УДК 539.3

Богатирчук Анатолій Степанович
кандидат фізико-математичних наук,
доцент кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.
Національний університет харчових технологій
Богатырчук Анатолий Степанович
кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры высшей математики им. проф. Можара В.И.
Национальный университет пищевых технологий
Bogatyrchuk Anatoliy
Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor
National University of food technologies

Гузенко Світлана Володимирівна
асистент кафедри вищої математики ім. проф. Можара В.І.
Національний університет харчових технологій
Гузенко Светлана Владимировна
ассистент кафедры высшей математики им. проф. Можара В.И.
Национальный университет пищевых технологий
Guzenko Svitlana
Assistant
National University of food technologies

ВИЗНАЧЕННЯ НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В ОРТОТРОПНІЙ ЦИЛІНДРИЧНІЙ ОБОЛОНЦІ З ОТВОРАМИ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В ОРТОТРОПНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКЕ С ОТВЕРСТИЯМИ

DETERMINATION OF THE STRESSED STATE IN ORTHOTROPIC CYLINDRICAL SHELL WITH HOLES

Анотація. *Подана методика визначення напружень в ортотропній циліндричній оболонці, послабленої двома круговими отворами на одній напрямній. Використано модель оболонок типу Тимошенка. Застосовано метод скінчених елементів. Досліджено розподіл напружень навколо отворів від зміни зсувної жорсткості матеріалу оболонки.*
Ключові слова: *ортотропна оболонка з круговими отворами, метод скінченних елементів.*

Аннотация. *Приведена методика определения напряжения в ортотропной цилиндрической оболочке, ослабленной двумя круговыми отверстиями на одной направляющей. Использовано модель оболочек вида Тимошенко. Использован метод конечных элементов. Исследовано распределение напряжения вокруг отверстий от изменения жесткости материала оболочки.*
Ключевые слова: *ортотропная оболочка с круговым отверстием, метод конечных элементов.*

Summary. *The method of determination of stresses in orthotropic cylindrical shell with two holes on one guide was given. The shells model of Timoshenko was used. The method of finite elements was used. The strain distribution around the holes on changed of shear stiffness of shell material was investigated.*
Key words: *orthotropic shell with the circular holes, finite elements method.*

Вступ. Інтенсивне впровадження композитних матеріалів потребує розробки розрахункових моделей і методів, що враховують особливості структури і поведінки цих матеріалів. До таких особливостей, як відомо, належать їх ортотропія, шаруватий характер і порівняно низька міцність і жорсткість в напрямках, що не збігаються з напрямками армування. Ці особливості ускладнюють розрахункові моделі. Як елементи конструкцій в різних областях промисловості часто використовуються оболонки з отворами, виготовлені з ортотропних матеріалів. Тому вони потребують вдосконалення та розробки нових методів дослідження напружено-деформованого стану в них.

Методи досліджень. Розглянемо напружений стан циліндричної оболонки із композитного матеріалу, послабленої двома круговими отворами, розміщеними на одній твірній. А криволінійна система координат (α,β) розміщена так, що вісь α збігається з твірною, а вісь β збігається з напрямною, що проходить через середину лінії центрів отворів. Оболонка навантажена внутрішним тиском інтенсивності q_0.

Виділимо в оболонці окіл Ω, що містить отвори. Як відомо [1, с. 4], зони концентрації напружень навколо отворів мають локальний характер і практично затухають на відстані одного — двох діаметрів цих отворів. Тому припускаємо, що границя Γ околу Ω настільки віддалена від контурів отворів Γ_0, що зовні неї збурення напружень, спричинених наявністю отворів, практично затухають.

Віднесемо серединну поверхню оболонки до системи криволінійних ортогональних координат (α,β). В подальшому виходимо з варіаційного рівняння Лагранжа, записаного для околу Ω:

$$\iint_{\Omega}\left\{\delta V_0-\left(p_1\delta u_1+p_2\delta u_2+p_n\delta w+m_1\delta\gamma_1+m_2\delta\gamma_2\right)\right\}A_1A_2\,d\alpha\, d\beta-$$

$$-\int_{\Gamma_1}\left(T_{tt}^0\delta u_t+T_{ts}^0\delta u_s+T_{th}^0\delta w+G_{tt}^0\delta\gamma_t+G_{ts}^0\delta\gamma_s\right)d\Gamma=0,$$

$$\begin{gathered}\delta V=T_1\delta\varepsilon_1+T_2\delta\varepsilon_2+S_{12}\delta\delta_{12}+G_1\delta k_1+G_2\delta k_2+\\+2H_{12}\delta k_{12}+Q_1\delta\varepsilon_{13}+Q_2\delta\varepsilon_{23}\end{gathered}\tag{1}$$

