УДК 517.946, 517.95

Абдикаликова Галия Амиргалиевна
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры фундаментальной и прикладной математики
Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова
Жумагазиев Амире Халиулы
магистрант
Актюбинский региональный государственный университет имени К. Жубанова

Abdikalikova G.A.
Candidate of Physical and Mathematical Sciences,
Associate Professor of Department Fundamental and Applied Mathematics
Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov
Zhumagaziyev A.H.
postgraduate student
Aktobe Regional State University named after K. Zhubanov

О МНОГОПЕРИОДИЧЕСКОМ РЕШЕНИИ ОДНОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

ON THE MULTIPERIODICAL SOLUTION OF ONE SYSTEM OF THE PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

Аннотация. *Исследуется периодическая краевая задача для системы уравнений в частных производных. Получены достаточные условия существования и единственности многопериодического решения рассматриваемой задачи.*
Ключевые слова: *краевая задача, разрешимость, многопериодичность, Фридрихс, гиперболическая система уравнений.*

Summary. *There is investigated periodical boundary value problem for the system of partial differential equation. Obtain the sufficient conditions of existence and uniqueness of the multiperiodical solution considered the problem.*
Keywords: *boundary value problem, solvability, multiperiodical, Friedrichs, hyperbolic system of the equations.*

Как известно, среди краевых задач наибольший интерес представляют задачи с нелокальными ограничениями, в которых условия связывают как характеристические, так и нехарактеристические точки рассматриваемой области. Одной из основных задач теории уравнений гиперболического типа является задача о разрешимости периодической краевой задачи. Многообразия возникающих вопросов, необходимых для выяснения свойств рассматриваемых задач, заставляет расширить круг применяемых методов исследования. Поэтому разработка новых эффективных методов исследования краевых задач и развитие итерационных методов на уравнения в частных производных актуальны как для расширения класса разрешимых нелокальных краевых задач, так и для применения математического аппарата к задачам практики. Вопросу существования, единственности решения и построения конструктивных методов исследования нелокальных краевых задач для некоторых классов уравнения с частными производными посвящены многочисленные работы авторов, отметим [1–2], где можно найти подробный обзор и библиографию по этим задачам. В статье [3] исследовано существование единственного решения в широком смысле периодической задачи для гиперболической системы уравнений в частных производных первого порядка, приведенной к каноническому виду. В монографии [4] исследован вопрос о существовании и единственности почти периодического решения нелинейных систем уравнений в частных производных первого порядка с одинаковой главной частью по Куранту.

На $\bar{\Omega}=\{(t,x): t\le x\le t+q, 0\le t\le T\}$, $T>0$, $q>0$ рассматривается нелокальная краевая задача для системы уравнений в частных производных

$$\frac{\partial u}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\frac{\partial u}{\partial x_k}=A(t,x)u+f(t,x),\ u\in R^n, \quad (1)$$

с условием

$$u(0,x)\big|_{x\in[0,q]}-u(T,x)\big|_{x\in[\mathrm{T},\mathrm{T}+q]}=0,\ x\in[0,q], \quad (2)$$

где $u(t,x)$ — искомый n — вектор-столбец; Φ_k — постоянные $(n\times n)$ — матрицы; симметрическая $(n\times n)$-матрица $A(t,x)$, n-вектор-функция $f(t,x)$ непрерывны по t и x на $\bar{\Omega}$, многопериодичны по t, x с вектор-периодом (θ,ω) и выполняется условие $A(t+p_0\theta,x+p\omega)=A(t,x)$, $f(t+p_0\theta,x+p\omega)=f(t,x)$, p_i — целые числа, $i=\overline{0,n}$, $p\omega=(p_1\omega_1,p_2\omega_2,...,p_n\omega_n)$ — n-вектор.

