

Светлова Елена Костянтинівна

студентка

Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

Светлова Елена Константиновна

студентка

Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

Svietlova O. K.

student

National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»

**ГЕНЕРАТОР ПСЕВДОВИПАДКОВИХ ЧИСЕЛ
ДЛЯ МОДЕЛЮВАННЯ ДОСЛІДУ ШТЕРНА
ГЕНЕРАТОР ПСЕВДОСЛУЧАЙНЫХ ЧИСЕЛ
ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ ОПЫТА ШТЕРНА
THE PSEUDORANDOM NUMBER GENERATOR
FOR SIMULATION STERN EXPERIMENT**

Анотація. Проведено чисельний експеримент з моделювання досліду Штерна з використанням MathCAD.

Ключові слова: досвід Штерна, броунівський рух, псевдовипадковий генератор, моделювання, MathCAD.

Аннотация. Проведено численный эксперимент, моделирующий опыт Штерна с использованием MathCAD.

Ключевые слова: опыт Штерна, броуновское движение, псевдослучайный генератор, моделирование, MathCAD.

Summary. A numerical experiment, simulating Stern experiment was carried out using MathCAD.

Keywords: Stern experiment, Brownian motion, the pseudo-random generator, modeling, MathCAD.

Идея данного исследования появилась в момент решения совсем другой задачи, связанной с теорией погрешностей. Задача заключалась в том, чтобы оценить площадь поверхности шарика, зная, что измерения случайной величины — радиуса шарика — дали результат $R_0 \pm \Delta R$. В результате моделирования этой задачи в Mathcad с помощью встроенных генераторов псевдослучайных чисел было обнаружено, что *характерные значения* этих распределений (среднее, наиболее вероятное) *не связаны* соотношением $S = 4\pi R^2$.

Речь идёт о распределении молекул газа по скоростям (распределение Максвелла). Вывод закона этого распределения выходит за рамки школьной программы, однако в учебниках приводится описание экспериментальной проверки этого закона (опыт Штерна). Наше внимание привлекло то, что распределение осевших на внешнем цилиндре молекул по *координате* слишком напоминает распределение молекул по *скоростям* [1, с. 14–15].

Таким образом, целью нашего исследования стало моделирование опыта Штерна в среде Mathcad и сравнение его результатов с распределением Максвелла.

**Анализ существующих программ,
иллюстрирующих опыт Штерна**

Прежде чем начать моделировать Опыт Штерна с помощью компьютера, мы решили изучить уже существующие программы по этой теме. Рассмотрим наиболее популярные из них:

На сайте files.school-collection.edu.ru есть интересная анимированная модель опыта Штерна [2]. Общий вид страницы представлен на рис. 1.

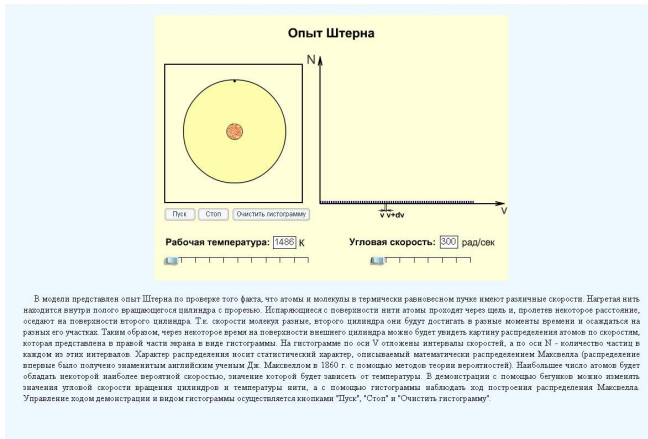


Рисунок 1. Общий вид страницы, иллюстрирующей опыт Штерна

Однако, после прочтения сопутствующего текста возникают сомнения в том, что гистограмма в правой части каким-либо образом отражает профиль молекул, осевших на поверхности цилиндра. Складывается впечатление, что она просто-напросто строится с помощью генератора случайных чисел по Максвеллу.

Ещё одну анимированную модель мы встретили на ресурсе [3]. Её внешний вид представлен на рис. 2.

