

Бергульов Антон Сергійович*кандидат фізико-математичних наук по спеціальності**01.02.04 механіка деформівного твердого тіла, програміст***Бергулев Антон Сергеевич***кандидат физико-математических наук по специальности**01.02.04 механика деформируемого твердого тела, программист***Berhulov Anton***Phd, programmer*

РОЗРАХУНОК НАПРУЖЕНО-ДЕФОРМОВАНОГО СТАНУ СКІНЧЕНОЕЛЕМЕНТНОЇ КОМПЗИТНОЇ АНІЗОТРОПНОЇ ОБЛАСТІ З РІЗНОМАНІТНИМИ ГРАНИЧНИМИ УМОВАМИ НА ПОВЕРХНІ

РАСЧЕТ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ КОНЕЧНОЭЛЕМЕНТНОЙ КОМПЗИТНОЙ АНИЗОТРОПНОЙ ОБЛАСТИ С РАЗЛИЧНЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ НА ПОВЕРХНОСТИ

CALCULATION OF STRESS-STRAIN STATE OF FINITE COMPOSITE ANISOTROPIC REGIONS WITH DIFFERENT BOUNDARY CONDITIONS ON THE SURFACE

Анотація. Представлено чисельно-аналітичний підхід до дослідження напружено-деформованого стану анізотропної скінченоелементної композитної області з різноманітними граничними умовами на поверхні. Задача розв'язується шляхом використання тривимірної моделі теорії пружності. Система диференціальних рівнянь в частинних похідних зводиться до одновимірної задачі за рахунок використання методу сплайн-колокації у двох координатних напрямках. Крайова задача для системи звичайних диференціальних рівнянь високого порядку розв'язується стійким чисельним методом дискретної ортогоналізації.

Ключові слова: напружено-деформований стан, рівняння в частинних похідних, метод сплайн-колокації, метод дискретної ортогоналізації, анізотропна скінченоелементна область.

Аннотация. Представлен численно-аналитический подход к исследованию напряженно-деформированного состояния анизотропной конечноэлементной композитной области с различными граничными условиями на поверхности. Задача решается путем использования трехмерной модели теории упругости. Система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к одномерной задаче за счет использования метода сплайн-коллокации в двух координатных направлениях. Граничная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Ключевые слова: напряженно-деформированное состояние, уравнения в частных производных, метод сплайн-коллокации, метод дискретной ортогонализации, анизотропная конечноэлементная область.

Summary. There is a numerical and analytical approach to research of stress-strain state of an anisotropic composite finite element field with different boundary conditions on the surface. The problem is solved using a three-dimensional model of the theory of elasticity. The system of differential equations is reduced to one-dimensional problem through the use of spline-collocation in the two coordinate directions. Boundary value problem for a system of ordinary differential equations of higher order is decided with the stable numerical method of discrete orthogonalization.

Key words: stress-strain state, partial differential equations, method of spline collocation, method of discrete orthogonalization, anisotropic finite element region.

Конечноэлементные композитные области находят широкое применение во многих отраслях современной техники, таких как судостроение, космическая отрасль, строительство зданий и т.п. Для обеспечения прочности и надежности при эксплуатации соответствующих элементов конструкций важным является вопрос получения информации про их напряженно-деформированное состояние. Проведение исследований на основании трехмерной теории упругости конечноэлементных композитных областей произвольной формы связано с трудностями вычислительного характера. Поэтому можно представить лишь небольшое количество научных трудов, посвященных данному вопросу.

В данной работе предложено эффективный численно-аналитический подход к исследованию напряженно-деформированного состояния конечноэлементных композитных слоистых анизотропных областей на основании теории упругости. Подход базируется на использовании метода сплайн-аппроксимации и метода коллокации, при помощи которых исходная трехмерная краевая задача для систем дифференциальных уравнений в частных производных сводится к соответствующей задаче для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Последняя решается устойчивым численным методом дискретной ортогонализации.

