УДК 514.1

Калашникова Лариса Евгеньевна
кандидат биологических наук,
доцент кафедры биомедицинской инженерии
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»
Kalashnikova Larysa
PhD in Biology, Assistant Professor of the
Department of Biomedical Engineering
National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

Лысак Кристина Евгеньевна
художник
Национальный драматический театр имени Леси Украинки
Lysak Kristina
Artist
Lesya Ukrainka Natsional Dramatic Theater

Рыльцев Евгений Владимирович
доктор физико-математических наук,
профессор кафедры графического дизайна
Межрегиональная академия управления персоналом
Ryltcev Evgehiy
Doctor of Physical and Mathematical Sciences,
Professor of the Department of Graphic Design
Interregional Academy of Personnel Management

DOI: 10.25313/2520-2057-2018-8-3745

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ СОПРОВОЖДЕНИЕ ПРИЕМОВ ПЕРСПЕКТИВНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОЕЦИРОВАНИЯ

MATHEMATICAL SUPPORT OF PERSPECTIVE LINEAR PROJECTION PROJECTING

Аннотация. *Предложена методика вычисления координат точки на картинной плоскости при перспективном проецировании объёмного объекта. Решается также обратная задача.*
Ключевые слова: *количественное значение координат, тримерный объъект, перспективная проекция.*

Summary. *The method for calculating the coordinates of a point on the picture plane is proposed for a perspective projection of a volumetric object. The inverse problem is also solved.*
Key words: *quantitative value coordinate trimeric object perspective projection.*

При решении задач проективной геометрии возникает, в ряде случаев, необходимость иметь на плоскости («картине») количественное значение координат изображаемого реального тримерного объекта относительно каких-либо иных элементов на «картине» и(или) предметов окружающего пространства, к которому может быть «привязана» и сама «картина». Это важно, в частности, для геодезических, топографических и других проблем. В популярных учебниках [1–5] поднятый вопрос не акцентируется. Это вызывает потребность в его специальном рассмотрении, чему и посвящается настоящее исследование. В качестве аппарата геометрических преобразований в данной работе используется проецирующий аппарат перспективной проекции [5; 7], из которого основными для нас элементами будут являться: «предметная плоскость» — она же «горизонтальная» плоскость — H, «картинная» плоскость («картина») — она же «фронтальная» плоскость — V, а также «точка наблюдения» («точка зрения» [3; 4]) — S и наблюдаемый объект — А, проявляющийся в перспективной проекции в виде точки А′ на картинной плоскости как точки пересечения «картины» проецирующим лучём (SA) (рис. 1–4). В качестве важного элемента проецирующей системы используется здесь также «профильная» плоскость — W [1–5]. Для упрощения процедуры вычислений объект А принимался за материальную точку, т.е. за такое пространственное образование, размеры которого бесконечно малы по сравнению с длиной проецирующего луча (SA). Предполагалось в таком случае, что с помощью разработанного здесь аппарата определение координат спроецированных точек протяжённого объекта сведётся к определению координат множества спроецированных точек этого объекта или же координат каких-либо его реперных точек. Исходными данными для решения поставленной задачи являлись известные на проецирующем аппарате координаты точки наблюдения — S и наблюдаемого объекта — A. То есть, величины S_x , S_y , S_z , и A_x , A_y , A_z , являются заданными. Причём, если координаты точки S и сама эта точка находились в «нейтральном пространстве» [3; 4], т.е. «перед» листом бумаги, на котором изображён рисунок и с которым совпадает картинная плоскость V, то координаты объекта наблюдения A и сам, естественно, объект лежали «за» этим листом, т.е. в «предметном пространстве» [5; 7] (рис. 1–4). Все символы и обозначения, используемые в настоящей работе, взяты из [1–5]. Для краткости и упрощения изложения координаты «действующих» элементов рисунка используются здесь в их абсолютном значении независимо от положения этих элементов в координационном пространстве. Отметим также, что каждый рисунок «наполнялся» оптимальным количеством элементов и обозначений, чем преследовалась цель достичь максимальной наглядности изображаемого даже, если эти элементы и обозначения не предполагались быть использованными в обсуждении по ходу исследования. Для облегчения анализа полученых здесь результатов, при их сравнении друг с другом обозначения на рисунках имеют по возможности унитарный характер. Для вычислений использовался математический аппарат из [1; 6].

