УДК 51-76

Погрібний Євген Олександрович
студент ННК «ІПСА»,
НТУУ «КПІ»
Погребной Евгений Александрович
студент УНК «ИПСА»,
НТУУ «КПИ»
Yevgen Pogribnyi
student of ESC «IASA»,
NTUU «KPI»

МОДЕЛЮВАННЯ ТА АНАЛІЗ ВЗАЄМОДІЇ БІОЛОГІЧНИХ ПОПУЛЯЦІЙ СКЛАДНОЇ СТРУКТУРИ

МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ БИОЛОГИЧЕСКИХ ПОПУЛЯЦИЙ СЛОЖНОЙ СТРУКТУРЫ

MODELLING AND ANALYSIS OF INTERACTING POPULATIONS WITH COMPLEX STRUCTURE

Анотація. *Представлено теоретичні основи математичного моделювання біологічних систем з декількома конкуруючими видами. Побудовано точкову модель взаємодії трьох популяцій та досліджено її аналітичними методами.*

Ключові слова: *взаємодія популяцій, модель «хижак-жертва», математичне моделювання.*

Аннотация. *Представлены теоретические основы математического моделирования биологических систем с несколькими конкурирующими видами. Построена точечная модель взаимодействия трех популяций и проведено ее исследование аналитическими методами.*

Ключевые слова: *взаимодействие популяций, модель «хищник-жертва», математическое моделирование.*

Abstract. *Was introduced the theoretical basis for mathematical modelling of biological systems with several competing populations. Mathematical model of biological environment with 3 competing species was build and analyzed.*

Keywords: *interaction of populations, «predator-prey» model, mathematical modelling.*

Вступ

В даний час завдання екології мають першорядне значення. Важливим етапом вирішення цих завдань є розробка математичних моделей екологічних систем.

Одним з основних завдань екології на сучасному етапі є вивчення структури і функціонування природних систем, пошук загальних закономірностей. На різних рівнях розвитку живої матерії продукційні процеси проявляють себе по-різному, але їх феноменологічний опис завжди включає народження, зростання, взаємодія з зовнішнім середовищем, у тому числі з іншими особинами свого виду або інших видів, смерть особин. Саме ця обставина дозволяє застосовувати подібний математичний апарат для опису моделей росту та розвитку у таких, здавалося б, віддалених один від одного по сходах рівнів організації живої матерії, як клітинна популяція і спільнота видів в екосистемі.

Опис змін чисельності популяції в часі становить предмет популяційної динаміки. Популяційна динаміка є частиною біології математичної, найбільш просунутою в сенсі формального математичного апарату, свого роду «математичним полігоном» для перевірки теоретичних ідей і уявлень про закони росту і еволюції біологічних видів, популяцій, спільнот. Можливість опису популяцій різної біологічної природи однаковими математичними співвідношеннями обумовлена тим, що з динамічною точки зору, ріст і відбір організмів у процесі еволюції відбувається за принципом «кінетичного досконалості».

Знайдені закономірності можуть в подальшому бути використані для збереження вимираючих біологічних видів та для збереження біологічного балансу на нашій планеті, що є однією з найважливіших цілей сталого розвитку.

Метою дослідження була побудова та дослідження математичних моделей співіснування декількох популяцій. Головним завданням була побудова математичної моделі що враховувала б не тільки взаємодії між популяціями але і інші фактори що впливають на їх чисельність, такі як існування в середовищі з обмеженими ресурсами, внутрішньовидова конкуренція, наявність просторової структури і, за можливості, інших.

Побудова математичної моделі

Будемо вважати що умови розвитку та взаємодії популяцій аналогічні до тих, що використовуються в моделі Лотки-Вольтера, тобто зміна чисельності кожної популяції пропорційна до її поточної чисельності, кількість особів виду, що біло знищено іншим видом, приріст особів другого виду внаслідок цього процесу не залежить від особів третього виду.

Природно припустити, що нехтовно слабка конкуренція хижаків за жертву реалізується при прагненні до нуля щільності популяції хижака, а гранично гостра конкуренція — при необмежено зростаючої його популяції.

Такі відносини можна описати системою рівнянь:

$$\begin{cases} \dfrac{dN_1}{dt} = N_1\left(\alpha_1 - \beta_1 N_2 - \gamma_1 N_3\right) \\ \dfrac{dN_2}{dt} = N_2\left(-\alpha_2 + \beta_2 N_1 - \gamma_2 N_3\right) \\ \dfrac{dN_3}{dt} = N_3\left(-\alpha_3 + \beta_3 N_1 + \gamma_3 N_2\right) \end{cases}$$

де N_i — чисельність популяції;

α_i — коефіцієнти природного приросту (або смертності) популяції;

β_i та γ_i — коефіцієнти міжвидового взаємодії.

