами аналізу вхідної інформації: множинність можливостей інвестора та його поінформованість (інтуїтивний аналіз), ситуації розвитку економічного середовища (фундаментальний аналіз) та підходи і підготовка вхідних даних для аналізу – статистичні та прогнозні моделі (технічний аналіз). Було розглянуто проблему створення багатокрокової моделі управління інвестиційним портфелем – модель мінімізації загального, за можливий прогнозний горизонт, ризику, що зроблено за використання теорії множників Лагранжа та методів прогнозування.

Ключові слова: управління інвестиційним портфелем, мінімізація ризику, диверсифікація інвестицій, множники Лагранжа, багатокрокова модель.

Аннотация: Рассмотрены различные способы и задачи оптимизации инвестиционного портфеля, которые связаны с методами анализа входящей информации: множественность возможностей инвестора и его осведомленность (интуитивный анализ), ситуации развития экономической среды (фундаментальный анализ) и подходы, также подготовка исходных данных для анализа – статистические и прогнозные модели (технический анализ). Была рассмотрена проблема создания многошаговой модели управления инвестиционным портфелем – модель минимизации общего, за возможный прогнозный горизонт, риска, с использованием теории множителей Лагранжа и методов прогнозирования.

Ключевые слова: управление инвестиционным портфелем, минимизация риска, диверсификация инвестиций, множители Лагранжа, многошаговая модель.

Summary: Different ways and portfolio optimization tasks, which related to methods of incoming information analysis, were considered: spectrum of investor's opportunities and its information awareness (intuitive analysis), situation of economic environment development (fundamental analysis) and approaches and preparation of input data for analysis – statistical and predictive models (technical analysis). The problem of the creation of investment portfolio management multi-model was determined – model of overall risk for possible forecast horizon minimization, that is made by using the theory of Lagrange multipliers and forecasting methods, was created and analyzed.

Keywords: portfolio management, risk minimization, diversification of investments, Lagrange multipliers, multi-model.

Постановка проблеми

Оскільки світова фінансова система змінюється, розвивається у процесі глобалізації світової економіки під дією законодавчих та інституціональних змін, розгляд і використання фінансового механізму є необхідним при вирішенні проблеми з постійним рухом капіталу [1]. Актуальним питанням у сфері розподілу, накопичування і збереження капіталу, є управління інвестиціями при їх розподілі в активи, тобто застосування механізму управління інвестиційним портфелем, який забезпечує збереження чи примноження коштів відповідно до динамічних ринкових умов, у котрих опиняється учасник економічної системи [2].

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Сучасні методи технічного аналізу, якими користуються на практиці для планування і прогнозування оптимального управління інвестиційного портфеля заважають розвитку математичного моделювання, зокрема в моделях Марковіца, Тобіна, Шарпа, теорії систем підтримки прийняття рішень та кібернетичних систем управління. Останнім методикам приділяють велику увагу, так як основною задачею управління інвестиційним портфелем є контроль над розподілом інвестицій відповідно до ризику та оцінка зовнішньої інформації.

Досліджуючи прогресивні методи прийняття рішень по управлінню інвестиційним портфелем, існує низка ефективних підходів по вирішенню проблем прогнозу та планування розподілу інвестицій. В основі досліджень та аналізу — моделі динаміки капіталу та інвестиційних потоків, обґрунтованих статистичною інформацією; моделі динаміки цін та доходності, що включають збереження власного капіталу через інвестиції; способи постановки оптимізаційної задачі з її обмеженнями, як по прибутковості чи ризику портфеля, так і впливу зовнішньоекономічних факторів; а також різні способи використання первинної чи прогновної інформації для портфеля щодо динаміки доходностей та цін.

Вивченням теорії та знаходженням способів вирішення проблеми прийняття рішень та управління інвестиційним капіталом, визначенням основних властивостей різних підходів та характеристик, їх практичним застосуванням займалися науковці багатьох країн світу, серед яких найбільший інтерес виявляють роботи Домбровського Д. В., Мельникова А. В., Первозванського А. А., Ширяєва А. Н., Benninga S., Bundo Sh., Belecki T., Campbell J. Y., Chamberlain G., Chopra V. K., Frauendorfer K., Li D., Lintner J., Markowitz H. M., Merton R. C., Rothschild M., Samuelson P. A., Siede H., Sharpe W., Viceira L. M., Yin G., Ziemba W. T. і т.д. [1–8].

Найбільшої популярності здобули ті дослідження, що зосереджені на аналізі динаміки цін, доходностей та випадкових величин [2].

Формулювання цілей статті

При великій кількості підходів по оптимальному розподілі інвестицій, більший інтерес мають такі, що здатні проводити аналіз у перспективному плануванні, а особливими є ті, що застосовують можливості теорії та практики прогнозування. **Ціллю та метою** являється віднаходження найбільш ефективної методики прийняття рішень при управлінні інвестиційним портфелем з урахуванням прогновної інформації та її обґрунтування в залежності від наявних технічних, технологічних можливостей, теоретичних та практичних досліджень, а також виявлення вузьких питань, що потребують вивчення.

