ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.95

Бабаханова Севда Шахы
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры «Математика»
Государственный экономический университет Азербайджана
Babakhanova Sevda
Candidate of Physical-Mathematical Science,
Docent of the Department of Mathematics
State Economy University of Azerbaijan

ОБ ОДНОМ РАЗЛОЖЕНИИ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ СЕМЕЙСТВА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ON AN EXPANSION IN EIGENFUNCTIONS OF A FAMILY OF DIFFERENTIAL OPERATORS

Аннотация. *В статье рассматривается сопряженное семейство операторов и доказывается конечность, числа их собственных значении.*

Ключевые слова: *спектр семейства операторов, полиномы, мероморфные функции, формула Лагранжа, скалярное произведение элементов.*

Summary. *The conjugate family of operators is considered in the paper and the finiteness, the numbers of their eigenvalues are proved.*

Key words: *spectrum of a family of operators, polynomials, meromorphic functions, Lagrange formula, scalar product of elements.*

1. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l_\lambda(y) = y^{(2n)} + P_2(x,\lambda)y^{(2n-2)} + P_3(x,\lambda)y^{(2n-3)} + \ldots + +[P_{2n}(x,\lambda)+\lambda^{2n}]y \qquad (1.1)$$

где $P_k(x,\lambda)$, $k=\overline{2,2n}$ комплексны значение функции, суммируемые по x на $[0,\infty)$ и полиномы по λ степени $k-1$

$$P_k(x,\lambda) = \lambda^{k-1}P_{k1}(x) + \ldots + P_{kk}(x).$$

Разобьем комплексную λ — плоскость на $2n$ равных секторов $\int_m$ таких, что

$$\frac{(m-1)\pi}{n} < \arg\lambda < \frac{m\pi}{n}, \quad m=\overline{1,2n}$$

Каждый из S_m снова разделим на 2 равных сектора $S_m^{'}$ и $S_m^{''}$.

Обозначим лучи, ограничивающие сектор S_m через M_m и M_{m+1}, а через T_m — его биссектрису.

Обозначим через $D_m^{'}(D_m^{''})$ совокупность функций, интегрируемых в квадрате по x на $[0,\infty)$ при каждом $\lambda \in S_m^{'}(S_m^{''})$ удовлетворяющих следующим условиям:

1) $\overset{(\nu)}{y}(x,\lambda)$, $\nu=\overline{0,2n-1}$ существуют и абсолютно непрерывны по x в каждом конечном интервале $[0,\, b]$ $b>0$ для всех $\lambda\in S_m^{'}(S_m^{''})$

2) $l_\lambda(y)\in L_2(0,\infty)$

Пусть заданы краевые условия.

$$U_\nu(y) = \sum_{j=0}^{2n-1} d_{\nu j}(\lambda)\overset{(j)}{y}(0,\lambda) - \int_0^\infty K_\nu(x)y(x,\lambda)dx = 0 \quad \nu\in\overline{1,n} \qquad (1.2)$$

где $L_{\nu k}(\lambda)$ — мероморфные функции комплексного переменного λ такие, что при $|\lambda|\to\infty$

$$L_{\nu k}(\lambda) = L_P^{\nu k}\lambda^P\left[1+0\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] \qquad (1.3)$$

P — натуральное число или ноль. Формы $U_\nu(y)$, $\nu\in\overline{1,n}$ линейно независимы.

Пусть λ_0 — фиксированное значение параметра λ, являющееся регулярной точкой всех функции $\lambda_{\nu k}(\lambda)$ одновременно.

Обозначим через $D_{Lm}^{'}(\lambda_0)\left(D_{Lm}^{''}(\lambda_0)\right)$ — совокупность всех функции $y(x,\lambda)\in D_{Lm}^{'}(D_{Lm}^{''})$, удовлетворяющих (1.2) при $\lambda=\lambda_0$.