Исходные соотношения

Обозначим через *K* анизотропную пластину, состоящую из объединения кубических пластин (рис. 1):

Будем рассматривать задачу про напряженно-деформированное состояние такой пластины постоянной

толщины в прямоугольной системе координат (X, Y, Z). Соответственно линейной теории упругости исходные уравнения будут иметь следующий вид:

Уравнения равновесия:

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где σ_{ij} удовлетворяют закон парности касательных напряжений:

$$\sigma_{xy} = \sigma_{yx}; \sigma_{xz} = \sigma_{zx}; \sigma_{yz} = \sigma_{zy};$$

Соотношения Коши:

$$\begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \epsilon_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \epsilon_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \epsilon_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \end{aligned} \quad (2)$$

Физические уравнения, что выражают закон Гука для анизотропного материала:

$$\begin{cases} \epsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} + \alpha_{15}\sigma_{yz} + \alpha_{16}\sigma_{xz} \\ \epsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} + \alpha_{25}\sigma_{yz} + \alpha_{26}\sigma_{xz} \\ \epsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} + \alpha_{35}\sigma_{yz} + \alpha_{36}\sigma_{xz} \\ \epsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} + \alpha_{45}\sigma_{yz} + \alpha_{46}\sigma_{xz} \\ \epsilon_{yz} = \alpha_{15}\sigma_{xx} + \alpha_{25}\sigma_{yy} + \alpha_{35}\sigma_{zz} + \alpha_{45}\sigma_{xy} + \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\ \epsilon_{xz} = \alpha_{16}\sigma_{xx} + \alpha_{26}\sigma_{yy} + \alpha_{36}\sigma_{zz} + \alpha_{46}\sigma_{xy} + \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz} \end{cases} \quad (3)$$

Как видим, в соотношении (3) присутствует двадцать одна независимая постоянная. На практике как правило рассматривают тела, для каждой

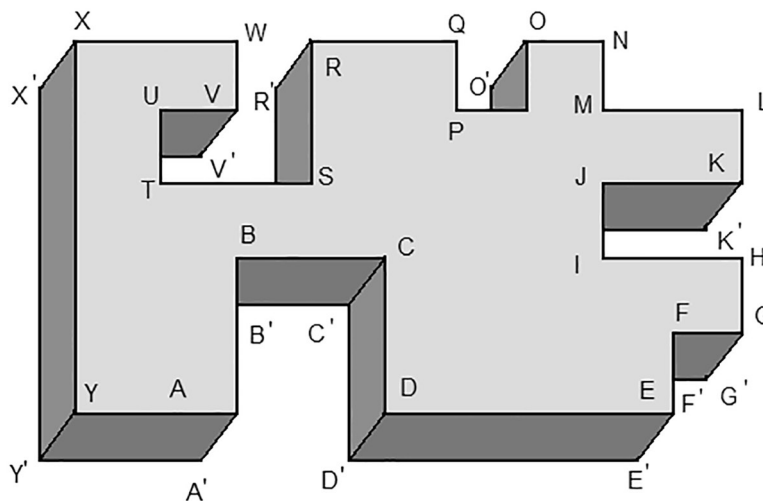


Рис. 1. Анизотропная пластина в виде объединения кубических пластин [разработка автора]

точки которых существует одна плоскость упругой симметрии, касательная к координатной поверхности $z = const$. В этом случае количество независимых переменных становится равной тринадцати, и закон Гука для таких тел примет вид:

$$\begin{cases} \varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} + \alpha_{14}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} + \alpha_{24}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} + \alpha_{34}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{xy} = \alpha_{14}\sigma_{xx} + \alpha_{24}\sigma_{yy} + \alpha_{34}\sigma_{zz} + \alpha_{44}\sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} = \alpha_{55}\sigma_{yz} + \alpha_{56}\sigma_{xz} \\ \varepsilon_{xz} = \alpha_{56}\sigma_{yz} + \alpha_{66}\sigma_{xz} \end{cases} \quad (4)$$