Введем пространство $C(\bar{\Omega},R^n)$ непрерывных по t и x функций $u:\bar{\Omega}\to R^n$ с нормой

$$\|u\|_0=\max_{(t,x)\in\bar{\Omega}}\|u(t,x)\|;$$

$$\|A\|=\max_{(t,x)\in\bar{\Omega}}\|A(t,x)\|=\max_{(t,x)\in\bar{\Omega}}\max_{i=\overline{1,n}}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t,x)|.$$

Предположим, что в системе уравнений (1) матрицы Φ_k являются постоянными и имеют вид

$$\Phi_k=diag\Big[\underbrace{b_k,...,b_k}_{m},\underbrace{s_k,...,s_k}_{l}\Big],\ b_k\ne s_k,\ m+l=n.$$

Введем операторы

$$D_1=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}b_k\frac{\partial}{\partial x_k},\ D_2=\frac{\partial}{\partial t}+\sum_{k=1}^{n}s_k\frac{\partial}{\partial x_k}$$

действующие на первые m и на последующие l координат искомой n — вектор-функций $u(t,x)$ и система (1) распадается на две подсистемы с различными дифференциальными операторами. Тогда задача (1)–(2) сводится к краевой задаче для гиперболической системы уравнений по Фридрихсу и в координатной форме имеет вид

$$D_1u_i=A_i(t,x)u_i+f_i(t,x),\ u_i\in R^n,\ i=\overline{1,m},$$
$$D_2u_j=A_j(t,x)u_j+f_j(t,x),\ u_j\in R^n,\ j=\overline{m+1,n}, \quad (3)$$

$$u_i(0,x)\big|_{x\in[0,q]}-u_i(T,x)\big|_{x\in[\mathrm{T},\mathrm{T}+q]}=0,\ x\in[0,q],\ i=\overline{1,m},$$
$$u_j(0,x)\big|_{x\in[0,q]}-u_j(T,x)\big|_{x\in[\mathrm{T},\mathrm{T}+q]}=0,\ x\in[0,q],\ j=\overline{m+1,n}. \quad (4)$$

Будем считать, что выполнены условия (Π), если: симметрические $(n\times n)$ — матрицы $A_i(t,x)$, $A_j(t,x)$ и n — вектор-функции $f_i(t,x)$, $f_j(t,x)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{m+1,n}$ непрерывны на $\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2$ и многопериодичны по t, x с вектор-периодом (θ,ω) и выполняется условие

$$A_i(t+p_0\theta,x+p\omega)=A_i(t,x),$$
$$A_j(t+p_0\theta,x+p\omega)=A_j(t,x)$$

и $f_i(t+p_0\theta,x+p\omega)=f_i(t,x)$, $f_j(t+p_0\theta,x+p\omega)=f_j(t,x)$,

где p_i — целые числа, $i=\overline{0,n}$, $p\omega=(p_1\omega_1,p_2\omega_2,...,p_n\omega_n)$ — n-вектор;

$$\bar{\Omega}_1=\{(t,x): bt\le x\le bt+q, 0\le t\le T\},$$
$$\bar{\Omega}_2=\{(t,x): st\le x\le st+q, 0\le t\le T\},\ T>0, q>0,$$

$b=(b_1,b_2,...,b_n)$, $s=(s_1,s_2,...,s_n)$ — n-векторы.

Целью работы является установление коэффициентных достаточных условий однозначной разрешимости в широком смысле краевой задачи (3)–(4) для гиперболической системы уравнения по Фридрихсу.

Определение 1. Непрерывная на $\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2$ функция

$$u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_m(t,x),u_{m+1}(t,x),...,u_n(t,x))$$

называется многопериодическим решением задачи для гиперболической системы уравнения по Фридрихсу (3) при условии (4) в широком смысле по Фридрихсу [5], если функция $u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_m(t,x),u_{m+1}(t,x),...,u_n(t,x))$ многопериодична по t и x, непрерывно дифференцируема по переменной t вдоль характеристики и удовлетворяет семейству обыкновенных дифференциальных уравнений и условию (4).

