УДК 517.95

Акимов Андрей Анатольевич
кандидат физико-математических наук,
Стерлитамакский филиал БашГУ
Агафонова Алена Александровна
студент,
Стерлитамакский филиал БашГУ

Akimov A. A.
Bashkir state university Sterlitamak branch
Agafonova A. A.
Bashkir state university Sterlitamak branch

ОБ ОДНОМ ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЭНЕРГЕТИЧЕСКИХ НЕРАВЕНСТВ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БАЛКИ

Аннотация. *В данной работе показано, что при определенных условиях на начальные данные, бесконечная связанная система обыкновенных дифференциальных уравнений с начальными условиями эквивалентная начально-граничной задаче для уравнения балки имеет решение. Методом энергетических неравенств доказывается, что обсуждаемая бесконечная система квазилинейных уравнений имеет решение. Полученных результатов достаточно, чтобы доказать существование решения начально-граничной задачи для уравнения балки.*
Ключевые слова: *уравнение колебания балки, квазилинейное уравнение, метод энергетических неравенств.*

Summary. *In this paper it is shown that under specified conditions on the initial data a certain infinite coupled system of ordinary differential equations has a solution satisfying an auxiliary convergence condition. The infinite system discussed is essentially the Galerkin expansion of the solution to a given quasi-linear e equation. The results obtained suffice to prove the existence of a solution to this equation of oscillations of a beam.*
Keywords: *quasi-linear wave equation, method of energy inequalities, equation of oscillations of a beam.*

1. Введение

Целью данной работы является доказательство существования решения для бесконечной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\ddot{T}_j + C_0 j^4 T_j + C_1 j \int_0^{\pi} \left(\sum_{i=1}^{\infty} i^3 T_i \cos ix \right)^3 \cos jx\, dx = 0, \quad j = 1,2,\ldots,\infty \quad (1.1)$$

где $(C_0 > 0, C_1 \geq 0)$ которые удовлетворяют начальным данным

$$T_j(0) = \alpha_j, \quad \overset{я}{T}_j(0) = \beta_j, \quad (1.2)$$

и дополнительному условию

$$\sum_{j=1}^{\infty} j^8 T_j^2 < \infty. \quad (1.3)$$

Бесконечная система (1.1) связана с квазилинейным уравнением

$$w_{tt} - \left(a_0 + a_1 w_{xxx}^2\right) w_{xxxx} = 0 \quad \left(a_0 > 0, a_1 \geq 0\right). \quad (1.4)$$

На самом деле, чтобы доказать существование решения задачи (1.1), удовлетворяющего (1.2) и (1.3), достаточно доказать существование классического решения (1.4), удовлетворяющего начальным данным

$$w(x,0) = f(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \sin jx, \quad (1.5a)$$

$$w_t(x,0) = g(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \beta_j \sin jx, \quad (1.5b)$$

и граничным условиям

$$w(0,t) = w(\pi,t) = w_{xx}(0,t) = w_{xx}(\pi,t) = 0. \quad (1.6)$$

В нашем случае достаточно заметить, что если уравнение (1.4) имеет достаточно дифференцируемое решение, удовлетворяющее граничным условиям (1.6), то это решение может быть записано в виде

$$w(x,t) = \sum_{j=1}^{\infty} T_j(t) \sin jx.$$

Систему уравнений (1.1) можно получить, формально подставив ряд Фурье в (1.4), умножив на sinjx и, проинтегрировав полученное выражение от 0 до π. Похожие результаты для более элементарных уравнений были получены ранее в работах [1], [2] также поставленные проблемы обсуждались в работах [3], [4] и [5]. Вопрос существования решений уравнения вида (1.4) рассматривался в [7], [8] и [9].

2. Существование

Для того, чтобы доказать существование решения (1.1) удобно начать с обсуждения соответствующих конечных систем уравнений. Определим функции $T_{j,N}$, как решения системы

$$\ddot{T}_{j,N} + C_0 j^2 T_{j,N} + C_i j \int_0^\pi \left(\sum_{i=1}^N i^3 T_{i,N} \cos ix \right)^3 \cos jx\, dx = 0 \quad (2.1)$$

при $j = 1,2,\ldots,N$ и $T_{i,N} \equiv 0$ для $j > N$.

Существование решения системы (2.1) следует из теоремы Пикара, так как правая часть удовлетворяет условию Липшица(постоянная Липшица зависит от N).