Моделювання економічних та фінансових систем

Оптимізаційна задача управління інвестиційним портфелем — це задача по організації величини інвестицій, котра потребує аналітичного висновку. Задля досягнення висновків використовуються різні методи та методики, але у випадку управління інвестиційним портфелем, а особливо при наявності прогнозів **в економічних та фінансових системах, є доцільним змодельовати цільову задачу, а після — отримати аналітичну технічну інформацію, за котрою можна буде зробити висновки.**

Для оптимізаційної задачі треба з'ясувати якою цільовою функцією та обмеженнями відображена умова по мінімізації ризику з прогнозом.

Сформулюємо задачу при прогнозі динаміки доходностей акцій:

1. Мінімізація і вибір найменш ризикових типів цінних паперів (ЦП) (1).
2. Максимізація прибутку і вибір типів ЦП з меншим ризиком (2).
3. Проміжним між цілями є визначення типів ЦП, які буде обрано, і тих, що виводяться з проектів інвестування, керуючись прогнозом (3) [2; 3].

Для дослідження доходності від інвестування в акції приймається, відповідно до задачі (1–3), що ризик на весь прогнозний період (представлений дисперсією доходності портфеля (*total portfolio variance, TPV*)) визначений як сукупність двох: перший — це ризик помилки прогнозування стосовно реальних значень (*error portfolio variance, EPV*), другий — представлений дисперсією моделі ціноутворення доходностей для побудови прогнозних значень (*forecast portfolio variance, FPV*) [5].

Ризик портфеля визначається за аналізом прогнозних значень і приймається через дисперсію, що залежить від точності прогнозу та моделювання по статистиці. Практична реалізація потребує формального математичного вигляду задачі (1–3), що можливо через формалізацію вхідних даних, цільової функції та її обмежень і вихідних даних [3; 4].

Для формалізації задачі та програмного управління інвестиційним портфелем взяті початкові дані по компаніям, що вибрані наступним чином з сайту <http://finance.yahoo.com>: Hewlett-Packard Company (HPQ) – NYSE (Sector: Technology), Nokia Corporation (NOK) – NYSE (Sector: Technology), Apple Inc. (AAPL) – NasdaqGS (Sector: Consumer Goods), International Business Machines Corporation (IBM) – NYSE (Sector: Technology), та General Electric Company (GE) – NYSE (Sector: Industrial Goods). Статистична інформація взята по скорегованій ціні та дивідендам за період від 1 лютого 2000 року по 26 січня 2014 року з місячним інтервалом для утворення вибірки навчання нейронної мережі. Для перевірки моделі вибірку зі 168 (N) значеннями подовжено на 12 до 26 січня 2015 року [6]. Для аналізу та обробки інформації використано Excel, MathCAD та MatLab. Для розрахунку цін доходностей взята формула з [7]:

$$r_{\tau} = \ln((P_{\tau} + D_{\tau})/P_{\tau-1}), \tau = \overline{1, N}. \quad (1)$$

Вхідна інформація лягає в основу знаходження коваріаційної матриці, даних прогнозу, похибок прогнозу доходностей портфеля ЦП. Розв'язок задачі потребує знаходження проміжних даних: середнє арифметичне вибірки з N значень доходностей типів ЦП (2):

$$\bar{r}_{i\tau} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N (r_{i\tau}), \quad (2)$$

дисперсія вибірки доходностей типів цінних паперів (3):

$$\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N (r_{i\tau} - \bar{r}_{i\tau})^2, \quad (3)$$

коваріація доходностей типів цінних паперів (4):

$$cov_{i,j} = \frac{1}{N} \sum_{\tau=1}^N ((r_{i\tau} - \bar{r}_{i\tau}) \cdot (r_{j\tau} - \bar{r}_{j\tau})), \quad (4)$$

та коефіцієнт кореляції вибірки (5):

$$\rho_{i,j} = cov_{i,j} / \sigma_i \sigma_j, \quad (5)$$

що знаходяться між двома i -, j -тим типами ЦП, де $i = j \in R, i, j = \overline{1, n}, n$ – кількість типів ЦП, що входять до портфелю, τ – час обраних даних в статистиці за період («тау»). Визначивши для портфеля всі вхідні дані, утворюємо інформацію для технічного аналізу для постановки задачі: ЛПР визначає оптимальну стратегію розподілення інвестицій через (1–3). ЛПР здійснює диверсифікацію портфеля, беручи безвідсоткові позики чи активи в борг у брокерів [5]. За задачею (1–3), оптимізація портфеля у вигляді математичної оптимізаційної моделі можлива за наступних вхідних умов:

– у інвестора є інформація у початковий період t_0 (прогноз динаміки доходностей). По ній задається

матриця очікуваної доходності кожного i -го типу ЦП на $[t_0, t_0 + l \cdot \Delta t] = T \rightarrow RP(rp_i(r_{i,N}))$ (від прогнозних значень доходностей ЦП на часовий горизонт T («те») за моделлю прогнозу нейронної мережі), де $r_{i,N}$ – вектор логарифмованої ціни доходності i -их типів ЦП за статистичний період T «тау» з N елементів з кроком Δt ($[\tau_0, \tau_0 + N \cdot \Delta t] = T$) відповідно до (1), а $rp_i(r_{i,N})_t$ – елементи матриці RP , прогнозна величина доходності i -их типів ЦП по вектору $r_{i,N}$;

– для ЛПР важливим є знайти $W_{n \times l}$ – матрицю інвестиційних важелів по i -им типам ЦП в різний час t за увесь часовий горизонт T розмірністю $n \times l$, а $n \in R$ – це кількість кроків прогнозування з величиною кроку Δt , T – інвестиційний горизонт портфеля, $i = \overline{1, n}$, де $n \in R$ – кількість типів ЦП в портфелі, а $t = \overline{1, l}$ – номер періоду прийняття рішення.