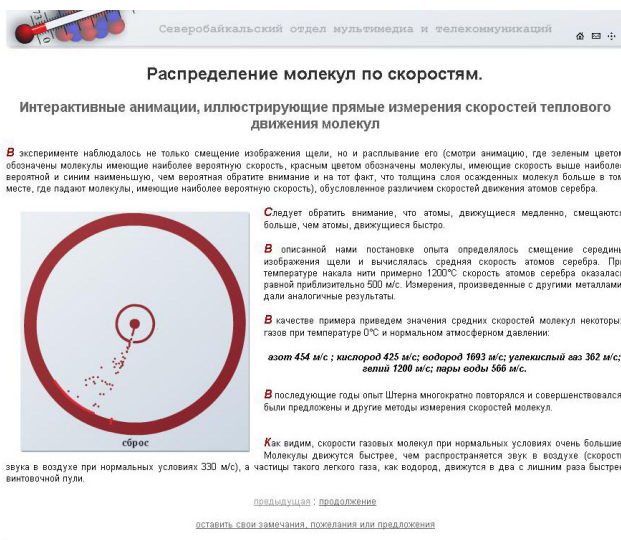


Рисунок 2. Общий вид страницы, иллюстрирующей опыт Штерна

На ней хорошо показано различие скоростей молекул, место, где они оседают в конце, но непонятно как именно будет выглядеть образовавшийся слой молекул. И уж совсем странным выглядит словосочетание «прямые измерения скоростей теплового движения молекул» в заголовке, потому как никакого прибора, непосредственно регистрирующего скорость молекул в опыте Штерна нет.

Всё это подтолкнуло нас к более детальному изучению теоретических основ опыта Штерна.

Моделирование опыта Штерна

Для проведения численного эксперимента были выбраны такие значения параметров, которые указаны для опыта Штерна. Масса атома серебра, температура спирали (а соответственно и вылетающих молекул), и постоянная Больцмана указаны в СИ:

$$m_{Ag} := 1.794 \cdot 10^{-25}$$

$$T_{coil} := 1500$$

$$k_{Boltzman} := 1.38 \cdot 10^{-23}$$

Вначале было сгенерировано $N = 5000$ случайных чисел, которые симулируют значения модуля скорости отдельной молекулы после вылета из щели (см. пункт 2.1). Эти значения были получены с помощью метода обратного преобразования, который был реализован следующим образом:

$$Number := 10000$$

$$i := 0.. Number - 1$$

$$Velocity := \begin{cases} v \leftarrow 500 \\ \text{for } i \in 0.. Number - 1 \\ \quad r_i \leftarrow \text{runif}(1, 0, 1) \\ \quad M_i \leftarrow \text{root}(F_AfterSlit(v) - r_i, v) \\ \quad M \end{cases}$$

Здесь r_i — случайные числа, равномерно распределенные на отрезке $[0;1]$, функция $root$ численно решает уравнение $F_AfterSlit(v) - r_i = 0$. В результате получаем вектор-столбец со значениями скорости.

Для проверки работы генератора по полученным значениям была построена гистограмма (рис. 3). На рис. 3 также изображен маркер, соответствующий наиболее вероятной скорости для распределения Максвелла. Видно, что она не соответствует наиболее вероятной скорости вылетевших молекул.

Для перехода к координатам осевших молекул возьмем радиус внешнего цилиндра и угловую скорость системы цилиндров как в опыте Штерна (величины заданы в СИ):

$$Radius := 0.015$$

$$\omega := 2500$$

По уже сгенерированным значениям скоростей пересчитываем значения координаты места, в котором будет оседать та или иная молекула, и по полученным значениям координаты строим гистограмму (рис. 4). Сплошной линией изображена теоретически рассчитанная кривая $p(l)$.