Определение 2. Краевая задача (3)–(4) называется однозначно разрешимой в широком смысле, если для любых

$$f(t,x)=(f_1(t,x),f_2(t,x),...,f_m(t,x),f_{m+1}(t,x),...,f_n(t,x))\in$$
$$\in C(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2,R^n)$$ она имеет единственное многопериодическое по t и x решение

$$u(t,x)=(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_m(t,x),u_{m+1}(t,x),...,u_n(t,x))\in$$
$$\in C(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2,R^n)$$ непрерывно дифференцируемое по переменной t вдоль характеристики.

Следуя идее [6, с. 261] краевую задачу (3)–(4) для гиперболической системы уравнения по Фридрихсу сводим в области $\bar{H}=\{(\xi,\tau): 0\le\xi\le q, 0\le\tau\le T\}$, $T>0$, $q>0$ к задаче семейства обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tau}=\tilde{A}_i(\tau,\xi)\tilde{u}_i+\tilde{f}_i(\tau,\xi),\ \tau\in[0,T],\ \tilde{u}_i\in R^n,\ i=\overline{1,m},$$
$$\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial\tau}=\tilde{A}_j(\tau,\xi)\tilde{u}_j+\tilde{f}_j(\tau,\xi),\ \tau\in[0,T],\ \tilde{u}_j\in R^n,\ j=\overline{m+1,n}, \quad (5)$$

$$\tilde{u}_i(0,\xi)-\tilde{u}_i(T,\xi)=0,\ \xi\in[0,q],\ i=\overline{1,m},$$
$$\tilde{u}_j(0,\xi)-\tilde{u}_j(T,\xi)=0,\ \xi\in[0,q],\ j=\overline{m+1,n}, \quad (6)$$

где $\tilde{u}_i(\tau,\xi)=u_i(\tau,b\tau+\xi)$, $\tilde{u}_j(\tau,\xi)=u_j(\tau,s\tau+\xi)$,
$\tilde{A}_i(\tau,\xi)=A_i(\tau,b\tau+\xi)$, $\tilde{A}_j(\tau,\xi)=A_j(\tau,s\tau+\xi)$,
$\tilde{f}_i(\tau,\xi)=f_i(\tau,b\tau+\xi)$, $\tilde{f}_j(\tau,\xi)=f_j(\tau,s\tau+\xi)$,
$i=\overline{1,m}$, $j=\overline{m+1,n}$.

Определение 3. Непрерывные функции $\tilde{u}_i(\tau,\xi)$, $i=\overline{1,m}$ и $\tilde{u}_j(\tau,\xi)$, $j=\overline{m+1,n}$ называются многопериодическим решением краевой задачи (5)–(6), если функции $\tilde{u}_i(\tau,\xi)\in C(\bar{H},R^n)$, $\tilde{u}_j(\tau,\xi)\in C(\bar{H},R^n)$ (θ,ω) — периодичны по τ,ξ и имеют непрерывные производные по переменной τ, а также удовлетворяют семейству обыкновенных дифференциальных уравнений (5), краевым условиям (6) при всех $(\tau,\xi)\in\bar{H}$.

Краевая задача (3)–(4) и задача (5)–(6) эквивалентны в следующем смысле: Если функции $u_i(t,x)$, $u_j(t,x)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{m+1,n}$ непрерывны по t и x в $C(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2,R^n)$, являются (θ,ω) — периодическим решением краевой задачи (3)–(4), то для гиперболической системы уравнения по Фридрихсу функции $u_i(\tau,b\tau+\xi)=\tilde{u}_i(\tau,\xi)$, $u_j(\tau,s\tau+\xi)=\tilde{u}_j(\tau,\xi)$ будут многопериодическим решением задачи (5)–(6) семейства обыкновенных дифференциальных уравнений, и наоборот, если непрерывные функции $\tilde{u}_i(\tau,\xi)$, $\tilde{u}_j(\tau,\xi)$, $i=\overline{1,m}$, $j=\overline{m+1,n}$ из $C(\bar{H},R^n)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений (5) и условию (6), то с учетом замены $\tau=t,\ \xi=x-bt$ и $\xi=x-st$ функции $\tilde{u}_i(t,x-bt)=u_i(t,x),\ \tilde{u}_j(t,x-st)=u_j(t,x),\ i=\overline{1,m}$, $j=\overline{m+1,n}$ — многопериодическое решение задачи (3)–(4) на $\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2$.