Поэтому можно использовать метод последовательных приближений для доказательства существования локального решения (см. [6]), а продолжение решения для всех $t \ge 0$ следует из того факта, что система (2.1) является Гамильтоновой системой, т.е. решения (2.1) удовлетворяют энергетическому тождеству.

$$\sum_{j=1}^N j^2 \dot{T}_{j,N}^2 + C_0 \sum_{j=1}^N j^4 T_{j,N}^2 + \frac{C_1}{2} \int_0^\pi \left(\sum_{j=1}^N j^3 T_{j,N} \cos jx \right)^4 dx = h_N, \quad (2.2)$$

$$h_N = \sum_{j=1}^N j^2 \beta_j^2 + C_0 \sum_{j=1}^N j^4 \alpha_j^2 + \frac{C_1}{2} \int_0^\pi \left(\sum_{i=1}^N i^3 \alpha_i \cos ix \right)^4 dx. \quad (2.3)$$

Указанная выше процедура не может быть применена непосредственно к бесконечной системе (1.1). Таким образом, необходимо показать, что решение конечной системы (2.1) сходится к решению бесконечной системы (1.1) при $N \to \infty$.

Если h_N сходится как $N \to \infty$, т.е. если

$$\lim_{N \to \infty} h_N = h < \infty, \quad (2.4)$$

то из (2.2) следует, что $\left|T_{j,N}\right|$ и $\left|\dot{T}_{j,N}\right|$ равномерно ограниченны независимо от N. Тогда, из леммы Арцела-Асколи (см. [6]) следует, что на любом замкнутом полуинтервале $0 \le t \le t^* < \infty$ (t^* достаточно большое) существует подпоследовательность $\left\{T_{j,N_i}\right\}$ которая сходится равномерно к непрерывной функции T_j на интервале $0 \le t \le t^*$. Для того, чтобы доказать, что функции T_j является решениями (1.1) необходимо получить более точные оценки для функций $T_{j,N}$ чем следует из их энергетических равенств (2.2). Необходимые оценки можно получить путем умножения (2.1) на $j^6 \dot{T}_{j,N}$ и суммированием по всем j. Результирующее выражение может быть записано в виде

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\sum_{j=1}^N j^6 \dot{T}_{j,N}^2 + C_0 \sum_{j=1}^\infty j^8 T_{j,N}^2 \right) + C_1 \left(w_{xxx}^{(N)} \right)^3, w_{xxxxxxxt}^{(N)} = 0, \quad (2.5)$$

$$w^{(N)} = \sum_{j=1}^N T_{j,N} \sin jx, \qquad \mu, \nu = \int_0^\pi \mu(x)\nu(x)\,dx. \quad (2.6)$$

После двух интегрирований по частям получим

$$\left(w_{xxx}^{(N)} \right)^3, w_{xxxxxxxt}^{(N)} = 6 w_{xxx}^{(N)} w_{xxxx}^{(N)^2}, w_{xxxxxt}^{(N)} + 3 w_{xxx}^{(N)^2} w_{xxxxx}^{(N)}, w_{xxxxxt}^{(N)} \quad (2.7)$$

Или

$$w_{xxx}^{(N)^3}, w_{xxxxxxxt}^{(N)} = \frac{3}{2}\left(d/dt \right) w_{xxx}^{(N)^2}, w_{xxxxx}^{(N)^2} - 3 w_{xxx}^{(N)} w_{xxxt}^{(N)}, w_{xxxxx}^{(N)^2}$$
$$+ 6 w_{xxx}^{(N)} w_{xxxx}^{(N)^2}, w_{xxxxxt}^{(N)}. \quad (2.8)$$

Уравнения (2.5) и (2.8) означают, что решения системы (2.1) удовлетворяют тождеству

$$\left(d/dt \right) E_n = 6 w_{xxx}^{(N)} w_{xxxt}^{(N)}, w_{xxxxx}^{(N)^2} - 12 w_{xxx}^{(N)} w_{xxxx}^{(N)^2}, w_{xxxxxt}^{(N)}, \quad (2.9)$$

$$E_n = \sum_{j=1}^N j^6 \dot{T}_{j,N}^2 + C_0 \sum_{j=1}^N j^8 T_{j,N}^2 +$$
$$+ 3C_1 \int_0^\pi \left(\sum_{j=1}^N j^3 T_{j,N} \cos jx \right)^2 \left(\sum_{j=1}^N j^5 T_{j,N} \cos jx \right)^2 dx =$$
$$= (2/\pi) w_{xxxt}^{(N)}, w_{xxxt}^{(N)} + (2C_0/\pi) w_{xxxx}^{(N)}, w_{xxxx}^{(N)} +$$
$$+ 3C_1 w_{xxx}^{(N)^2}, w_{xxxxx}^{(N)^2}. \quad (2.10)$$

Далее оценим правую часть (2.10) через интеграл энергии E_N. Отметим что, поскольку

$$w^{(N)}(0,t) = w^{(N)}(\pi,t) = w_{xx}^{(N)}(0,t) = w_{xx}^{(N)}(\pi,t) = 0,$$

то из теоремы Ролля следует существование точек $\zeta = \zeta(t)$ и $\eta = \eta(t)$ таких, что $w_x^{(N)}(\zeta,t) = 0$, $w_{xxx}^{(N)}(\eta,t) = 0$.