Також, задача має наступні (6–8) параметри. З'ясуємо:

$$E_{p_i}(rp_i(r_{i,N})) \leftrightarrow w_i \cdot rp_i(r_{i,N})$$

– доходність портфеля від інвестування в i -ий тип цінних паперів,

$$a E_p(rp_i(r_{i,N})) \leftrightarrow \sum_{i=1}^n (E_{p_i}(rp_i(r_{i,N})))$$

– сумарна доходність портфеля через інвестування. Так маємо змогу описати динаміку доходності портфеля в t момент прийняття рішення за умови реінвестування (8), якщо є прогноз на декілька періодів у T , так:

$$E_p(rp_i(r_{i,N})_t)_t = \sum_{i=1}^n (w_{i_t} \cdot rp_i(r_{i,N})_t) \cdot \left(\frac{E_p(rp_i(r_{i,N})_{t-1})_{t-1}}{100\%} + 1 \right) \quad (6)$$

що визначає можливу величину прибутку у час $t_0 + t \cdot \Delta t$. Для доповнення умови розрахунком реального прибутку (збитку) на початок кожного періоду, відносно Δt , перерахуємо величину очікуваної доходності портфеля (7) по реальним величинам доходності акцій:

$$E_p(\bar{r}_{p_i}(r_{i,N})_t)_t = \sum_{i=1}^n (w_{i_t} \cdot \bar{r}_{p_i}(r_{i,N})_t) \cdot \left(\frac{E_p(\bar{r}_{p_i}(r_{i,N})_{t-1})_{t-1}}{100\%} + 1 \right), \quad (7)$$

$$\text{де } \bar{r}_{p_i}(r_{i,N})_0 = rp_i(r_{i,N})_0.$$

Знайдемо економічну цінність моделі, розрахувавши за кожен t момент часу вектор помилки ретроспективного прийнятого рішення як:

$$\varepsilon_t = \sum_{i=1}^n (w_{it} \cdot \overline{rp}_i(r_{i,N})_t) - \sum_{i=1}^n (w_{it} \cdot rp_i(r_{i,N})_t). \quad (8)$$

Слідом за умовою, знайдемо розв'язок і математичну форму задачі.

Динамічна модель стратегічного оптимального управління портфелем

Аналізуючи різні модифікації моделей Марковіца, Тобіна, Шарпа для знаходження важелів інвестицій при використанні прогнозованої інформації, застосуємо методіку математичного моделювання з включенням множників Лагранжа для побудови оптимізаційної моделі для вирішення задачі (1–3) (спосіб запропонований Шеріф Бундо) [8].

Задачу оптимізації сформулюємо для першого прогнозного періоду:

$$\min \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i \cdot w_j \cdot cov_{i,j}) \quad (9)$$

– однокрокова задача функції мінімізації ризику портфеля з обмеженнями:

1. Очікувана доходність E_p має дорівнювати визначеній величині E^* :

$$E_p = \sum_{i=1}^n (w_i \cdot rp_i(r_{i,N})) \text{ має дорівнювати } E^* \quad (10)$$

2. Сума всіх величин частин розподілу інвестицій має:

$$\sum_{i=1}^n (w_i) = 1. \quad (11)$$

При математичному моделюванні цільової функції однокрокової задачі, використаємо теорію множників Лагранжа, що надає можливість знайти мінімальний ризик по прогнозним даним – $Z = \min \sigma^2$:

$$Z = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i \cdot w_j \cdot cov_{i,j}) + \lambda_1 \cdot (E_p - E^*) + \lambda_2 \cdot \left(\sum_{i=1}^n (w_i) - 1 \right), \quad (12)$$

де $w_j = w_i^T$ – значення часток інвестицій по типу ЦП, інвестиційні важелі матриці (T – операція транспонування); права частина рівняння (12) пояснюється формальним записом множників Лагранжа на цільову функцію мінімізації ризику, що визначається через формулу дисперсії:

$$\sigma^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i \cdot w_j \cdot cov_{i,j}), \quad (13)$$

де $cov_{i,j}$ – по-елементна коваріація i -го ЦП до j -го. Відповіддю задачі (9–11) буде (12) і вектор зі значеннями w_i на t_0 момент часу – w_{it_0} . Отже, використовуємо множники Лагранжа як спосіб з аналізом цільової функції та її обмежень для розрахунку мінімального ризику та зазначеної доходності портфеля на прогнозний t_0 момент часу і наступні, маємо змогу знайти матричний розв'язок (14–16). Знайшовши часткові похідні від рівняння Лагранжа Z по $w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, \lambda_1, \lambda_2$, формується матриця:

$$A = \begin{bmatrix} 2 \cdot cov_{i,j} & rp_j & 1_j \\ rp_i & 0 & 0 \\ 1_i & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (14)$$

вектор матриця X визначена так:

$$X = \begin{bmatrix} w_j \\ \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

а також:

$$C = \begin{bmatrix} 0_j \\ E^* \\ 1 \end{bmatrix} \quad (16)$$

дають можливість віднайти через існування A^{-1} (якщо визначник A не дорівнює нулю) від формули $A \cdot X = C$, вихідну матрицю $X = A^{-1} \cdot C$ [6; 8]. За результатами задачі доцільно виконувати диверсифікацію портфеля при можливості досягнення відносно середньої ціни доходності ЦП, за умови різних рівнів доходності портфеля, конкретних результатів ризику та частин інвестицій, що мають мінімізувати даний ризик.