Определим теперь оператор $L(\lambda_0)$: его область определения есть $D'_{Lm}(\lambda_0)\left(D''_{Lm}(\lambda_0)\right)$, причем при $y \in D'_m(\lambda_0)\left(D''_m(\lambda_0)\right)$

$$L(\lambda_0) = l_{\lambda_0}(y)$$

Пусть теперь λ — комплексный параметр, пробегающий регулярные точки всех функции $L_{\nu k}(\lambda)$. Тогда мы получим семейство операторов $L(\lambda)$ с областью определения $D'_{Lm}(\lambda)[D''_{Lm}(\lambda)]$ и при $y \in D'_{Lm}(\lambda)[D''_{Lm}(\lambda)]$

$$L(\lambda)y = l_\lambda(y)$$

Рассуждая также, как и в [7], докажем следующее предложение.

ТЕОРЕМА 1.1. Если ранг формы $U_{\nu}(y) = 0$ равен n, то области определения $D'_{Lm}(\lambda)[D''_{Lm}(\lambda)]$ оператора плотны в $L_2(0,\infty)$.

2. Сейчас займемся описанием спектра семейства операторов.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Функцию $y(x)$ назовем собственной функцией семейства $L(\lambda)$, если существует такое число $\lambda = \lambda_j$, что при $y(x) \in D_L(\lambda_j)$

$$L(\lambda_j)y = 0$$

Число $\lambda = \lambda_j$ назовем собственным значением семейства операторов.

Пусть $y_S(x,\lambda)$, $S = \overline{1,n}$ решения, построенные в [3].

Обозначим через

$$A(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & \dots & U_1(y_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ U_n(y_1) & \dots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

Тогда уравнение для нахождения собственных значений семейства операторов $L(\lambda)$ имеет вид

$$A(\lambda) = 0$$

Пусть выполняются условия

$$\left|P_{ki}(x)\right| \le ce^{-\varepsilon x}, \quad i \le k \tag{2.2}$$

$c = \text{const}$ для всех $x \in [0,\infty)$

Пусть при $\lambda \in T_m$, $m = \overline{1,2n}$,

$$n = 2l(\lambda \in M_m, M_{m+1}, m = \overline{1,2n}, n = 2l+1)$$

$$A(\lambda) \ne 0 \tag{2.3}$$

ТЕОРЕМА 1.1. Пусть выполняются условия (2.2) и (2.3), а $K_i(x) \in L_1(0,\infty) \cap L_2(0,\infty)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда множество собственных значений оператора $L(\lambda)$ конечно для $\lambda \in S'_m(S''_m)$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Так же, как и в [3], легко доказывается конечность числа собственных значений семейства операторов $L(\lambda)$ на границах секторов $S'_m(S''_m)$.

Пусть $L(\lambda_0)$ — оператор с областью определения $D'_{Lm}(\lambda_0)$ либо $D''_{Lm}(\lambda_0)$ в зависимости от того точка λ_0 принадлежит сектору S'_m, либо S''_m.

Сопряженным дифференциальным выражением к (1.1) будет выражение вида

$$l^*_\lambda(z) = [l_\lambda(z)]^* = z^{(2n)} + \overline{(P_2(x,\lambda)z)}^{2n-2} - \overline{(P_3(x,\lambda)z)}^{2n-3} + \ldots + \overline{+(P_{2n}(x,\lambda)+\lambda^{2n})}z \tag{2.4}$$

Обозначим через $\overline{D}'_m(\overline{D}''_m)$ совокупность всех функций, определенных для $l^*_\lambda(z)$ так же, как в $D'_m(D''_m)$ для $l_\lambda(y)$. Очевидно, что $y \in D'_m(D''_m)$ тогда и только тогда, когда $z \in \overline{D}_m(\overline{D}_m)$.

Нетрудно вычисляется, что если $y \in D'_m(D''_m)$, а $z \in \overline{D}'_m(\overline{D}''_m)$ то имеет место формула Лагранжа

$$\int_0^\infty \left[l_\lambda(y)z - y\overline{l^*_\lambda(z)} \right] dx = [y,z]_0^\infty \tag{2.5}$$

где

$$[y,z]_0^\infty = \sum_{k=1}^{2n} \Big[(P_{2n-k}(x,\lambda)\bar{z}y^{(k-1)} - P_{2n-k}\bar{z})' y^{(k-2)} + \ldots + $$
$$+ (-1)(P_{2n-k}(x,\lambda)\bar{z})y^{(k-1)} \Big]_0^\infty$$

учитывая, что $P_0 = 1$, $P_1 = 0$.