де V_0 — питома енергія деформації;

$u_1,\ u_2,\ w,\ \gamma_1,\ \gamma_2$ — узагальнені переміщення серединної поверхні оболонки, через які виражається поле переміщень

$$\begin{gathered}U_1=u_1(\alpha,\beta)+z\gamma_1(\alpha,\beta),\\ U_2=u_2(\alpha,\beta)+z\gamma_2(\alpha,\beta),\quad (-h/2\le z\le h/2),\\ W=w(\alpha,\beta).\end{gathered}\tag{2}$$

Геометричні співвідношення між компонентами деформацій і узагальненими переміщеннями мають вигляд

$$\begin{gathered}\varepsilon_1=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}+k_\alpha w,\\ \varepsilon_2=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}+k_\beta w,\\ \varepsilon_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{u}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{v}{B}\right)-2k_{\alpha\beta}w,\\ \varepsilon_{13}=\gamma_1+\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\delta\left(-k_\alpha u+k_{\alpha\beta}v\right),\\ \varepsilon_{23}=\gamma_2+\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\delta\left(-k_\beta v+k_{\alpha\beta}u\right),\\ \chi_1=\frac{1}{A}\frac{\partial\gamma_1}{\partial\alpha}+\frac{\gamma_2}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta},\ \chi_2=\frac{1}{B}\frac{\partial\gamma_2}{\partial\beta}+\frac{\gamma_1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha},\\ 2\chi_{12}=\frac{A}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\gamma_1}{A}\right)+\frac{B}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\gamma_2}{B}\right).\end{gathered}\tag{3}$$

Співвідношення пружності для композитної оболонки будуть:

$$\begin{gathered}T_1=B_{11}\varepsilon_1+B_{12}\varepsilon_2+B_{13}\varepsilon_{12},\\ T_2=B_{22}\varepsilon_2+B_{12}\varepsilon_1+B_{23}\varepsilon_{12},\\ S_{12}=B_{13}\varepsilon_1+B_{23}\varepsilon_2+B_{33}\varepsilon_{12},\\ G_1=D_{11}\chi_1+D_{12}\chi_2+D_{13}2\chi_{12},\\ G_2=D_{22}\chi_2+D_{12}\chi_1+D_{23}2\chi_{12},\\ H_{12}=D_{13}\chi_1+D_{23}\chi_2+D_{33}2\chi_{12},\\ Q_1=K_1\varepsilon_{13},\ Q_2=K_2\varepsilon_{23}.\end{gathered}\tag{4}$$

Тут $B_{ij},\ D_{ij},\ K_i$ — узагальнені жорсткості матеріалу оболонки.

Для ортотропної оболонки вони будуть такими:

$$B_{ij}=c_{ij}h,\ D_{ij}=\frac{h^3}{12}c_{ij},\ K_1=\mu hG_{13},\ K_2=\mu hG_{23}$$

$$c_{11}=\frac{E_1}{1-\nu_1\nu_2},\ c_{22}=\frac{E_2}{1-\nu_1\nu_2},$$

$$c_{12}=E_1\nu_2(1-\nu_1\nu_2),\ c_{13}=c_{23}=0,$$

$$c_{33}=G_{12},\ \mu_1=\mu_1=5/6$$

Граничні умови на контурах отворів запишуться у вигляді:

$$\begin{gathered}T_\rho=\frac{q_0R}{2}(1-\cos 2\theta),\ S_{\rho\theta}=\frac{q_0R}{2}\sin 2\theta,\\ Q=-\frac{qr}{2},\ G_\rho=H_{\rho\theta}=0.\end{gathered}\tag{5}$$

Підставивши (3) в (4), а останнє — в (1) з урахуванням (5), отримаємо варіаційне рівняння відносно змінних $u_1,\ u_2,\ w,\ \gamma_1,\ \gamma_2$:

$$I(u_1,u_2,w,\gamma_1,\gamma_2)=0.$$

Для розв'язку задачі застосуємо метод скінчених елементів [2, с. 230]. Розбиваємо область на квадратичні ізопараметричні елементи, що мають по вісім вузлів. На кожному з цих елементів вводимо локальну систему координат (ξ,η) таку, що $|\xi|\le 1,\ \ |\eta|\le 1.$