Виявлено:

За прогнозних доходностей ЦП для уточнення стратегії та її перевірки за період T має виконуватися диверсифікація, але по отриманим контрольним значенням $\overline{rp}_i(r_{i,N})_t$, та порівняння результатів за прогнозом з результатами диверсифікації (зворотній зв'язок).

Проте, для багатокрокової задачі, що мусить надавати стратегічну інформацію, операція визначення ризику та інвестиційних важелів для його мінімізації повторюється для всього часового горизонту (для 12-ти місяців прогнозу, T), де загальний ризик – сума ризиків за кожен період – цільова функція багатокрокової задачі динамічного управління портфелем:

$$Z^{\wedge} = \sum_{t=1}^l (Z(E^*_{t})) \rightarrow \min,$$

де $Z(E^*_{t})$ – функція від E^*_{t} (17)

фіксованим елементом для цієї задачі є доходність на весь період T :

$$E^{\wedge} = \sum_{t=1}^l (E^*_{t}), \quad (18)$$

головна умова — доходність портфеля E^* за конкретний період t має автоматично вибратися у разі мінімізації ризику за увесь час T .

Задача записується у математичному виразі наступним чином:

$$\min \sum_{t=1}^l \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_{i_t} \cdot w_{j_t} \cdot cov_{i,j_t}) \quad (19)$$

– цільова функція багатокрокової задачі з обмеженнями:

1. Сума величин E^* портфеля на кожен момент t має дорівнювати визначеній величині E^\wedge за часовий горизонт T (використано 60%, 100%, 140%, 180% прибутковість E^\wedge чи таке її значення, що мінімізує ризик):

$$\sum_{t=1}^l (E^*_t) = E^\wedge, \quad (20)$$

де E^*_t – змінні багатокрокової задачі, знайденні при мінімізації ризику в t .

2. Сума інвестиційних важелів за t момент часу має становити «1»:

$$\left(\sum_{i=1}^n w_i \right)_t = (1)_t \quad (21)$$

3. E_p за кожен момент t має дорівнювати знайденим змінним E^*_t :

$$\left(E_{p_t} = \sum_{t=1}^l \sum_{i=1}^n (w_{i_t} \cdot r_{p_i}(r_{i,N})_t) \right) \quad (22)$$

має дорівнювати E^*_t .

4. Реінвестуючи, контролюємо величину

$$E_{p_t} - E_p(\overline{r_{p_i}}(r_{i,N})_t)_t:$$

$$E_p(\overline{r_{p_i}}(r_{i,N})_t)_t = \sum_{i=1}^n (w_{i_t} \cdot \overline{r_{p_i}}(r_{i,N})_t) \cdot \left(\frac{E_p(\overline{r_{p_i}}(r_{i,N})_{t-1})_{t-1}}{100\%} + 1 \right). \quad (23)$$

Відповіддю виконання оптимізаційної задачі (17–23) буде матриця $W_{n \times l}$. Тож, багатокрокова задача (17–23) носить комплексний характер і її результати дають можливість побудувати оптимальний розмір інвестиційного портфеля на весь прогнозний період і охарактеризувати його по значенню мінімального ризику, прийнятого в сумі за всі періоди — має бути мінімальним за зазначеної загальної доходності портфеля.

Відповідно до початкових вхідних даних, отриманих з прогнозом, формується загальний план по використанню інвестицій при різних масштабах портфеля, розширюючи можливості по відбору кожного типу та формуванню оптимального інвестиційного портфеля в перспективі. Від результатів багатокрокової задачі можна визначити, яку стратегію краще використати і в який період слід діяти активніше.

Отже, подальше уточнення математичного моделювання досліджено глибше і запропоновано відтворити так: цільова функція з її обмеженнями для багатокрокового стратегічного планування з використанням множників Лагранжа буде для знаходження мінімального ризику за увесь період $Z^\wedge = \min \sigma^2_T$, де

$$\sigma^2_T = \sum_{t=1}^l (\sigma^2_t) \text{ у наступній формі:}$$

$$Z^\wedge = \sum_{t=1}^l \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_{i_t} \cdot w_{j_t} \cdot cov_{i,j_t}) + \lambda_{1_t} \cdot (E_{p_t} - E^*_t) + \lambda_{2_t} \cdot \left(\left(\sum_{i=1}^n (w_i) \right)_t - (1)_t \right) + \lambda_3 \cdot \left(\sum_{t=1}^l (E^*_t) - E^\wedge \right), \right)$$

$$\text{або } Z^\wedge = \sum_{t=1}^l (Z_t) + \lambda_3 \left(\sum_{t=1}^l (E^*_t) - E^\wedge \right), \quad (24)$$

реінвестуючи, слідкуємо за $E_{p_t} - E_p(\overline{r_{p_i}}(r_{i,N})_t)_t$ так, як в (23).