Поставленная задача, а именно, определение координат точки A' на картинной плоскости может быть сформулирована в трёх вариантах, каждый из которых имеет три решения. Один из них реализуется, когда перпендикулярная к плоскости H плоскость «наблюдения» с лежащим в ней лучём (SA) перпендикулярна «картине». То есть, «смотрим прямо перед собой на картину». Это означает, что $S_x = A_x$. Другой вариант имеем, когда «смотрим через картину» на объект А «влево» от ортогонального к «картине» направления, т.е. $S_x > A_x$ (рис. 1; 2).

И ещё один — это, когда «смотрим» на объект A «вправо» от той же «ортогональности», т.е. когда $A_x > S_x$ (рис. 3; 4). Решение задачи в каждом из указанных вариантов в свою очередь может быть реализовано также в трёх подвариантах. Один из них предполагает наблюдение объекта A «снизу – вверх»,

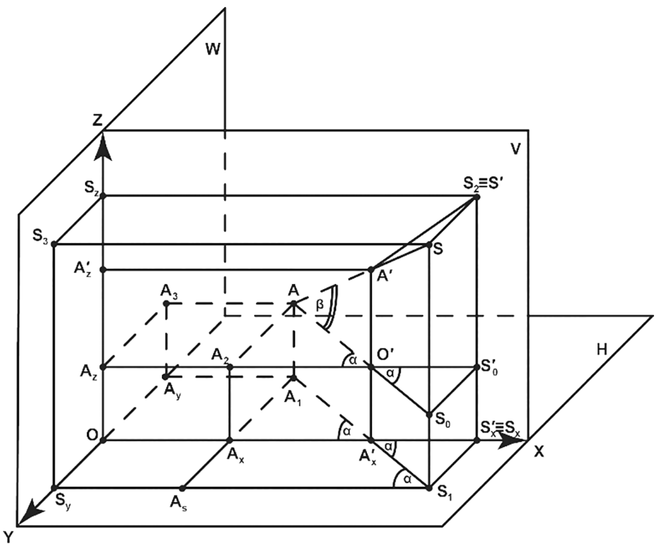

Рис. 1. Проецирующий аппарат перспективного проецирования точки А, наблюдаемой из точки S при условиях $S_x > A_x$; $S_z > A_z$

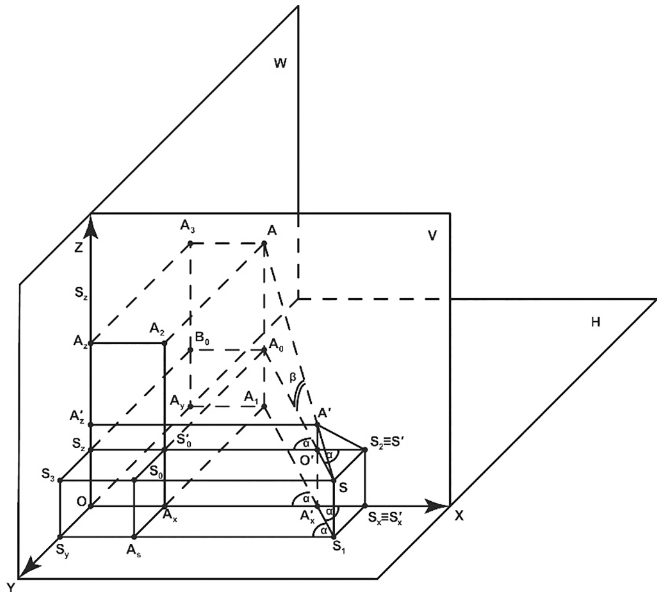

Рис. 2. Проецирующий аппарат перспективного проецирования точки А, наблюдаемой из точки S при условиях $S_x > A_x$; $S_z < A_z$

т.е., когда $S_z < A_z$ (рис. 2; 4). Второй возможен при наблюдении объекта A «сверху – вниз». При этом $S_z > A_z$. (рис. 1; 3). Третий — реализуется при $S_z = A_z$. Во всех вариациях задачи $A'_y \equiv 0$, поскольку решение этой задачи находится на плоскости («картине»), т.е, в двумерном пространстве, метрика которого задаётся двумя координатами — аппликатой и абсциссой. Рассмотрим рис. 1. Он соответствует условию задачи при $S_x > A_x$ и её подварианту с условием $S_z > A_z$. Угол «зрения», т.е., угол, под которым плоскость «наблюдения» SAA_1S_1 пересекает «картинную» плоскость V по линии $A' \ {}'_x$ — это угол α. Поскольку, как видно из рис. 1, треугольник $\Delta S_1A'_xS'_x = \Delta S_0O'S'_0$, а взаимно параллельные плоскости этих треугольников перпендикулярны «картинной» плоскости, то $\angle S_1A'_xS'_x = \angle S_0O'S'_0 = \angle A_2O'A = \angle A_xA'_xA_1 = \angle\alpha$.