Поэтому

$$\left| w_{xxx}^{(N)} \right| \le \left| \int_\eta^x w_{xxxx}^{(N)} dx \right| \le \int_0^\pi \left| w_{xxxx}^{(N)} \right| dx \le \left(\pi \int_0^\pi w_{xxxx}^{(N)^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.11)$$

Кроме того $w_{xx}^{(N)}(0,t) = 0$ и $w_{xxxx}^{(N)}(0,t) = 0$, поэтому

$$\left| w_{xxxx}^{(N)} \right| = \left| \int_0^x w_{xxxxx}^{(N)} dx \right| \le \int_0^\pi \left| w_{xxxxx}^{(N)} \right| dx \le \left(\pi \int_0^\pi w_{xxxxx}^{(N)^2} dx \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.12)$$

Аналогичным образом легко показать, что

$$\left|w_{xxxt}^{(N)}\right| \le \left(\pi \int_0^\pi w_{xxxxt}^{(N)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \tag{2.13}$$

Неравенства (2.11), (2.12) и (2.13) дают точную оценку $w_x^{(N)}$, $w_{xx}^{(N)}$ и $w_{xt}^{(N)}$ через интеграл энергии E_n. Таким образом

$$\begin{aligned} &\left|w_{xxx}^{(N)}\right| \le \left(\pi^2 / \left(2C_0\right)^2\right) E_N^{\frac{1}{2}}, \\ &\left|w_{xxxx}^{(N)}\right| \le \left(\pi / \left(2C_0\right)^2\right) E_N^{\frac{1}{2}}, \\ &\left|w_{xxxt}^{(N)}\right| \le \left(\pi / \sqrt{2}\right) E_N^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Первый член в правой части (2.9) может быть оценен как

$$\left|w_{xxx}^{(N)} w_{xxxt}^{(N)}, w_{xxxxx}^{(N)^2}\right| \le \frac{\pi^3}{2C_0^{1/2}} E_N \int_0^\pi w_{xxxxx}^{(N)^2} dx \le \frac{\pi^4}{4C_0^{\frac{3}{2}}} E_N^2. \tag{2.15}$$

Второй член в правой части (2.9) после интегрирования по частям будет иметь оценку

$$\begin{aligned} &\left|w_{xxx}^{(N)} w_{xxxx}^{(N)^2}, w_{xxxxxt}^{(N)}\right| \le \frac{\pi^3}{\left(2C_0\right)^{\frac{3}{2}}} E_N^{\frac{3}{2}} \left(\pi \int_0^\pi w_{xxxxt}^{(N)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} + \\ &+\frac{\pi^3}{C_0} E_N \left(\int_0^\pi w_{xxxxx}^{(N)^2} dx \int_0^\pi w_{xxxxt}^{(N)^2} dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le \left(\pi^4 / 4C_0^{\frac{3}{2}}\right) E_N^2 + \left(\pi^4 / 2C_0^{\frac{3}{2}}\right) E_N^2. \end{aligned} \tag{2.16}$$

Учитывая неравенство (2.15) и (2.16) тождество (2.9) может быть заменено на следующее неравенство

$$\frac{dE_n}{dt} \le \left(21\pi^4 / 2C_0^{\frac{3}{2}}\right) E_N^2 \tag{2.17}$$

Неравенство (2.17) дает требуемую оценку E_N.

Лемма 1. Предположим

$$\lim_{N\to\infty} E_N(0) = \sum_{j=1}^\infty j^6 \beta_j^2 + C_0 \sum_{j=1}^\infty j^8 \alpha_j^2 +$$

$$+3C_1 \int_0^\pi \left(\sum_{j=1}^\infty j^3 \alpha_j \cos jx\right)^2 \left(\sum_{j=1}^\infty j^5 \alpha_j \cos jx\right)^2 dx < \infty, \tag{2.18}$$

т.е., что $E_N(0)$ сходится при $N \to \infty$. Тогда E_N равномерно ограничена независимо от N на любом сегменте $0 \le t \le t^* < t_c$ где

$$t_c = 2C_0^{\frac{3}{2}} / 21\pi^4 e. \tag{2.19}$$

Доказательство. Неравенство (2.20) эквивалентно

$$E_N(t) \le \frac{E_N(0)}{1 - \left(21\pi^4 / 2C_0^{\frac{3}{2}}\right) E_N(0) t} \tag{2.20}$$

$$0 \le t < 2C_0^{\frac{3}{2}} / 21\pi^4 E_N(0). \tag{2.21}$$

Лемма вытекает после взятия предела при $N \to \infty$. ч.т.д.