Отже, було сформовано математичну динамічну модель стратегічного управління інвестиційним портфелем на основі прогнозної інформації доходностей ЦП з контролем реальної доходності портфеля. Відповідно до цієї моделі, початкових даних, прогнозу (табл. 1), а також ретроспективних даних для прогнозу, отримано рішення за методом Лагранжа задачі (1–3) — похідні функції Z^\wedge по невідомим параметрам $w_{i_t}, \lambda_{1_t}, \lambda_{2_t}, \lambda_3, E^*_t$, а для задачі мінімізації (25) — по E^\wedge , прирівнюються до 0.

Практичний розв’язок задачі — використання моделі (24) та (25)

Очікувана доходність у роботі на момент часу t обраного типу ЦП, а також матриці коваріацій знаходяться наступним чином:

– очікувана доходність ЦП, для задачі (1–3) і формул-моделей (12) та (24), початкового портфеля на кожен момент t розраховується як середнє значення новоутвореної вибірки від прогнозу у t момент часу:

Таблиця 1

Початкові дані

t, l	Прогноз середніх значень доходностей ЦП на початок прогнозного моменту часу				
	HPQ ($i = 1$)	NOK	AAPL	IBM	GE
0	0,00184	-0,00635	0,01754	0,00550	0,00559
1	0,00210	-0,00615	0,01699	0,00555	0,00560
2	$\bar{r}_{i_{\tau+t}} = \frac{1}{N+l} \cdot \left(\sum_{\tau=1}^N (r_{i_{\tau}}) + \sum_{\tau=1}^l (rp_i(r_{i,N})_{\tau}) \right)$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
...	
12	0,00228	-0,00509	0,01834	0,00608	0,01280
t	Прогнозні значення доходності ЦП на початок для кожного $t - rp_i(r_{i,N})_t$				
	HPQ	NOK	AAPL	IBM	GE
1	0,04644	0,02749	-0,07497	0,01491	0,00601
2	0,09011	0,03381	-0,05559	0,05402	0,09194
3	-0,02583	0,02075	-0,03116	0,02789	-0,03390
4	0,02431	0,00724	0,23582	0,01751	-0,02638
5	0,04569	0,01113	-0,06402	0,03171	0,11820
6	-0,05653	0,02613	0,19163	0,01583	-0,05457
7	0,06049	0,02371	-0,19395	0,01173	0,10800
8	0,00180	0,00062	-0,02998	-0,00218	0,23232
9	0,01216	-0,00875	0,07336	-0,01364	-0,04216
10	-0,08464	0,00822	0,16978	-0,00419	0,26817
11	-0,00262	-0,00692	0,07839	0,00157	-0,00415
12	-0,01008	0,00549	0,05485	0,01506	0,69294

– розраховується матриця коваріацій (табл. 2) по (4) на кожен момент t :

Таблиця 2

Матриці коваріацій

	t матриці коваріацій						t	t матриці коваріацій					
	Cov	HPQ	NOK	AAPL	IBM	GE		Cov	HPQ ($i=1$)	NOK ($i=2$)	AAPL ($i=3$)	IBM ($i=4$)	GE ($i=5$)
0	HPQ	0,0146	0,0038	0,0071	0,0040	0,0028	$l = \overline{1,12}$	HPQ ($j=1$)	$cov_{i,j} = \frac{1}{N+l} \times \left(\sum_{\tau=1}^N \left((r_{i_{\tau}} - \bar{r}_{i_{\tau+t}}) \cdot (r_{j_{\tau}} - \bar{r}_{j_{\tau+t}}) \right) + \sum_{\tau=1}^l \left((rp_i(r_{i,N})_{\tau} - \bar{r}_{i_{\tau+t}}) \cdot (rp_j(r_{j,N})_{\tau} - \bar{r}_{j_{\tau+t}}) \right) \right)$				
	NOK	0,0038	0,0219	0,0044	0,0032	0,0038		NOK ($j=2$)					
	AAPL	0,0071	0,0044	0,0197	0,0050	0,0025		AAPL ($j=3$)					
	IBM	0,0040	0,0032	0,0050	0,0055	0,0027		IBM ($j=4$)					
	GE	0,0028	0,0038	0,0025	0,0027	0,0088		GE ($j=5$)					

При цих значеннях очікуваної доходності і матриць коваріацій розраховується однокрокова задача як складова моделі багатокрокової задачі на момент t прогнозного періоду T , мінімізуючи ризик не диверсифікованого портфеля при визначеному. Практична реалізація процесу знаходження матриці Xt зі знаходженням мінімального портфельного ризику залежить від невідомої величини бажаної доходності, відносно коригованих прогнозом значень очікуваної доходності на розрахунковий момент часу прийняття рішення та на кожен тип ЦП портфеля. Величина

E^* розраховується відносно E^A , що визначається інвестором. Обмеження формули (24) встановлюється для виконання операції диверсифікації і визначення, відносно прогнозу, більш стійких типів ЦП. Отже, основне завдання, визначене формулою (24) та (25), мінімізація ризику, здійснюється у два етапи:

1. *Диверсифікація.* Встановити набір типів ЦП, що задовольняють умову визначеного від початку значення загальної доходності за увесь T . Встановлюється матриця зображення Ws відносно матриці $W1$, елементи котрої це «0», якщо значення $w_{ij} < 0$, виключаючи