Формулу (2.5) можно переписать в виде

$$(l_\lambda(y),z) - (y, l^*_\lambda(z)) = [y,z]_0^\infty \tag{2.6}$$

где (f,g) есть скалярное произведение элементов f и g в пространстве $L_2(0,\infty)$.

Учитывая тот факт, что если $f \in D'_m(D''_m)$, то

$$\lim_{x\to\infty_\infty} f^{(\nu)}(x) = 0, \quad \nu = \overline{0.2n-1}$$

формулу (2.6) можно записать так

$$(f, L^* g) = (f, l^*_\lambda g) - [f,g](0) \tag{2.7}$$

В свою очередь, формулу (2.7) можно преобразовать, введя сопряженные краевые условия $V_\nu(z)$, которые в точке $\lambda = \lambda_0$ будут иметь вид

$$V_\nu(z) = \sum_{i=0}^{2n-1} \beta_{\nu i}(\lambda_0) z^{(i)}(0,\lambda_0) = 0, \quad \nu = \overline{1,n} \tag{2.8}$$

Формы U_i, $i = \overline{1,n}$ дополним какими-нибудь формами $U_{n+1}, \ldots, U_{2n}$ до линейно независимой системы $2n$ форм U_i, $i = \overline{1,2n}$. В силу их линейной независимости, переменные $y(0,\lambda), y'(0,\lambda), \ldots, y^{(2n-1)}(0,\lambda)$ можно выразить в виде линейных комбинаций форм U_i, $i = \overline{1,2n}$. Подставим эти выражения в билинейную форму $[f,g](0)$ в (2.7). (У нас роль f будут играть функции y, а роль g — функции z). Тогда коэффициенты при переменных U_i, $i = \overline{1,2n}$ также будут линейными однородными формами от переменных $g(0), g'(0), \ldots, g^{(2n-1)}(0)$. Обозначим эти формы в точке $\lambda = \lambda_0$ через $V_{2n}, \ldots, V_1$ соответственно. Тогда формула (2.7) примет вид

$$(f, L^* g) = -\sum_{i=1}^{2n} U_i V_{2n+1-1} + (f, l^*_\lambda g) \tag{2.9}$$

Для построения сопряженного семейства операторов $L^*(\lambda)$ построим его область определения.

Областью определения сопряженного семейства операторов $L^*(\lambda_0)$, обозначим ее через $D_{Lm}^{'*}(\lambda_0)[D_{Lm}^{''*}(\lambda_0)]$, будет совокупность функций $z(x,\lambda) \in \overline{D}_m(\overline{D}_m)$, где $\overline{D}_m(\overline{D}_m)$ построено аналогично $D_m^{'}(D_m^{''})$ и удовлетворяющих (2.8).

При

$$L^*(\lambda_0)z = l_{\lambda_0}^*(z) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\rho_i K_i(x)}$$

где ρ_i, $i = \overline{1,n}$, произвольные постоянные.

Заставляя параметр λ пробегать множество всех регулярных точек всех функций $L_{\nu k}(\lambda)$, получим сопряженное к $L(\lambda)$ семейство операторов $L^*(\lambda)$ с областью определения $D_{Lm}^{'*}(\lambda)[D_{Lm}^{''*}(\lambda)]$.

В общем виде условия (2.8) запишутся в виде

$$V_\nu(z) = \sum_{i=1}^{2n1} \beta_{\nu i}(\lambda) z^{(i)}(0,\lambda) = 0, \quad \nu = \overline{1,n}. \qquad (2.10)$$

где $\beta_{\nu k}(\lambda)$, $\nu = \overline{1,n}$ $k = \overline{0.2n-1}$, в общем говоря, мероморфные функции комплексного переменного λ.

Построенное таким образом сопряженное семейство операторов действительно является сопряженным семейством.

Литература

1. Бабаханова С. Ш. Пашаева Э. Э. Некоторое краткое разложение семейства дифференциальных функций / ДАН Аз.ССР № 5, 1982.

2. Бабаханова С. Ш. Кратное разложение по собственным функциям дифференциального оператора с интегральными краевыми условиями. Рукопись деп. В ВИНИТИ, № 1152-82.