Коэффициенты α_{ij} этой системы определяются из соотношений:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \frac{1}{E_x}, \alpha_{12} = -\frac{\nu_{yx}}{E_x} = -\frac{\nu_{xy}}{E_y}, \alpha_{13} = -\frac{\nu_{xz}}{E_z} = -\frac{\nu_{zx}}{E_x}, \\ \alpha_{14} &= -\frac{\eta_{xy,x}}{E_x} = -\frac{\eta_{x,xy}}{G_{xy}}, \alpha_{22} = \frac{1}{E_y}, \alpha_{23} = -\frac{\nu_{zy}}{E_y} = -\frac{\nu_{yz}}{E_z}, \\ \alpha_{24} &= -\frac{\eta_{xy,y}}{E_y} = -\frac{\eta_{y,xy}}{G_{xy}}, \alpha_{33} = \frac{1}{E_z}, \alpha_{34} = -\frac{\eta_{xy,z}}{E_z} = -\frac{\eta_{z,xy}}{G_{xy}}, \\ \alpha_{44} &= \frac{1}{G_{xy}}, \alpha_{55} = \frac{1}{G_{yz}}, \alpha_{56} = -\frac{\mu_{zx,yz}}{G_{yz}} = -\frac{\mu_{yz,zx}}{G_{xz}}, \alpha_{66} = \frac{1}{G_{xz}}. \end{aligned} \quad (5)$$

В этих определениях:

E_x, E_y, E_z — модули упругости по направлениям x, y, z соответственно; G_{yz}, G_{xz}, G_{xy} — модули сдвига для плоскостей, параллельных координатным плоскостям $x = const, y = const, z = const$ соответственно; $\nu_{yx}, \nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}, \nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}, \nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}, \nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}\nu_{yx}$ — коэффициенты Пуассона, характеризующие поперечное сжатие при растяжении вдоль осей координат; $\mu_{zx,yz}, \mu_{yz,zx}$ — коэффициенты, которые характеризуют сдвиги в плоскостях, параллельных координатным плоскостям, обусловленные касательными напряжениями, которые действуют в плоскостях, касательных к другим координатным плоскостям; $\eta_{xy,x}, \eta_{xy,y}, \eta_{xy,z}$ — коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют сдвиги в координатных плоскостях, обусловленные нормальными напряжениями; $\eta_{x,xy}, \eta_{y,xy}, \eta_{z,xy}$ — коэффициенты взаимного влияния, которые характеризуют удлинения, обусловленные касательными напряжениями.

Далее из систем (1), (2), (4) путем элементарных преобразований получаем разрешающую систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, описывающую напряженно-деформированное состояние пластины:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} b_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} b_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} b_5 + \\ &+ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} b_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} b_8 + b_9 X + b_{10} Y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} b_1 + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} b_2 + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} b_3 + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} b_4 + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} b_5 + \\ &+ \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} b_6 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial y} b_7 + \frac{\partial^2 w}{\partial z \partial x} b_8 + b_9 X + b_{10} Y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} &= c_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + c_2 \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} + c_3 \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} + c_4 \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + c_5 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \\ &+ c_6 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + c_7 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + c_8 Z \end{aligned} \quad (6)$$

Коэффициенты a_i, b_i, c_i в системе (6) определяются механическими характеристиками материала с учетом соотношений (5).

На практике формулы для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии получаются из формул для ортотропного тела путем поворота системы координат на угол α вокруг оси OZ .

При этом коэффициенты матриц упругой податливости a_{ij} и \dot{a}_{ij} в обоих случаях связаны между собой соотношениями:

$$\begin{aligned} \dot{a}_{11} &= \cos^4 a a_{11} + 2 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha a a_{12} + \sin^4 \alpha a a_{22} + \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha a a_{66} \\ \dot{a}_{22} &= \sin^4 a a_{11} + \cos^4 a a_{22} + a_{66} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + 2 a_{12} \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha \\ \dot{a}_{33} &= a_{33} \\ \dot{a}_{44} &= a_{44} \cos^2 \alpha + a_{55} \sin^2 \alpha \\ \dot{a}_{55} &= a_{44} \sin^2 \alpha + a_{55} \cos^2 \alpha \\ \dot{a}_{66} &= (a_{11} + a_{22} - 2 a_{12}) 4 \cos^2 \alpha \sin^2 \alpha + a_{66} (\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)^2 \\ \dot{a}_{12} &= (a_{11} + a_{22} - a_{66}) \sin^2 \alpha \cos^2 \alpha + a_{12} (\sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha) \\ \dot{a}_{13} &= a_{13} \cos^2 \alpha + a_{23} \sin^2 \alpha \\ \dot{a}_{14} &= 0 \\ \dot{a}_{15} &= 0 \\ \dot{a}_{16} &= [2(a_{22} \sin^2 \alpha - a_{11} \cos^2 \alpha) + (a_{66} + 2 a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{a}_{23} &= a_{13} \sin^2 \alpha + a_{23} \cos^2 \alpha \\ \dot{a}_{24} &= 0 \\ \dot{a}_{25} &= 0 \\ \dot{a}_{26} &= [2(a_{22} \cos^2 \alpha - a_{11} \sin^2 \alpha) - (a_{66} + 2 a_{12})(\cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha)] \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{a}_{34} &= 0 \\ \dot{a}_{35} &= 0 \\ \dot{a}_{36} &= 2(a_{23} - a_{13}) \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{a}_{45} &= (a_{44} - a_{55}) \sin \alpha \cos \alpha \\ \dot{a}_{46} &= 0 \\ \dot{a}_{56} &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, зная коэффициенты a_{ij} в случае ортотропного тела и угол поворота можем сформулировать корректно поставленную задачу для анизотропного тела с одной плоскостью упругой симметрии.