Таблица 3

Матриця Xt

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
W1(100%)	-2,04	-1,89	-1,97	-2,03	-1,98	-2,18	-1,97	-2,03	-2,01	-2,25	0,00	-2,42	HPQ
	-2,64	-2,68	-2,65	-2,66	-2,72	-2,70	-2,71	-2,80	-2,80	-2,88	-2,37	-3,02	NOK
	3,98	3,74	3,66	3,98	3,80	4,09	3,64	3,63	3,75	3,99	-4,14	4,18	AAPL
	0,14	0,16	0,46	0,32	0,23	0,26	0,21	-0,25	-0,33	-0,79	4,90	-1,39	IBM
	1,56	1,68	1,50	1,40	1,68	1,53	1,82	2,46	2,38	2,92	2,62	3,65	GE
λ_1	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	-17,00	
λ_2	0,06	0,07	0,07	0,07	0,07	0,07	0,08	0,08	0,08	0,08	0,08	0,09	

ризиковані типи ЦП, а інакше – «1», при цьому відбувається автоматизація вибору ЦП при $W2 \cdot Ws = W$ (* – операція по-елементного множення), а W2 – проміжний результат задачі, що перераховується до тих пір, до поки $W2 = W$.

2. *Мінімізація диверсифікованого ризику.* За даною матрицею Ws, по формулі (25), визначається матриця W та загальні доходності за кожен період, що відповідають мінімальному ризику. За формулою (24) матриця W1 (у складі Xt) має вигляд табл. 3 (приведено для 100%) при мінімізації ризику для значень загальної доходності 60%, 100%, 140%, 180%:

За прогнозними даними стратегічний план W визначається по (25):

Формула (24) зі змінами: $w_{it} = w2_{it} \cdot ws_{it}$

$$w_{jt} = w2_{jt} \cdot ws_{jt} = w2_{it}^T \cdot ws_{it}^T \quad (25)$$

(T – транспонування).

За використанням MathCAD було автоматизовано процес розрахунку формул (24) і (25), а також проведено аналіз доходності і ризикованості портфеля за різними відсотками встановленого загального доходу на T. По (25) сформована, при мінімізації загального ризику та здійсненні диверсифікації по значенням E^A в 60%, 100%, 140%, 180% відповідно, матриця W у табл. 4. За аналізом по (24) і (25) визначаємо, що:

- цінні папери HPQ, NOK являються високо ризикованими (табл. 4);
- за темпами приросту ризику та доходності, а також значеннями E^*_{jt} (табл. 5, табл. 6) найкращий план інвестування лежить між 100%–140%;
- зі збільшенням доходності портфеля інвестиції слід вносити в AAPL та GE, проте більш ефективні та стійкі по співвідношенню ризику та доходності є цінні папери IBM та GE (табл. 4, табл. 5, табл. 6).

Таблица 4

Матриці

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
W ($E^A = 60\%$)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	HPQ
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	NOK
	0,028	0,031	0,031	0,031	0,033	0,033	0,035	0,036	0,037	0,286	0,000	0,354	AAPL
	0,652	0,651	0,651	0,651	0,652	0,652	0,652	0,660	0,660	0,000	0,708	0,000	IBM
	0,320	0,318	0,318	0,318	0,315	0,315	0,313	0,304	0,303	0,714	0,292	0,646	GE
λ_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
λ_2	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,029	-0,018	-0,033	
W ($E^A = 100\%$)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	HPQ
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	NOK
	0,028	0,031	0,031	0,031	0,033	0,033	0,035	0,279	0,280	0,286	0,000	0,354	AAPL
	0,652	0,651	0,651	0,651	0,652	0,652	0,652	0,000	0,000	0,000	0,708	0,000	IBM
	0,320	0,318	0,318	0,318	0,315	0,315	0,313	0,721	0,720	0,714	0,292	0,646	GE
λ_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
λ_2	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,028	-0,028	-0,029	-0,018	-0,033	
W ($E^A = 140\%$)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,088	0,000	HPQ
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	NOK
	0,266	0,268	0,031	0,031	0,033	0,033	0,035	0,279	0,280	0,286	0,000	0,354	AAPL
	0,000	0,000	0,651	0,651	0,652	0,652	0,652	0,000	0,000	0,000	0,636	0,000	IBM
	0,734	0,732	0,318	0,318	0,315	0,315	0,313	0,721	0,720	0,714	0,277	0,646	GE

λ_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
λ_2	-0,028	-0,028	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,018	-0,028	-0,028	-0,029	-0,017	-0,033	
W ($E^{\wedge}=180\%$)	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,088	0,000	HPQ
	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	NOK
	0,266	0,268	0,031	0,031	0,269	0,268	0,270	0,279	0,280	0,286	0,000	0,354	AAPL
	0,000	0,000	0,651	0,651	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,636	0,000	IBM
	0,734	0,732	0,318	0,318	0,731	0,732	0,730	0,721	0,720	0,714	0,277	0,646	GE
λ_1	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	
λ_2	-0,028	-0,028	-0,018	-0,018	-0,028	-0,028	-0,028	-0,028	-0,028	-0,029	-0,017	-0,033	

Таблиця 5

Співвідношення ризику та доходності портфеля

Ризик до диверсифікації	Диверсифікація за доходу	min	Ризик після	Дохід	Темп приросту до диверсифікації		Темп приросту після	
					Ризик	Дохід	Ризик	Дохід
2,6797	0,60		0,1212	0,0918	2,0017	0,6667	0,0826	0,0702
8,0435	1,00		0,1312	0,0983	1,0326	0,4000	0,0742	0,0511
16,3495	1,40		0,1409	0,1033	0,6880	0,2857	0,1035	0,0767
27,5977	1,80		0,1555	0,1112	-	-	-	-