Пусть $\tilde{V}(\tau,\xi)=\left(\tilde{u}^1(\tau,\xi),...,\tilde{u}^m(\tau,\xi),\tilde{u}^{m+1}(\tau,\xi),...,\tilde{u}^n(\tau,\xi)\right)$ — фундаментальная матрица решений системы

$$\frac{\partial\tilde{u}_i}{\partial\tau}=\tilde{A}_i(\tau,\xi)\tilde{u}_i,\ \tau\in[0,T],\ \tilde{u}_i\in R^n,\ i=\overline{1,m},$$
$$\frac{\partial\tilde{u}_j}{\partial\tau}=\tilde{A}_j(\tau,\xi)\tilde{u}_j,\ \tau\in[0,T],\ \tilde{u}_j\in R^n,\ j=\overline{m+1,n}, \quad (7)$$

то матрица

$$\tilde{K}_i(\tau,s,\xi)=\tilde{V}_i(\tau,\xi)\cdot\tilde{V}_i^{-1}(s,\xi),\ \tilde{u}_i\in R^n,\ i=\overline{1,m},$$

$$\tilde{K}_j(\tau,s,\xi)=\tilde{V}_j(\tau,\xi)\cdot\tilde{V}_j^{-1}(s,\xi),\ \tilde{u}_j\in R^n,\ j=\overline{m+1,n}, \quad (8)$$

называется матрицей Коши.

Матрица вида (8) при $\tau=s$ обращается в единичную $(n\times n)$ — матрицу E. Такую матрицу называют матрицантом. Таким образом, матрицант есть нормированная при $\tau=s$ фундаментальная матрица решений.

Краевая задача (7), (6) допускает нетривиальное решение тогда и только тогда, когда

$$\Delta(0,T)=\det\left[\tilde{V}(0,\xi)-\tilde{V}(T,\xi)\right]=0.$$

Непосредственно можно показать, что $\tilde{V}(\tau,\xi)$ существует и единственно. Для этого строится решение

$$\left(\tilde{u}^1(\tau,\xi),...,\tilde{u}^m(\tau,\xi),\tilde{u}^{m+1}(\tau,\xi),...,\tilde{u}^n(\tau,\xi)\right)$$

системы (7), удовлетворяющее условие

$$\tilde{V}(0,\xi)-\tilde{V}(T,\xi)=E,$$

где $\tilde{V}(\tau,\xi)=\left(\tilde{u}^1(\tau,\xi),...,\tilde{u}^m(\tau,\xi),\tilde{u}^{m+1}(\tau,\xi),...,\tilde{u}^n(\tau,\xi)\right)$,
$\tilde{u}^i(\tau,\xi)=col(\tilde{u}_{1i},\tilde{u}_{2i},...,\tilde{u}_{ni})$, $i=\overline{1,m}$,
$\tilde{u}^j(\tau,\xi)=col(\tilde{u}_{1j},\tilde{u}_{2j},...,\tilde{u}_{nj})$, $j=\overline{m+1,n}$;
E — $(n\times n)$ — матрица.