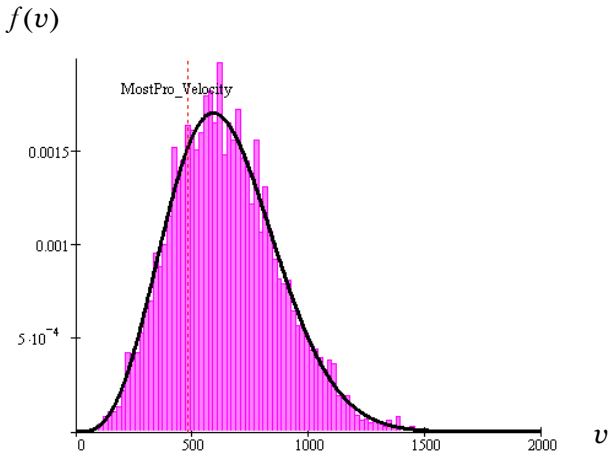


Рисунок 3. Гистограмма для скорости вылетевших молекул

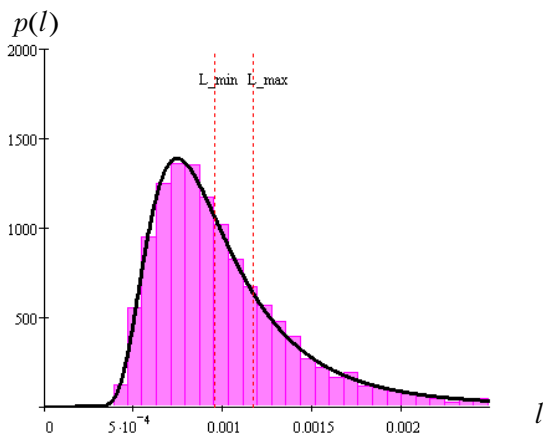


Рисунок 4. Гистограмма для координаты осевших молекул

Перспективы развития

По итогам проведенного исследования можно определить дальнейшие перспективные направления его развития.

Во-первых, можно продолжить исследование в сторону создания *динамического симулятора* опыта Штерна. Хотелось бы увидеть развернутую во времени согласованную динамику изменений гистограммы оседания молекул на поверхности внешнего цилиндра и гистограммы распределения вылетающих молекул по скоростям.

Во-вторых, можно развивать дальше рассмотренную идею создания *генератора псевдослучайных чисел с наперед заданным законом распределения* (метод обратного преобразования). Такой генератор будет полезен при изучении и демонстрации законов теории вероятностей и математической статистики.

Выводы

Проведенное исследование позволяет сделать следующие выводы:

1. На конкретном примере было показано «смещение» наиболее вероятного значения при переходе от распределения одной случайной величины к другой (если эти величины связаны функциональной зависимостью).

2. Были созданы генераторы псевдослучайных чисел с наперед заданными распределениями:

а) распределение Максвелла

$$f(v) = 4\pi v^2 \left(\frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right),$$

б) распределение молекул по энергиям

$$g(E) = \frac{2\pi \cdot \sqrt{E}}{(\pi kT)^{3/2}} \cdot e^{-\frac{E}{kT}},$$

в) распределение молекул после вылета из щели

$$f(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{m}{kT} \right)^2 v^3 \cdot \exp\left(-\frac{mv^2}{2kT} \right),$$

г) распределение осевших молекул по координате (в опыте Штерна)

$$p(l) = \frac{\omega R^2}{2} \cdot \left(\frac{m}{kT} \right)^2 \cdot \frac{\exp\left(-\frac{m\omega^2 R^4}{2kT l^2} \right)}{l^5}.$$

3. Был проведен численный эксперимент, моделирующий опыт Штерна на компьютере и показано, что наиболее вероятное значение координаты не соответствует ни одной из характерных скоростей распределения Максвелла, если пользоваться формулой связи для отдельно взятой молекулы.

Литература

1. Вентцель Е. С. Теория вероятностей: Учебник для студентов Вузов / Е. С. Вентцель. — М.: Мир, 1969. — 576 с.
2. Молекулярная физика — Режим доступа: <http://files.school-collection.edu.ru/dlrstore/d4204a73-7eb4-4f97-91c3-ac19453f933a/molek1.htm> — Дата доступа: 07.05.2016.
3. Распределение молекул по скоростям — Режим доступа: http://somit.ru/mkt/skorosti2_0.htm — Дата доступа: 05.05.2016.