Таблиця 6

Доходність за кожний момент

t	E^{\wedge}_t (встановлюються для диверсифікації)				E^{\wedge}_t (диверсифікацію проведено)			
	$E^{\wedge}=60\%$	$E^{\wedge}=100\%$	$E^{\wedge}=140\%$	$E^{\wedge}=180\%$	$E^{\wedge}=9,18\%$	$E^{\wedge}=9,83\%$	$E^{\wedge}=10,33\%$	$E^{\wedge}=11,12\%$
1	0,0525363	0,0890168	0,1254974	0,1619779	0,0058887	0,0058887	0,0086274	0,0086274
2	0,0498571	0,0839892	0,1181212	0,1522532	0,0062555	0,0062555	0,0089065	0,0089065
3	0,0484036	0,0814250	0,1144463	0,1474677	0,0062565	0,0062565	0,0062565	0,0062565
4	0,0530309	0,0895749	0,1261188	0,1626628	0,0062764	0,0062764	0,0062764	0,0062764
5	0,0514347	0,0865234	0,1216121	0,1567009	0,0065895	0,0065895	0,0065895	0,0092234
6	0,0555512	0,0938244	0,1320976	0,1703709	0,0065533	0,0065533	0,0065533	0,0092353
7	0,0497258	0,0833730	0,1170201	0,1506672	0,0067419	0,0067419	0,0067419	0,0093506
8	0,0518217	0,0868358	0,1218499	0,1568640	0,0070993	0,0103049	0,0103049	0,0103049
9	0,0526468	0,0883906	0,1241343	0,1598780	0,0069575	0,0101949	0,0101949	0,0101949
10	0,0605733	0,1021910	0,1438087	0,1854264	0,0115471	0,0115471	0,0115471	0,0115471
11	0,0008721	-0,0099039	-0,0206798	-0,0314557	0,0068879	0,0068879	0,0065207	0,0065207
12	0,0735464	0,1247598	0,1759733	0,2271867	0,0147566	0,0147566	0,0147566	0,0147566

Аналізуючи результати, ризик за один період порівнюється з іншими, використовуючи матрицю W_s для формули (25) встановлюються періоди, що найбільш ризиковані, або приносять занадто малий дохід при досить великому ризику. Такі періоди можуть бути виключені відносно прогнозу та матриці W – елементи рядів матриці W_s , що відповідають за ризиковані періоди порівнюються до «0», надаючи ту інформацію та новоутворену матрицю W , що має використовуватися при прийнятті рішення інвестором. За розв'язком задачі отримуємо такі **висновки (I–V)**:

I. За всі періоди при стратегії мінімального ризику та знайденого доходу, що визначені по формулі (25) відносно прогнозу табл. 1, дії інвестора будуть

найбільш ефективними у перші 7-м місяців, при цьому слід вкладати у три типи ЦП – AAPL, IBM, GE, а найгірше за даним прогнозом в 11-му прогнозованому t . За мінімального ризику в середньому слід вкладати у відповідності до W при $E^{\wedge}=100\%$ в: 3,17% – AAPL, IBM – 65,16%, GE – 31,67%. А у інші періоди, окрім 11-ого, лише для двох типів ЦП є доцільним інвестування так: 30%– AAPL, GE – 70%. Проте, як і у кожного прогнозу, чим далі прогноз, тим більше причин вважати, що прогнозні дані далекі від реальних, тому є ймовірність, що різка зміна стратегії після 7-ого періоду виникає через обмеженість прогнозу, що являється важким і потребує глибшої оцінки у наступних моментах часу t .

II. Створено матрицю W_s для контролю диверсифікації портфеля для автоматизації процесу селекції при отриманні кінцевого результату.

III. Результати багатокрокової моделі пристосовані для визначення W не лише на основі статистики, а й при розрахованому прогнозі, що приводить до більших можливостей керувати процесом інвестування за рахунок побудови стратегічного плану відносно результатів прогнозу.

IV. Змодельована багатокрокова задача в (25) може використовувати зашумлені дані, проте при такому прогнозі значень доходностей ЦП модель доводить, що загальний ризик, котрий приймає інвестор — це ризик, викликаний похибкою прогнозу, окрім статистичних шумів.

V. В залежності від статистичної чи прогнозованої інформації, процеси диверсифікації, побудови стратегії та формування вхідної інформації для оптимізаційної задачі мають альтернативи: а отже, для прийняття рішення, моделі однокрокової та багатокрокової задач мусять бути пристосовані до будь-якої інформації. Тому було запропоновано модель багатокрокової задачі (25), як модифікацію однокрокової з властивістю використання будь-якого прогнозу для побудови стратегічного плану, зберігаючи можливість диверсифікації портфеля для пасивної та активної стратегії дій інвестора для ефективнішого досягнення визначеної цілі, що свідчить про значну гнучкість моделі та адаптованість до умов користувача.

Висновок

Оскільки, для вирішення задачі (1–3) було обрано багатокрокову модель оптимізації з використанням прогнозу, то результатом є матриця інвестиційних важелів $W_{n \times l}$. За даною матрицею $W_{n \times l}$ зроблено висновки (I–V). Проте, дізнаючись нову інформацію доцільно контролювати процес поправки цієї моделі в часі, що говорить про необхідність дослідження способів вирішення проблеми підвищення точності та контролю.