Решение системы (6) будем искать в виде (8):

$$\begin{cases} u(x, y, z) = \sum_{i=1..K \times (N+1) \times (M+1)} u_i(z) \phi_i^u(x) \psi_i^u(y) \\ v(x, y, z) = \sum_{i=1..K \times (N+1) \times (M+1)} v_i(z) \phi_i^v(x) \psi_i^v(y) \\ w(x, y, z) = \sum_{i=1..K \times (N+1) \times (M+1)} w_i(z) \phi_i^w(x) \psi_i^w(y) \end{cases} \quad (8)$$

Тут: N, M – размерность сетки коллокации каждой из кубических пластин. K – количество кубических подпластин пластины [1].

Постановка граничных условий

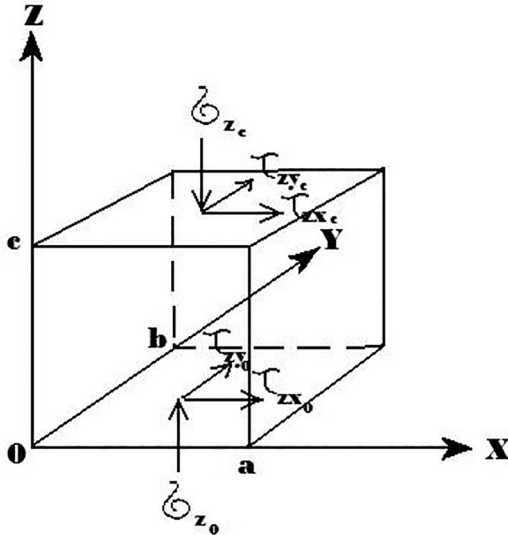


Рис. 2. Постановка граничных условий [разработка автора]

Рассмотрим кубическую составляющую пластины [1] (рис. 2). Пусть на гранях $z = 0, z = c$ заданы нормальные и касательные напряжения $\sigma_{z_0}, \sigma_{z_c}, \tau_{zx_0}, \tau_{zy_0}, \tau_{zx_c}, \tau_{zy_c}$, которые в дальнейшем будут определять распределение напряжений, деформаций и перемещений в середине толстостенной пластины.

Из систем уравнений (2), (4) можем выразить:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x = \alpha_{11}\sigma_{xx} + \alpha_{12}\sigma_{yy} + \alpha_{13}\sigma_{zz} & (2.1) \quad (3.1) \\ \frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y = \alpha_{12}\sigma_{xx} + \alpha_{22}\sigma_{yy} + \alpha_{23}\sigma_{zz} & (2.2) \quad (3.2) \\ \frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z = \alpha_{13}\sigma_{xx} + \alpha_{23}\sigma_{yy} + \alpha_{33}\sigma_{zz} & (2.3) \quad (3.3) \end{cases}$$

Эта система в матричной форме имеет вид:

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{12} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{13} & \alpha_{23} & \alpha_{33} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{12} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{13} & \beta_{23} & \beta_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (9)$$

То есть:

$$\sigma_{zz} = \beta_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{33} \frac{\partial w}{\partial z} .$$