Угол $\angle SAS_0 = \beta$ — это угол между проецирующим лучом (SA) и горизонтом, представленным прямой (AS_0). В таких обозначениях могут быть записаны теперь выражения для абсциссы — A'_x и аппликаты — A'_z точки A' как перспективной проекции точки (объекта) A. А именно, из рис. 1 следует: $A'_x = (OA_x) + (A_xA'_x)$. Но $(OA_x) = A_x$, а длина прямой ($A_xA'_x$) — одного из катетов $\Delta A_1A_xA'_x$ — записывается как: $(A_xA'_x) = (A_1A_x)ctg\,\alpha = A_yctg\alpha$. Из $\Delta A_1A_sS_1$ имеем $ctg\alpha = (A_sS_1)/(A_1A_s)$. Катеты этого треугольника — $(A_sS_1) = S_x - A_x$ и $(A_1A_s) = S_y + A_y$. Следовательно, $ctg\alpha = (S_x - A_x)/(S_y + A_y)$. Тогда

$$A'_x = A_x + A_y(S_x - A_x)/(A_y + S_y).$$

Для значения абсциссы точки A' можно получить и независимое от предыдущего выражение, используя при этом в качестве исходных параметров координаты точки наблюдения (точки S). Путём несложных геометрических процедур (подобных приведенным выше) с соответствующими прямоугольными треугольниками из рис. 1 получим:

$$A''_x(\equiv A) = S_x - S_y(S_x - A_x)/(S_y + A_y).$$

Значение аппликаты точки A' на «картине» (рис. 1) можно записать так:

$$A'_z = (OA_z) + (A_zA'_z) = A_z + (AO'),$$

где отрезок $(A'O') = (AO')tg\beta$. Из $\Delta AA_2O'$ имеем

$$(AO') = (AA_2)/\sin\alpha = A_y/\sin\alpha.$$

Таким образом, получаем

$$A'_z = A_z + (A_y/\sin\alpha)tg\beta.$$

Значение $tg\beta$ можно определить из ΔSAS_o. А именно, $tg\beta = (SS_0)/(AS_0)$, где $(SS_0) = S_z - A_z$, а $(AS_0) = (AO') + (O'S_0)$. Если учесть, что $(O'S_0) = (S_0S'_0)/\sin\alpha$, при $(S_0S'_0) = (S_1S'_0) = S_y$ и $(O'S_o) = S_y/\sin\alpha$, то $(AS_0) = A_y/\sin\alpha + S_y//\sin\alpha$. Тогда

$$tg\,\beta = \left[(S_z - A_z)/(A_y + S_y)\right]\sin\alpha,$$

а $$(A'O') = (A_y/\sin\alpha)tg\,\beta = \\ = (A_y/\sin\alpha)\left[(S_z - A_z)/(A_y + S_y)\right]\sin\alpha = \\ = A_y(S_z - A_z)/(A_y + S_y).$$

Подставляя последнее выражение в уравнение для A'_z (см. выше), получим

$$A'_z = A_z + A_y(S_z - A_z)/(A_y + S_y).$$

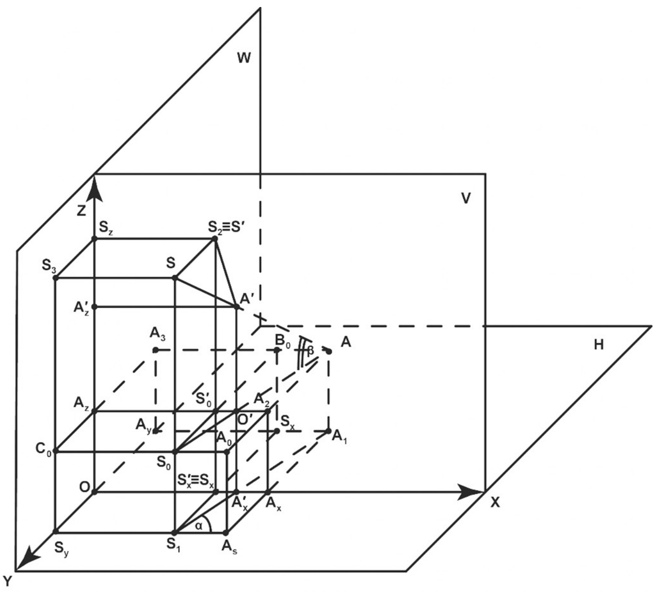

Рис. 3. Проецирующий аппарат перспективного проецирования точки А, наблюдаемой из точки S при условиях $S_x < A_x$; $S_z > A_z$

