ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

УДК 517.946

Алиева Арзу Гамбар кызы
старший научный сотрудник отдела дифференциальных уравнений института Математики и Механики Национальной Академии Азербайджана
Aliyeva Arzu Qambar kizi
departament of differential equations institute of Mathematics and Mechanics Azerbaijan National Academy of Sciences

ИССЛЕДОВАНИЕ РЕШЕНИЯ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЁРТОГО ПОРЯДКА

STUDY OF SOLUTION OF MIXED PROBLEM FOR ONE CLASS OF SEMI–LINEAR FOURTH ORDER EQUATIONS

Аннотация. *Работа посвящена изучению некоторых свойств решения почти всюду одномерной смешанной задачи для одного класса полулинейных уравнений четвёртого порядка. Введено понятие решения почти всюду изучаемой смешанной задачи. В работе стандартным методом, т.е. умножением рассматриваемого уравнения на подходящую функцию и последующим соответствующим почленным интегрированием (включая некоторые интегрирования по частям), доказывается теорема об априорной ограниченности решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.*

Ключевые слова: *полулинейное уравнение, смешанная задача, решение почти всюду, априорная оценка.*

Summary. *This work is dedicated to the study of almost everywhere solution of one-dimensional mixed problem for one class of semi-linear fourth order equations. Conception of almost everywhere solution for mixed problem under consideration is introduced. In the conventional method, i.e. multiplication of the equation on the right function and subsequent relevant term by term integration (including some integration by parts), a theorem on a priori estimation of the solution almost everywhere under consideration of the mixed problem.*

Key words: *semi-linear equation, mixed problem, almost everywhere solution, a priori estimate.*

В работе изучаются некоторые свойства решения почти всюду следующей одномерной смешанной задачи:

$$\begin{cases} u_{txx}(t,x)-\alpha u_{xxxx}(t,x)=F(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x)) \\ \qquad\qquad (0\le t\le T,\ 0\le x\le \pi), & (1) \\ u(0,x)=\varphi(x)\ (0\le x\le \pi), & (2) \\ u(t,0)=u(t,\pi)=u_{xx}(t,0)=u_{xx}(t,\pi)=0\ \ (0\le t\le T), & (3) \end{cases}$$

где $\alpha>0$ — фиксированное число; $0<T<+\infty$; F, φ — заданные функции, а $u(t,x)$ — искомая функция, причём под решением почти всюду задачи (1)–(3) понимаем следующее

Определение. Под решением почти всюду задачи (1)–(3) понимаем функцию $u(t,x)$, обладающую свойствами:

а) $u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x),u_t(t,x),u_{tx}(t,x)\in C([0,T]\times[0,\pi])$;
$u_{xxxx}(t,x),u_{txx}(t,x)\in C([0,T];L_2(0,\pi))$;

б) все условия (2) и (3) удовлетворяются в обычном смысле;

в) уравнение (1) удовлетворяется почти всюду в $(0,T)\times(0,\pi)$.

В работе [1] автора и К. И. Худавердиева исследовано существование классического решения одномерной смешанной задачи для некоторого полулинейного уравнения, которое более проще, чем уравнение (1). А в работе [2] исследовано обобщенное решение рассматриваемой смешанной задачи.

Умножением рассматриваемого уравнения на подходящую функцию и последующим соответствующим почленным интегрированием, доказывается следующая теорема об априорной ограниченности (в определенных смыслах) решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

Теорема. Пусть правая часть уравнения (1) имеет вид:

$$F(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx}) = f_0(t,u_{xx})\cdot u_{xxx} + f(t,x,u,u_x,u_{xx},u_{xxx}), \quad (4)$$

причём:

а) $f_0(t,V)\in C\big([0,T]\times(-\infty,\infty)\big)$; (5)

б) $f(t,x,u_1,...,u_4)\in C([0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4)$ и в $[0,T]\times[0,\pi]\times(-\infty,\infty)^4$

$$f(t,x,u_1,...,u_4)\cdot u_3 \le C\cdot(1+u_1^2+u_2^2+u_3^2)+\delta\cdot u_4^2, \quad 0<\delta<\alpha, \quad (6)$$

где $C>0$ — постоянная, а $\alpha>0$ — число, фигурирующее в уравнении (1).