Касательные напряжения можно определить следующим образом:

$$\begin{aligned} \sigma_{xz} &= \frac{\varepsilon_{yz} - \varepsilon_{xz}}{\alpha_{56} + \alpha_{66}} = \frac{\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z}}{\alpha_{56} + \alpha_{66}} \\ \sigma_{yz} &= \frac{\varepsilon_{xz} - \varepsilon_{yz}}{\alpha_{56} + \alpha_{55}} = \frac{\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}}{\alpha_{56} + \alpha_{55}} \end{aligned}$$

Поэтому граничные условия на гранях $z = 0, z = c$ описываются системой:

$$\begin{cases} \sigma_{zz0,c} = \beta_{13} \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_{23} \frac{\partial v}{\partial y} + \beta_{33} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \sigma_{xz0,c} = \frac{1}{\alpha_{56} + \alpha_{66}} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \sigma_{yz0,c} = \frac{1}{\alpha_{56} + \alpha_{55}} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z} \right) \end{cases} \quad (10)$$

Аппроксимация решений системы (10) производится при помощи функций (8).

На боковых гранях могут быть заданы граничные условия трех типов: условия, которые соответствуют жестко закрепленному контуру, условия, которые соответствуют шарнирно опертому контуру, условия для свободного контура. Аппроксимация этих граничных условий достигается путем подбора коэффициентов при B_3 сплайнах, через которые определяются функции ϕ_i^a, ψ_j^a , $a = u, v, w$. Функции $\phi_i^a(x), \psi_j^a(y)$ будем искать в виде:

$$\begin{cases} \phi_0^a = \alpha_{11}^a B_3^{-1} + \alpha_{12}^a B_3^0 + \alpha_{13}^a B_3^1 \\ \phi_1^a = \alpha_{21}^a B_3^{-1} + \alpha_{22}^a B_3^0 + \alpha_{23}^a B_3^1 \\ \phi_i^a = B_3^i, \quad i = 2..N-2 \end{cases} \quad (11)$$

$$\begin{cases} \phi_{N-1}^a = \beta_{21}^a B_3^{N-1} + \beta_{22}^a B_3^N + \beta_{23}^a B_3^{N+1} \\ \phi_N^a = \beta_{11}^a B_3^{N-1} + \beta_{12}^a B_3^N + \beta_{13}^a B_3^{N+1} \\ \psi_0^a = \alpha_{11}^a B_3^{-1} + \alpha_{12}^a B_3^0 + \alpha_{13}^a B_3^1 \\ \psi_1^a = \alpha_{21}^a B_3^{-1} + \alpha_{22}^a B_3^0 + \alpha_{23}^a B_3^1 \\ \psi_i^a = B_3^i, \quad i = 2..M-2 \\ \psi_{M-1}^a = \beta_{21}^a B_3^{M-1} + \beta_{22}^a B_3^M + \beta_{23}^a B_3^{M+1} \\ \psi_M^a = \beta_{11}^a B_3^{M-1} + \beta_{12}^a B_3^M + \beta_{13}^a B_3^{M+1} \end{cases} \quad a = u, v, w \quad (12)$$

Рассмотрим для примера кубическую составляющую пластины [1] (рис. 2) и граничные условия на грани $x = 0$ для случая жестко закрепленного и шарнирно опертого контура.

1. Жестко закрепленный контур.

Этому случаю соответствуют условия:

$$u(0, y, z) \equiv 0, v(0, y, z) \equiv 0, w(0, y, z) \equiv 0, -(\sigma_{xx0} \equiv 0) \quad (13)$$

Определим σ_{xx} из соотношения (9):

$$\sigma_{xx0} = \beta_{11} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) + \beta_{12} \frac{\partial v}{\partial y}(0, y, z) + \beta_{13} \frac{\partial w}{\partial z}(0, y, z).$$

Поскольку $v(0, y, z) \equiv 0, w(0, y, z) \equiv 0$, отсюда следует, что:

$$\frac{\partial v}{\partial y}(0, y, z) \equiv 0, \frac{\partial w}{\partial z}(0, y, z) \equiv 0.$$