Таблиця 1

Коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль та моментів

θ	0	$\pi/6$	$2\pi/6$	$3\pi/6$	$4\pi/6$	$5\pi/6$	π
$G_{13}/E_1 = G_{23}/E_1 = 100$ $E_1/E_2 = 0{,}72,\ G_{12}/E_1 = 0{,}11$	$\frac{6{,}61}{-0{,}89}$	$\frac{2{,}51}{0{,}05}$	$\frac{0{,}66}{0{,}12}$	$\frac{0{,}72}{1{,}23}$	$\frac{1{,}31}{1{,}22}$	$\frac{2{,}51}{1{,}42}$	$\frac{10{,}45}{4{,}65}$
$G_{13}/E_1 = G_{23}/E_1 = 0{,}01$ $E_1/E_2 = 0{,}72, G_{12}/E_1 = 0{,}11$	$\frac{7{,}97}{-1{,}84}$	$\frac{3{,}52}{0{,}05}$	$\frac{1{,}33}{0{,}81}$	$\frac{0{,}45}{4{,}12}$	$\frac{1{,}22}{0{,}11}$	$\frac{2{,}51}{-0{,}01}$	$\frac{8{,}60}{-3{,}90}$

Подана таблиця є розробкою авторів

В результаті відповідних перетворень отримуємо систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\sum_{n=1}^{N}\left(A_i^{1,n}u_1^n + A_i^{2,n}u_2^n + A_i^{3,n}w^n + A_i^{4,n}\gamma_1^n + A_i^{5,n}\gamma_2^n\right) = B_i \qquad (6)$$

$$(i = 1,\ 2,\ 3,\ldots,\ 5N)$$

де N — число вузлів сітки, $u_1^n,\ldots,\gamma_2^n$ — шукані переміщення в n-му вузлі області оболонки. Величини $A_i^{k,n}$ визначають матрицю жорсткості. Матриця симетрична і має стрічкову структуру. Ширина стрічки залежить від способу нумерації вузлів. Розбивка області Ω на елементи, інтегрування, формування матриці системи рівнянь (6) і її розв'язок виконуються на комп'ютері за допомогою програми, складеної на мові С++ [3, с. 71].

Як приклад, проведено обчислення для оболонки з такими фізико-геометричними параметрами:

$$r_0/h = 10,\ \ r_0/R = 0{,}16.$$

Припускалось, що оболонка знаходилась під внутрішнім тиском інтенсивності p_0, а отвори закриті кришками, які передають на контур лише дію поперечної сили. Внаслідок симетрії відносно осей координат розрахунки проводились для чверті оболонки. Визначався напружено-деформований стан оболонки при фіксованій відстані між отворами $l\ (l/r_0 = 2{,}5)$, в залежності від параметрів ортотропії обчислювались коефіцієнти концентрації кільцевих зусиль T_θ/p_0R (в чисельнику) і максимальних по товщині оболонки кільцевих моментів $6G_\theta/p_0Rh$ (в знаменнику) по контуру отвору в інтервалі від $\theta = 0$ (найбільше віддалена точка контура першого отвору до контура другого отвору) до $\theta = \pi$ (найменше віддалена) з кроком $\pi/6$. Результати розрахунків наведені в табл. 1.

Висновки. В результаті проведених досліджень: розроблено алгоритм знаходження напружено-деформованого стану в циліндричних оболонках з отворами, виготовлених з ортотропного матеріалу, виведені вирази коефіцієнтів для формування матриці системи лінійних алгебраїчних рівнянь, до яких звелась задача, а також складена програма на алгоритмічній мові С++, отримані конкретні числові результати.

Розроблена методика дозволяє обчислювати напружено-деформований стан в в довільній точці ортотропної циліндричної оболонки з двома отворами.

Література

1. Гузь, О. М. Концентрація напружень біля отворів в оболонках із композитних матеріалів / О. М. Гузь, І. С. Чернишенко, К. І. Шнеренко // Прикл.механіка. — 2001. — 37, № 2. — С. 3–44.

2. Пелех Б. Л. Слоистые анизотропные пластины и оболочки с концентраторами напряжений / Б. Л. Пелех, В. А. Лазько — Киев: Наук. Думка, 1982. — 296 с.

3. Глинський, Я.М. С++ і С++ Builder. / Я. М. Глинський, В. Є. Анохін, В. А. Ряжська. — Львів, 2003. — 192 с.