Тогда для всевозможных решений почти всюду $u(t,x)$ задачи (1)–(3) справедливы априорные оценки:

$$\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx \le C_0 \quad \forall t\in[0,T]; \quad \int_0^T\int_0^\pi u_{xxx}^2(t,x)dxdt \le C_0. \quad (7)$$

Доказательство. Пусть $u(t,x)$ — любое решение почти всюду задачи (1)–(3). Умножим обе части уравнения (1) на функцию $2u_{xx}(t,x)$ и проинтегрируем полученное равенство по x от 0 до π:

$$2\int_0^\pi u_{txx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x)dx - 2\alpha\cdot\int_0^\pi u_{xxxx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x)dx =$$
$$=2\int_0^\pi f_0(t,u_{xx}(t,x))\cdot u_{xxx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x))dx +$$
$$+2\int_0^\pi f(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\cdot u_{xx}(t,x)dx. \quad (8)$$

Далее, пользуясь двумя последними граничными условиями (3) и условием (6), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$2\int_0^\pi u_{txx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x)dx = \frac{d}{dt}\left\{\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx\right\}; \quad (9)$$

$$-2\alpha\int_0^\pi u_{xxxx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x)dx = -2\alpha\cdot\left\{\Big[u_{xxx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x)\Big]_{x=0}^{x=\pi} - \int_0^\pi u_{xxx}(t,x)\cdot u_{xxx}(t,x)dx\right\} = 2\alpha\cdot\int_0^\pi u_{xxx}^2(t,x)dx; \quad (10)$$

$$2\int_0^\pi f_0(t,u_{xx}(t,x))\cdot u_{xxx}(t,x)\cdot u_{xx}(t,x)dx =$$
$$=2\int_0^\pi f_0(t,u(t,x))u_{xx}(t,x)\cdot u_{xxx}(t,x)dx =$$
$$=2\int_0^\pi\left\{\frac{\partial}{\partial x}\int_0^{u_{xx}(t,x)} f_0(t,\xi)\cdot\xi\,d\xi\right\}dx = 2\left\{\int_0^{u_{xx}(t,x)}\xi\,f_0(t,\xi)d\xi\right\}_{x=0}^{x=\pi} = 0; \quad (11)$$

$$2\int_0^\pi f(t,x,u(t,x),u_x(t,x),u_{xx}(t,x),u_{xxx}(t,x))\cdot u_{xx}(t,x)dx \le$$
$$\le 2\int_0^\pi\left\{C\cdot[1+u^2(t,x)+u_x^2(t,x)+u_{xx}^2(t,x)]+\delta\cdot u_{xxx}^2(t,x)\right\}dx =$$
$$=2\pi\cdot C + 2C\cdot\int_0^\pi u^2(t,x)dx + 2C\cdot\int_0^\pi u_x^2(t,x)dx +$$
$$+2C\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx + 2\delta\cdot\int_0^\pi u_{xxx}^2(t,x)dx. \quad (12)$$

Теперь, подставив (9)–(12) в (8), интегрируя полученное неравенство по t от 0 до t и пользуясь начальным условием (2), получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx + 2\alpha\cdot\int_0^t\int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dxd\tau \le \int_0^\pi(\phi''(x))^2dx + 2\pi\cdot C\cdot T +$$
$$+\int_0^t\left\{2C\cdot\left[\int_0^\pi u^2(\tau,x)dx+\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx+\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx\right]+ +2\delta\cdot\int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dxd\tau\right\},$$

следовательно

$$\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx + 2(\alpha-\delta)\cdot\int_0^t\int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dxd\tau \le$$
$$\le\int_0^\pi(\phi''(x))^2dx + 2\pi T\cdot C +$$
$$+2C\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\pi u^2(\tau,x)dx+\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx+\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx\right\}d\tau. \quad (13)$$

Далее, так как $u(\tau,0)=u(\tau,\pi)$ $(0\le\tau\le T)$, то $\forall\tau\in[0,T]$ существует такая точка $\xi=\xi_\tau\in(0,\pi)$, что $u_x(\tau,\xi_\tau)=0$. Тогда очевидно, что $\forall\tau\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$u_x(\tau,x)=\int_{\xi_\tau}^x u_{\xi\xi}(\tau,\xi)d\xi,$$

$$u_x^2(\tau,x)\le\left\{\int_0^\pi\left|u_{\xi\xi}(\tau,\xi)\right|d\xi\right\}^2\le\pi\cdot\int_0^\pi u_{\xi\xi}^2(\tau,\xi)d\xi=\pi\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx, \quad (14)$$

$$\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx\le\pi\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx\cdot\pi=\pi^2\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx. \quad (15)$$