Тогда для выполнения условия $-(\sigma_{xx0} \equiv 0)$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие

$$-\left(\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) \equiv 0\right). \quad (14)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) &= \sum_{j=0}^M \sum_{i=0}^N u_{ij}(z) \frac{\partial \phi_i^u(0)}{\partial x} \psi_j^u(y) = \\ &= \sum_{j=0}^M \psi_j^u(y) \left[u_{0j}(z) \frac{\partial \phi_0^u(0)}{\partial x} + u_{1j}(z) \frac{\partial \phi_1^u(0)}{\partial x} \right] \end{aligned}$$

Последнее равенство вытекает из того, что $\phi_i^u(0) = B_3^i(0) = 0, i = 2..N$. Поэтому для выполнения условия (14) достаточно, чтобы хотя бы одно из значе-

ний $\frac{\partial \phi_0^u(0)}{\partial x}, \frac{\partial \phi_1^u(0)}{\partial x}$ не равнялось нулю одновременно. То есть, условия (13) могут быть заменены на условия:

$$\begin{cases} u(0, y, z) \equiv 0 \\ v(0, y, z) \equiv 0 \\ w(0, y, z) \equiv 0 \\ \frac{\partial \phi_0^u(0)}{\partial x} \neq 0 \\ \frac{\partial \phi_1^u(0)}{\partial x} \neq 0 \end{cases} \quad (15)$$

А для выполнения условий (15) достаточно, чтобы выполнялась система:

$$\begin{cases} \phi_0^a(0) = 0 \\ \phi_1^a(0) = 0, a = u, v, w \\ \frac{\partial \phi_0^u(0)}{\partial x} \neq 0 \\ \frac{\partial \phi_1^u(0)}{\partial x} \neq 0 \end{cases} \quad (16)$$

Для этого выберем коэффициенты:

$$\begin{aligned} \alpha_{11}^{a\phi} &= -4, \alpha_{12}^{a\phi} = 1, \alpha_{13}^{a\phi} = 0, \alpha_{21}^{a\phi} = 1, \\ \alpha_{22}^{a\phi} &= -\frac{1}{2}, \alpha_{23}^{a\phi} = 1, a = u, v, w \end{aligned} \quad (17)$$

С учетом того, что

$$\begin{aligned} B_3^{-1}(0) &= \frac{1}{6}, B_3^0(0) = \frac{4}{6}, B_3^1(0) = \frac{1}{6}, \\ \frac{\partial B_3^{-1}}{\partial x}(0) &= -\frac{1}{2h}, \frac{\partial B_3^0}{\partial x}(0) = 0, \frac{\partial B_3^1}{\partial x}(0) = \frac{1}{2h} \end{aligned} \quad (18)$$

имеем:

$$\begin{aligned} \phi_0^a(0) &= -4 \cdot \frac{1}{6} + 1 \cdot \frac{4}{6} = 0 \\ \phi_1^a(0) &= 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + 1 \cdot \frac{1}{6} = 0 \\ \frac{\partial \phi_0^a}{\partial x}(0) &= -\frac{1}{2h} \cdot (-4) + 1 \cdot 0 = \frac{2}{h} \neq 0 \\ \frac{\partial \phi_1^a}{\partial x}(0) &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2h} = 0 \end{aligned} \quad , a = u, v, w$$

Как видно, выбранные в форме (17) коэффициенты удовлетворяют системе (16), что автоматически тянет за собой выполнение условий (13). Поэтому для жестко закрепленного контура $x = 0$ функции $\phi_0^a, \phi_1^a, a = u, v, w$ примут вид:

$$\phi_0^a = -4 \cdot B_3^{-1} + B_3^0 \quad (19)$$

$$\phi_1^a = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \quad (20)$$

2. Шарнирно опертый контур.