Оценка E_N является ключевым моментом в доказательстве того, что функции T_j т.е. пределы подпоследовательности $T_{j,N}$, являются решениями (1.1). На самом деле этот результат является следствием следующих двух лемм, которые мы приведем без доказательства:

Лемма 2. Если $e < \infty$ (см. (2.21)), то бесконечный ряд

$$\sum_{j=1}^\infty j^8 T_j^2 \tag{2.22}$$

сходится в промежутке $0 \le t \le t^* < t_c$.

Лемма 3. Если $e < \infty$, то функции $w^{(N_i)}$ и $w_x^{(N_i)}$ сходятся к w и w_x,

$$w = \sum_{j=1}^\infty T_j \sin jx, \tag{2.23}$$

при $N_i \to \infty$ для любого t в промежутке $0 \le t \le t^* < t_c$.

Теорема 1. Функции T_j это решения системы уравнений (1.1), удовлетворяющие начальным условиям (1.2) и условию (1.3) в интервале $\le t \le t^*$ если $e < \infty$.

Доказательство. Функции T_{j,N_i} удовлетворяют интегральному уравнению Вольтерра

$$\begin{aligned} T_{j,N_i} &= \alpha_j + \beta_j t - \int_0^t (t-\tau)\left\{C_0 j^4 T_{j,N_i} + C_1 j w_x^{(N_i)^3}, \cos jx\right\} d\tau = \\ &= \alpha_j + \beta_j t - G_j w_x^{(N_i)} \end{aligned} \tag{2.24}$$

для $j = 1, 2, \ldots, N_i$. Покажем, что функции T_j удовлетворяет аналогичному уравнению. Справедливы следующие оценки $\left(\textit{здесь } * = max_{0 \le t \le t^*} |*|\right)$

$$\begin{aligned} &\left|T_j - \alpha_j - \beta_j t + G_j w_x\right| = \left|T_j - T_{j,N_i} - G_j w_x^{(N_i)} + G_j w_x\right| \le \\ &\le T_j - T_{j,N_i} + C_0 j^2 t^* T_j - T_{j,N_i} + C_0 j^2 t^* w_x^{(N_i)^3} - w_x^3, \cos jx. \end{aligned} \tag{2.25}$$

Правая часть (2.25) стремится к нулю при $N_i \to \infty$. Поэтому T_j имеет вид

$$T_j = \alpha_j + \beta_j t - G_j w_x. \tag{2.26}$$

Дифференцируя последнее равенство, приходим к требуемому утверждению.

Список литературы

1. Сабитов К. Б. Колебания балки с заделанными концами / Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2015. Т. 19. № 2 (39). С. 311–324.

2. Сабитов К. Б. Начально-граничная задача для уравнения колебания балки / В сборнике: Математические методы и модели в строительстве, архитектуре и дизайне Самарский государственный архитектурно-строительный университет. Самара, 2015. С. 34–42.

3. Акимов А. А., Агафонова А. А. О нулях решений нелинейного уравнения колебания балки / Высшая школа. 2015. № 22. С. 44–46.

4. Акимов А. А., Абдуллина Р. И., Чернов И. Г. О некоторых оценках для нелинейного уравнения колебания балки / Журнал научных и прикладных исследований. 2015. № 12. С. 172–175.

5. Акимов А. А., Абдуллина Р. И. Об одном нелинейном уравнении затухающих колебаний балки / Журнал научных и прикладных исследований. 2015. № 11. С. 156–159.

6. Абдуллина Р. И., Акимов А. А. Об одной граничной задаче для уравнения колебания балки / Высшая школа. 2016. № 18. С. 60–63.

7. R. Narasimha, Non-linear vibrations of an elastic string, J. Sound. Vib. 8 (1968), 134–146.

8. S. Woinowsky-Krieger, The effect of axial force on the vibration of hinged bars, J. Appl. Mech. 17 (1950), 35–36.

9. R. W. Dickey, Free vibrations and dynamic buckling of the extensible beam, J. Math. Anal. Appl. 29 (1970), 443–454.

10. J. M. Ball, Initial boundary value problems for an extensible beam, J. Math. Anal.Appl. Volume 42, Issue 1, April 1973, Pages 61–90.