Дана модель надає можливість визначити найбільш сприятливі періоди для інвестування за прогнозом. Якщо прогноз досить точно визначений, то вплив корекції початкових даних $\bar{r}_{i_{t+t}}$ на результат розподілення інвестицій принесе більший дохід, тобто оптимально визначається розмір інвестицій типів ЦП в портфелі, котрі приносять найменший ризик при високих можливих доходах. Проте, для того, щоб робити конкретні висновки, необхідно точно визначити прогноз та методику його врахування. Цільова функція мінімізації портфельного ризику з обмеженнями у формі (25) — є гнучкою при внесенні початкових даних, за розв'язку котрої визначається оптимальна до таких даних стратегія інвестування, що говорить про її корисність для використання. Використовуючи формулу (25) та роблячи розрахунки через (3–10), процес знаходження результату може бути змодельованим і автоматизованим.

Література

1. Примостка Л.О. Финансовый менеджмент у банку [Електронний ресурс] / Л.О. Примостка // Підручник. — 2-ге вид. доп. і перероб. — К.: КНЕУ, 2004. — 468 с. — Режим доступу: <http://buklib.net/books/33019/>.
2. Буреш А.И. Формирования персонализированного инвестиционного портфеля [Електронний ресурс] / А.И. Буреш // Вестник Оренбургского государственного университета. — 2011. — № 13 (132). С. 79–81. — Режим доступу: <http://cyberleninka.ru/article/n/formirovaniya-personalizirovannogo-investitsionno-portfelya>.
- 3–4. Сорока К.О. Основы теории систем і системного аналізу: Навчальний посібник. [Електронний ресурс] / К.О. Сорока. — ХНАМГ. — 2004. — 291 с. — Режим доступу: http://eprints.kname.edu.ua/10895/1/СисАнализ_1_8н.pdf.
- 4–6. MathWorks, Econometrics Toolbox. Моделирование и анализ финансовых и экономических систем статистическими методами [Електронний ресурс] // MathWorks. — Режим доступу: http://matlab.ru/products/econometrics-toolbox/econometrics-toolbox-rus_web.pdf.
- 5–7. Хабров В.В. Оптимизация управления инвестиционным портфелем на основе прогнозов доходностей активов и прогнозов матриц ковариаций случайных составляющих [Електронний ресурс] / В.В. Хабров // Автореферат: ИПУ РАН, — 2014, 33 с. — Режим доступу: [www.hse.ru/data/2014/09/17/1314976698/АВТОРЕФЕРАТ_Хабров\(1\).pdf](http://www.hse.ru/data/2014/09/17/1314976698/АВТОРЕФЕРАТ_Хабров(1).pdf).
- 6–8. Fitim D. Portfolio Composition: A Methodological Solution Using Lagrange Multiplier / D. Fitim // International Conference on Economic and Social Studies (ICESoS), Sarajevo, Bosnia and Herzegovina. — 2015.
- 7–9. Benninga S. Financial Modeling, Uses Excel / S. Benninga // Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press. — 1997, p. 68.
- 8–10. Bundo Sh. Drejtim Portofoli / Sh. Bundo // Tiranë: albPAPER. — 2009, pp. 160–165.

References

1. Prymostka L. A. (2004), *Finansovyi Menedzhment u Banku*, [Online], 2nd ed, KNEU, Kyiv, Ukraine, available at: <http://buklib.net/books/33019/>.
2. Bures A.I. (2011). "Formalization of Personalized Investment Portfolios", [Online], Bulletin of the Orenburg State University, vol. 13 (132), pp. 79–81, available at: <http://cyberleninka.ru/article/n/formirovaniya-personalizirovannogo-investitsionnogo-portfelya>.
4. Soroka K. O. (2004), *Osnovy Teorii System I Systemnoho Analizu: Navchal'nyj Posibnyk*, [Online], KhNAMH, Kharkiv, Ukraine, available at: http://eprints.kname.edu.ua/10895/СисАнализ_1_8н.pdf.
6. MathWorks, "Econometrics Toolbox. Modelirovanie I Analiz Finansovyh I Jekonomicheskikh Sistem Statisticheskimi Metodami", available at: http://matlab.ru/products/econometrics-toolbox/econometrics-toolbox-rus_web.pdf.
7. Khabrov V.V. (2014), "Optimization of Portfolio Management Based On The Predictions of Assets Returns and The Covariance Matrix of Random Components Forecasts", [Online], Ph.D. Thesis, Control in social and economic systems (technical science), V.A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia, p. 33, available at: [www.hse.ru/data/2014/09/17/1314976698/АВТОРЕФЕРАТ_Хабров\(1\).pdf](http://www.hse.ru/data/2014/09/17/1314976698/АВТОРЕФЕРАТ_Хабров(1).pdf).
8. Fitim D. (2014), "Portfolio Composition: A Methodological Solution Using Lagrange Multiplier" / D. Fitim // South East European University, Macedonia, p. 13.
9. Benninga S. (1997), "Financial Modeling, Uses Excel" / S. Benninga // Cambridge: Massachusetts Institute of Technology Press, p. 68.
10. Bundo Sh. (2009), "Drejtim Portofoli" / Sh. Bundo // Tiranë: albPAPER, pp. 160–165.