Этому случаю удовлетворяют условия:

$$-(u(0, y, z) \equiv 0), v(0, y, z) \equiv 0, w(0, y, z) \equiv 0, \sigma_{xx0} \equiv 0 \quad (21)$$

Из представленных выше рассуждений следует, что условие $\sigma_{xx0} \equiv 0$ можно заменить условием

$\frac{\partial u}{\partial x}(0, y, z) \equiv 0$. Для этого случая положим коэффициенты:

$$\alpha_{11}^{u\phi} = 0, \alpha_{12}^{u\phi} = 1, \alpha_{13}^{u\phi} = 0, \alpha_{21}^{u\phi} = 1, \alpha_{22}^{u\phi} = -\frac{1}{2}, \alpha_{23}^{u\phi} = 1 \quad (22)$$

$$\alpha_{11}^{a\phi} = -4, \alpha_{12}^{a\phi} = 1, \alpha_{13}^{a\phi} = 0, \alpha_{21}^{a\phi} = 1, \quad (23)$$

$$\alpha_{22}^{a\phi} = -\frac{1}{2}, \alpha_{23}^{a\phi} = 1, a = v, w$$

Для определенных согласно (22), (23) коэффициентов имеем:

$$\begin{aligned} \phi_0^u(0) &= 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 = 0 & \phi_1^u(0) &= 1 \cdot \frac{1}{6} - \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{6} + \frac{1}{6} \cdot 1 = 0 \\ \frac{\partial \phi_0^u}{\partial x}(0) &= 1 \cdot 0 = 0 & \frac{\partial \phi_0^u}{\partial x}(0) &= 1 \cdot 0 = 0 \\ \frac{\partial \phi_1^u}{\partial x}(0) &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2h} = 0 & \frac{\partial \phi_1^u}{\partial x}(0) &= 1 \cdot \left(-\frac{1}{2h}\right) - \frac{1}{2} \cdot 0 + 1 \cdot \frac{1}{2h} = 0 \end{aligned}$$

Как видим, выбранные в форме (22), (23) коэффициенты позволяют удовлетворить граничные условия (21). Поэтому для шарнирно опертого контура $x = 0$ функции $\phi_0^a, \phi_1^a, a = v, w$ примут вид:

$$\phi_0^a = -4 \cdot B_3^{-1} + B_3^0 \tag{24}$$

$$\phi_1^a = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \tag{25}$$

А функции:

$$\phi_0^u = B_3^0 \phi_0^u = B_3^0 \tag{26}$$

$$\phi_1^u = B_3^{-1} - \frac{1}{2} B_3^0 + B_3^1 \tag{27}$$

Аналогично определяются граничные условия для свободного контура.

Случай неоднородного ортотропного материала

В случае неоднородного по координате z ортотропного материала жесткостные параметры, характеризующие напряженно-деформированное состояние такой пластины, примут вид:

$E_x(z), E_y(z), E_z(z)$ — модули упругости по направлениям x, y, z соответственно.

$G_{yz}(z), G_{xz}(z), G_{xy}(z)$ — модули упругости для плоскостей, параллельных плоскостям

$x = 0, y = 0, z = 0$ соответственно.

В этом случае коэффициенты матрицы упругой податливости примут вид:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \alpha_{11}(z); & \alpha_{22} &= \alpha_{22}(z); & \alpha_{33} &= \alpha_{33}(z); \\ \alpha_{12} &= \alpha_{12}(z); & \alpha_{13} &= \alpha_{13}(z); & \alpha_{23} &= \alpha_{23}(z); \\ \alpha_{44} &= \alpha_{44}(z); & \alpha_{55} &= \alpha_{55}(z); & \alpha_{66} &= \alpha_{66}(z); \end{aligned} \tag{28}$$

Тогда имеем систему трех дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных, что описывает напряженно-деформированное состояние прямоугольной толстостенной ортотропной неоднородной по координате z пластины:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = a_1(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2(z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + a_4(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + a_5(z) X \\ \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = b_1(z) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + b_2(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + b_3(z) \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b_4(z) \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} + b_5(z) Y \\ \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = c_1(z) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} + c_2(z) \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + c_3(z) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + c_4(z) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c_5(z) Z \end{cases} \tag{29}$$

Коэффициенты $a_i(z), b_i(z), c_i(z), i = \overline{1..5}$ определяются через коэффициенты матрицы упругой податливости $\alpha_{ij}(z)$, описанные формулами (28).

В случае материала, неоднородного по трем пространственным координатам, коэффициенты системы

(29) будут коэффициентами от всех трех пространственных координат: $a_i(x, y, z), b_i(x, y, z), c_i(x, y, z), i = \overline{1..5}$.