С другой стороны, пользуясь соотношением $u(\tau,0)=0$ $(0\le\tau\le T)$, получаем, что $\forall\tau\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$u(\tau,x)=\int_0^x u_\xi(\tau,\xi)d\xi,$$

$$u^2(\tau,x)\le\left\{\int_0^\pi\left|u_\xi(\tau,\xi)\right|d\xi\right\}^2\le\pi\cdot\int_0^\pi u_\xi^2(\tau,\xi)d\xi=\pi\cdot\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx, \quad (16)$$

$$\int_0^\pi u^2(\tau,x)dx\le\pi\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx\cdot\pi=\pi^2\cdot\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx. \quad (17)$$

Тогда из (16) и (17), в силу (15), следует, что $\forall\tau\in[0,T]$ и $x\in[0,\pi]$:

$$u^2(\tau,x)\le\pi\cdot\int_0^\pi u_x^2(\tau,x)dx\le\pi^3\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx, \quad (18)$$

$$\int_0^\pi u^2(\tau,x)dx\le\pi^3\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx\cdot\pi=\pi^4\cdot\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx. \quad (19)$$

Теперь, пользуясь обозначением

$$\delta_0\equiv 2(\alpha-\delta)>0$$

и оценками (19), (15) в правой части (13), из (13) получаем, что $\forall t\in[0,T]$:

$$\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx+\delta_0\cdot\int_0^t\int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dxd\tau\le\int_0^\pi(\phi''(x))^2dx+2\pi T\cdot C+$$
$$+2C\cdot(\pi^4+\pi^2+1)\cdot\int_0^t\left\{\int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx\right\}d\tau. \quad (20)$$

Тогда, в силу $\delta_0 > 0$, очевидно, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx \le$$

$$\le \int_0^\pi (\phi''(x))^2 dx + 2\pi T \cdot C + 2(1+\pi^2+\pi^4)\cdot C \cdot \int_0^t \left\{ \int_0^\pi u_{xx}^2(\tau,x)dx \right\} d\tau.$$

Отсюда, применив неравенство Беллмана, получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\int_0^\pi u_{xx}^2(t,x)dx \le$$

$$\le \left\{ \int_0^\pi (\phi''(x))^2 dx + 2\pi T \cdot C \right\} \cdot \exp\left\{ 2(1+\pi^2+\pi^4)\cdot C \cdot T \right\} \equiv C_1. \quad (21)$$

С другой стороны, из (20), пользуясь априорной оценкой (21), получаем, что $\forall t \in [0,T]$:

$$\delta_0 \cdot \int_0^t \int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dxd\tau \le$$

$$\le \int_0^\pi (\phi''(x))^2 dx + 2\pi T \cdot C + 2(1+\pi^2+\pi^4)\cdot C \cdot C_1 \cdot T \equiv C_2.$$

Следовательно

$$\int_0^T \int_0^\pi u_{xxx}^2(\tau,x)dxd\tau \le \delta_0^{-1} \cdot C_2 \equiv C_3. \quad (22)$$

Таким образом, из (21) и (22) следует справедливость априорных оценок (7). Теорема доказана.

Следствие. Из первой априорной оценки (7), в силу оценок (18) и (14), следует справедливость априорных оценок:

$$\|u(t,x)\|_{C(Q_T)} \le R_0,\ \|u_x(t,x)\|_{C(Q_T)} \le R_0.$$

В заключении отметим, что данная работа является продолжением работы [3], в котором изучена априорная ограниченность (в определенном смысле) решения почти всюду рассматриваемой смешанной задачи.

Литература

1. Khudaverdiyev K. I., Aliyeva A. Q. On the global existence of solution to one-dimensional fourth order nonlinear Sobolev type equations / Applied Mathematics and Computation. — Volume 217. — 2010. — P. 347–354.

2. Aliyeva A. Q. Investigation of generalized solution of one-dimensional mixed problem for a class of fourth order semi linear equations of Sobolev type / Transactions of National Academy of Sciences of Azerbaijan. — V.XXXII. — № 4. — Baku. — 2012. — P. 3–12.

3. Aliyeva A. Q. Some a priori estimates for solution of one-dimensional mixed problem for one class of semi linear fourth order equations / The USA Journal of Applied Sciences. — 1. — 2016. — P. 15–19.