Известно [4], что общее решение системы (5) можно представить в виде

$$\tilde{u}_i(\tau,\xi)=\tilde{V}_i(\tau,\xi)C_i^*(\tau)+\int_0^\tau\tilde{V}_i(\tau,\xi)\tilde{V}_i^{-1}(s,\xi)\tilde{f}_i(s,\xi)ds,$$
$$i=\overline{1,m}$$

$$\tilde{u}_j(\tau,\xi)=\tilde{V}_j(\tau,\xi)C_j^*(\tau)+\int_0^\tau\tilde{V}_j(\tau,\xi)\tilde{V}_j^{-1}(s,\xi)\tilde{f}_j(s,\xi)ds,$$
$$j=\overline{m+1,n} \quad (9)$$

где $C_i^*(\tau)$, $C_j^*(\tau)$ — неизвестные вектор-функции.

Отметим, что при выполнении условии $\left\|\tilde{V}(T,\xi)\right\|<\sigma<1$ существует единственное решение уравнения (5), определяемое в виде

$$\tilde{u}_i^*(\tau,\xi)=\int_0^T G_i(\tau,s,\xi)\tilde{f}_i(s,\xi)ds,\ i=\overline{1,m},$$
$$\tilde{u}_j^*(\tau,\xi)=\int_0^T G_j(\tau,s,\xi)\tilde{f}_j(s,\xi)ds,\ j=\overline{m+1,n}, \quad (10)$$

где

$$G_i(\tau,s,\xi)=\begin{cases}\tilde{V}_i(\tau,\xi)K_i(T,s,\xi), & 0\le\tau\le s\le T,\\ \tilde{V}_i(\tau,\xi)K_i(T,s,\xi)+K_i(\tau,s,\xi), & 0\le s\le\tau\le T\end{cases}$$

$$G_j(\tau,s,\xi)=\begin{cases}\tilde{V}_j(\tau,\xi)K_j(T,s,\xi), & 0\le\tau\le s\le T,\\ \tilde{V}_j(\tau,\xi)K_j(T,s,\xi)+K_j(\tau,s,\xi), & 0\le s\le\tau\le T\end{cases}$$

Результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 1. *Если выполнены условия (Π), то краевая задача (5)–(6) для семейства обыкновенных дифференциальных уравнений имеет единственное многопериодическое решение по t и x в широком смысле, представимое в виде (10).*

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1. Тогда задача (3)–(4) имеет единственное (θ,ω) — периодическое решение $u^*(t,x)$.*

Из теоремы 1 вытекает, что задача (5)–(6) однозначно разрешима.

Так как задача (5)–(6) эквивалентна задаче (3)–(4), то получим, что задача (3)–(4) имеет единственное многопериодическое решение $u^*(t,x)$.

Если дополнительно предположить относительно входных данных и построенного решения в широком смысле непрерывной дифференцируемости по переменным t и x, то функция

$$u(t,x)=\left(u_1(t,x),u_2(t,x),...,u_m(t,x),u_{m+1}(t,x),...,u_n(t,x)\right)\in$$

$\in C(\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2,R^n)$, обладающая непрерывными частными производными $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial u}{\partial x}$, удовлетворяющая уравнению (3) при всех $(x,t)\in\bar{\Omega}_1\times\bar{\Omega}_2$ с условиями (4) является и классическим решением краевой задачи (3)–(4).

Литература

1. Нахушев А.М. Задачи со смещением для уравнений в частных производных. — М.: Наука. — 2006. — 287 с.

2. Cesari L. A boundary value problem for quasilinear hyperbolic system / L. Cesari // Riv. math. Univ. Parma. — 1974. — Vol.3. — № 2. — Pp.107–131.

3. Жестков С.В. О построении многопериодических решений полулинейных гиперболических систем уравнений в частных производных с помощью характеристик / С.В. Жестков // Дифференциальные уравнения. — 1984. — Т. 20. — № 9. — С. 1630–1632.

4. Умбетжанов Д.У. Почти периодические решения эволюционных уравнений. — Алма-Ата: Наука. — 1990. — 184 с.

5. Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука. — 1968. — 592 с.

6. Абдикаликова Г.А. О корректной разрешимости одной линейной краевой задачи / Г.А. Абдикаликова // Вестник Оренбургского государственного университета. — 2006. — № 9 (59). — С. 261–264.