Постановка задачи

Рассмотрим односвязное тело произвольной формы с произвольным креплением на частях поверхности. Обозначим его T . Будем рассматривать его в декартовой системе координат XYZ . Задача стоит в нахождении НДС данного тела, состоящего из произвольной композиции материалов с произвольным креплением поверхности при произвольной нагрузке на неё (равномерной или точечной) и произвольно заданных объемных сил (массовых, температурного расширения и т.п.).

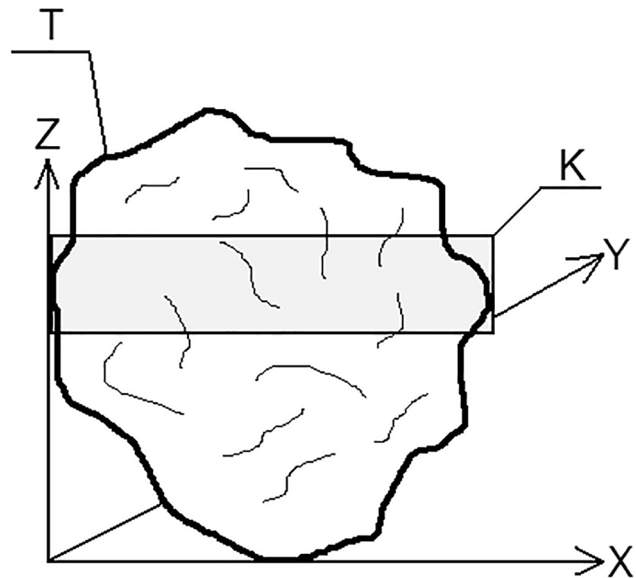


Рис. 3. Односвязное тело произвольной формы с произвольным креплением на частях поверхности [разработка автора]

Метод решения

Расположим рассматриваемое тело T в декартовой системе координат таким образом, чтобы плоскости XOY, XOZ, YOZ были касательными к телу, а каждая точка тела $p(x_p, y_p, z_p)$ удовлетворяла условию: $x_p \geq 0, y_p \geq 0, z_p \geq 0$ [рис. 3]. Рассмотрим случай композитного слоистого тела. Разобьем тело на горизонтальные слои, нижняя и верхняя грани которых будут параллельны плоскости XOY . Каждый из таких слоёв аппроксимируем кубическими подпластинами [рис. 1]. НДС полученной таким образом области K будет описываться формулами (6), (10), (13), (21). Граничные условия на стыке областей K_i будут задаваться соотношениями (30):

$$\begin{aligned} \sigma_{i_{zz}} &= -\sigma_{i+1_{zz}}, & u_i &= u_{i+1}, & \sigma_{i_{zy}} &= \sigma_{i+1_{zy}}, \\ v_i &= v_{i+1}, & \sigma_{i_{xz}} &= \sigma_{i+1_{xz}}, & w_i &= -w_{i+1} \end{aligned} \tag{30}$$

После проведения аппроксимации искомым функций перемещений в виде (8) получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений порядка:

$$\dim A = 6 \cdot \sum_{i=1}^R K_i (N+1)(M+1) \quad (31)$$

Тут: R — количество слоев односвязного тела T , K_i — количество кубических подпластин в i -ом слое, N, M — количество точек сплайн-коллокации по каждому из направлений. Эта задача может быть решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1; 2].

Выводы

В данной статье предложен численно-аналитический подход к решению задач о НДС произвольного конечноэлементного односвязного композитного тела с различными типами креплений на поверхности. Задача решается путем использования трехмерной модели теории упругости. Система дифференциальных уравнений в частных производных сводится к одномерной задаче за счет использования метода сплайн-коллокации в двух координатных направлениях. Граничная задача для системы обыкновенных дифференциальных уравнений высокого порядка может быть решена устойчивым численным методом дискретной ортогонализации [1; 2].

Литература

1. Budak, V. D., Grigorenko, A. Ya., Puzyrev, S. V. 2007. Solution describing the natural vibrations of rectangular shallow shells with varying thickness. *Int. Appl. Mech.* 43 (4), 432–441.
2. Решение трехмерных граничных задач про изгиб прямоугольных пластин / Григоренко А.Я., Бергулёв А.С., Яремченко // Доклады Национальной академии наук Украины. 2010. № 10. С. 44–51.