Отже маємо математичну модель, задану системою диференційних рівнянь. Далі для зручності будемо розглядати її у вигляді $\vec{x}' = f(\vec{x})$, де

$$\vec{f}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\left(\alpha_1 - \beta_1 y - \gamma_1 z\right) \\ y\left(-\alpha_2 + \beta_2 x - \gamma_2 z\right) \\ z\left(-\alpha_3 + \beta_3 x + \gamma_3 y\right) \end{pmatrix}.$$

Пошук стаціонарних точок моделі

На першому етапі дослідження знайдемо такі початкові кількості популяцій $\vec{x}_0$, за яких стан системи у часі взагалі не буде змінюватися.

Відтак $\vec{x}(t) = \vec{x}_0$ звідки маємо $\vec{x}'(t) = 0$ та $f(\vec{x}) = 0$. Розв'язавши отримаємо

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = 0 \\ z_0 = 0 \end{cases} \qquad (1)$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha_2}{\beta_2} \\ y_0 = \dfrac{\alpha_1}{\beta_1} \\ z_0 = 0 \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha_3}{\beta_3} \\ y_0 = 0 \\ z_0 = \dfrac{\alpha_1}{\gamma_1} \end{cases} \qquad (3)$$

$$\begin{cases} x_0 = 0 \\ y_0 = \dfrac{\alpha_3}{\gamma_3} \\ z_0 = -\dfrac{\alpha_2}{\gamma_2} \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} x_0 = \dfrac{\alpha_3\beta_1\gamma_2 - \left(\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2\right)\gamma_3}{\beta_1\beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_3} \\ y_0 = \dfrac{-\alpha_3\beta_2\gamma_1 + \left(\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2\right)\beta_3}{\beta_1\beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_3} \\ z_0 = \dfrac{-\alpha_3\beta_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_3\beta_2 + \alpha_2\beta_1\beta_3}{\beta_1\beta_3\gamma_2 - \beta_2\gamma_1\gamma_3} \end{cases} \qquad (5)$$

Для того щоб точка рівноваги була коректною необхідно щоб виконувалось наступне

$$\begin{cases} x_0 \ge 0 \\ y_0 \ge 0 \\ z_0 \ge 0 \end{cases}$$

Вочевидь ця умова виконується для розв'язків (1)–(3) ця умова виконується, для розв'язку (4) вона не виконується, а для розв'язку (5) вона може як виконуватись так і не виконуватись в залежності від конкретних значень коефіцієнтів.

Якісний аналіз стаціонарних точок

Стійкість розв'язків лінійних систем з постійними коефіцієнтами можна оцінювати за критерієм Ляпунова. Він полягає у наступному: лінійна система з постійними коефіцієнтами є асимптотично стійкою, якщо усі власні числа її матриці λ_i мають від'ємну дійсну частину. Якщо ж в матриці системи є такі власні числа що мають дійсну частину, причому кожному з таких чисел відповідає клітина Жордана розміром 1, а всі інші власні числа мають від'ємні дійсні частини то така система є стійкою, але не асимптотично стійкою. В усіх інших випадках система не є стійкою.

Оскільки досліджувана система не є лінійною, то застосувати цей критерій до безпосередньо до неї неможливо. Для вирішення цієї задачі в околі кожної стаціонарної точки наблизимо досліджувану систему деякою лінійною системою, та застосуємо критерій до неї.

Лінійну систему знайдемо а допомогою процедур лінеаризації.

У відсутності хижака отримаємо

$$\begin{gathered}\lambda_1 = -i\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2} \\ \lambda_2 = i\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_2} \\ \lambda_3 = \frac{-\alpha_3\beta_1\beta_2 + \alpha_1\gamma_3\beta_2 + \alpha_2\beta_1\beta_3}{\beta_1\beta_2}\end{gathered}.$$

У відсутності консумента

$$\begin{gathered}\lambda_1 = -i\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_3} \\ \lambda_2 = i\sqrt{\alpha_1}\sqrt{\alpha_3} \\ \lambda_3 = \frac{-\alpha_2\beta_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_3\gamma_1 + \alpha_1\beta_3\gamma_2}{\beta_1\gamma_3}\end{gathered}.$$

Для варіанту з присутністю усіх трьох видів знайти власні числа в аналітичному вигляді не є можливим. Цей випадок є сенс розглядати лише чисельними методами.

Список використаних джерел

1. Еіос А. Р. Біологія навколишнього середовища. Проблеми і рішення. / С. Е. Р. Бейлі — М.: Колос, 1997. — 184 с.

2. Баутін М. М. Історія розвитку екології [Електронний ресурс] — Режим доступу: http://www.ecoindustry.ru/showselectednumber/docs/viewdochtml-&id=654

3. Леонтович Е. А. Методи і прийоми якісного дослідження динамічних систем на площині. — Москва: «Наука», 1990. — 486 с.

4. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — М.: Институт компьютерных исследований, 2003. — 368 с.