

Саликов Валентин Александрович*Канд. техн. наук, доцент кафедры АСОИ**Днепропетровский национальный университет**г. Днепропетровск, Украина*

АНАЛИЗ ВЛИЯНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ ВЫЧИСЛЕНИЯ СОБСТВЕННЫХ ВЕКТОРОВ НА КАЧЕСТВО ВЫБОРА МЕТОДОМ АНАЛИЗА ИЕРАРХИЙ

При осуществлении выбора по методу трёхуровневой иерархий на её нижнем уровне лицом, принимающим решение (ЛПР), формируется n матриц попарных сравнений альтернатив $A_1, A_2, \dots, A_j, \dots, A_n$ размерности $m \times m$ по каждому из n критериев среднего (2-ого) уровня иерархии. На этом уровне ЛПР формирует одну матрицу размерности $n \times n$, отображающую совокупность его предпочтений на множестве из n критериев. Результаты попарных сравнений оцениваются по шкале Вебера так, что образуются матрицы, обладающие свойством симметричности. Процедура иерархического выбора предполагает вычисление собственных векторов $\bar{x}$ и $\bar{x}_i (i = \overline{1, n})$ для всех полученных матриц, а также максимальных собственных чисел $\lambda_{\max}$ и $\lambda_i (i = \overline{1, n})$ этих матриц. При этом должны соблюдаться соотношения:

$$\overline{Ax} = \lambda_{\max} \bar{x}; \quad \overline{A_1 x_1} = \lambda_1 \bar{x}_1; \dots; \overline{A_i x_i} = \lambda_i \bar{x}_i; \dots; \overline{A_n x_n} = \lambda_n \bar{x}_n \quad (1)$$

В случае, если $\lambda_{\max} = n$ и $\lambda_i = m (i = \overline{1, n})$, то все матрицы A и A_i абсолютно согласованы по транзитивности предпочтений и можно вычислить вектор глобальных приоритетов $\bar{z}$:

$$\bar{z} = \begin{bmatrix} \overline{-T} & \overline{-T} & \dots & \overline{-T} \\ \bar{x}_1 & \bar{x}_2 & \dots & \bar{x}_n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \overline{-T} \\ \bar{x} \end{bmatrix} \quad (2)$$

Выполнив операцию $z_{\max} = \max(z_1, z_2, \dots, z_i, \dots, z_n)$ выбирают j -ую альтернативу, наилучшим образом удовлетворяющую ЛПР по совокупности его предпочтений.

Результатам выбора по (2) можно доверять, если все собственные векторы вычислены принципиально точно, например, по методу А. М. Данилевского [2]. Однако, представляет практический интерес возможность использования более простых, но приближенных алгоритмов вычисления собственных векторов матриц. Известны следующие приближенные методы вычисления компонента x_k собственного вектора $\bar{x}$ для матрицы $A = [a_{ki}]$ [1]:

1. Суммировать элементы каждой строки и нормализовать делением каждой суммы на сумму всех элементов; сумма полученных результатов равна единице:

$$x_k = \frac{\sum_{j=1}^n a_{kj}}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

2. Суммировать элементы каждого столбца и получить обратные величины этих сумм. Нормализовать их так, чтобы их сумма равнялась единице, разделить каждую обратную величину на сумму обратных величин:

$$x_k = \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_{ik} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_{ij}}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (4)$$

3. Разделить элементы каждого столбца на сумму элементов этого столбца (т.е. нормализовать столбец), затем сложить элементы каждой полученной строки и разделить эту сумму на число элементов строки. Это процесс усреднения по нормализованным столбцам:

$$x_k = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sum_{j=1}^n a_{ij}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (5)$$

4. Умножить n элементов каждой строки и извлечь корень n -ой степени. Нормализовать полученные числа:

$$x_k = \frac{\sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{kj}}}{\sum_{i=1}^n \sqrt[n]{\prod_{j=1}^n a_{ij}}}, \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (6)$$

Если исключить влияние на точность определения вектора глобальных приоритетов фактора, обусловленного степенью согласованности матриц A и A_i , то

единственным источником погрешностей $\Delta \bar{z} = |\bar{z} - z|$ вычисления вектора $\bar{z}$ станут ошибки вычисления собственных векторов $\bar{x}$ и $\bar{x}_i$ ($i = 1, n$) по формулам (3)–(6).

Очевидно, рассматриваемая задача не может быть решена в общем виде и требуется применить компьютерное моделирование. Особый интерес представляет случай слабо различимых альтернатив, когда $z_j \approx z_{j+1}$.

Для проведения численных расчетов следует решить вопрос о достаточной размерности матриц A и A_i , участвующих в процедуре выбора, и обеспечить абсолютную согласованность. Последнее условие можно выполнить, если на этапе формирования обратной симметричной матрицы $A = [a_{ij}]$ руководствоваться требованием транзитивности предпочтений:

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik} \quad (7)$$

т.е. по субъективным соображениям назначать по шкале «1–9» элементы a_{ij} и a_{ik} , но величину a_{jk} определять расчетным путем по (7). Как показано в [1], для такой матрицы $[a_{ij}]$ оценка согласованности ОС=0%.

По соображениям удобства демонстрации полученных данных для численного моделирования выбраны $n=6$ и $m=5$. Можно надеяться, что использованные для моделирования матрицы A и A_i ($i = 1, 5$) средней размерности не ограничивает общности полученных результатов.

Результаты численного анализа приведены ниже:

Эксперимент 1. Оценки согласованности:

ОС $\approx 40\%$, ОС $\approx 40\%$ ($i = 1, 5$)

Метод расчета $\bar{x}$	Вектор глобальных приоритетов $\bar{z}$
По формуле (3)	$\bar{z} = (0,615; 0,174; 0,175; 0,166; 0,156; 0,165)$
По формуле (4)	$\bar{z} = (0,159; 0,159; 0,168; 0,179; 0,167; 0,168)$
По формуле (5)	$\bar{z} = (0,166; 0,171; 0,170; 0,167; 0,159; 0,166)$
По формуле (6)	$\bar{z} = (0,164; 0,167; 0,170; 0,170; 0,163; 0,167)$
По формуле Данилевского	$\bar{z} = (0,162; 0,171; 0,177; 0,171; 0,157; 0,162)$

Эксперимент 2. Матрицы A и A_i сверх транзитивны (ОС $\approx 0\%$)

Расчеты по формулам (3)–(6) и методу Данилевского	$\bar{z} = (0,164; 0,167; 0,170; 0,171; 0,163; 0,167)$
---	--

Выводы:

1. При осуществлении процедуры выбора на рассогласованных матрицах расчеты по (3)–(6) могут приводить к различным результатам выбора. Особенно это существенно в случае слабо различимых альтернатив, когда $z_j \approx z_{j+1}$.

2. Результаты расчетов по (3)–(6) и методу Данилевского практически совпадают в случае использования сверх транзитивных матриц A и A_i . Это означает, что даже самый простой способ вычисления по (3) обеспечивает достоверный выбор.

Литература

1. Саати Т.Л. Принятие решений. Метод анализа иерархий. — М.: Радио и связь, 1993.
2. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. — М.: Наука, 1996.