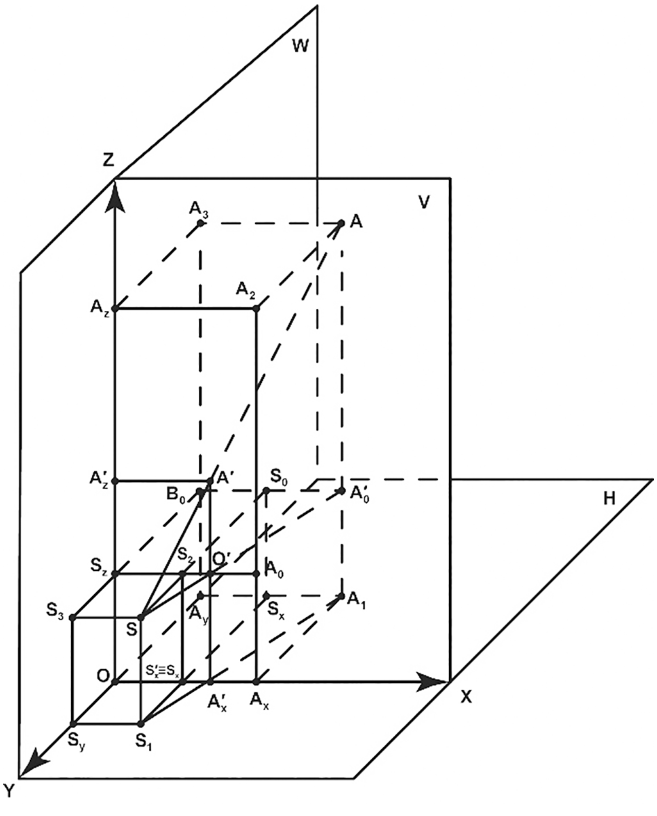

Рис. 4. Проецирующий аппарат перспективного проецирования точки А, наблюдаемой из точки S при условиях $S_x < A_x$; $S_z < A_z$

А при использовании (в качестве исходных независимых параметров) координат точки S имеем:

$$A_z''(A_z') = S_z - S_y(S_z A_z)/(S_y + A_y).$$

В случае, когда проецирующий луч наблюдения (SA) направлен «снизу – вверх – влево», т.е, когда $S_x > A_x$ и $S_z < A_z$ (рис.2), абсцисса точки A' как функция координат точек A и S определяется тем же соотношением, что и в первом случае (рис. 1). А именно (рис. 2), $A_x' = (OA_x) + (A_x A_x') = A_x + A_y ctg\alpha$, т.е. $A_x' = A_x + A_y(S_x A_x)/(S_y + A_y)$ и, соответственно, $A_x''(A_x') = S_x - S_y(S_x - A_x)/(S_y + A_y)$ (табл. 1).

Подобно первому случаю (рис. 1) получаем аппликату точки A' и по рис. 2. Однако это выражение несколько отлично от предыдущего случая, а именно, $A_z' = A_z - A_y(A_z - S_z)/(A_y + S_y)$ и $A_z''(\equiv A_z') = S_z + S_y(A_z - S_z)//(S_y + A_y)$ (табл. 1). Отличие определяется превышением аппликаты точки А над аппликатой точки S и тем, что вершина угла $\angle\beta$ находится в этом случае в нейтральном пространстве проецирующего аппарата [1, 4] в то время как в случае, представленном на рис. 1, она находится в предметном пространстве. Именно от этого зависит вид формулы определения $tg\beta$, применяющейся в ходе вычисления величины $A_z'(\equiv A_z')$.

Рис. 3 соответствует условию стоящей здесь задачи при $S_x < A_x$ и $S_z >> A_z$ с вершиной угла $\angle\beta$ в предметном пространстве проецирующего аппарата [3; 4]. Вычисления проводились по уже использованной здесь схеме при решении задачи в её первом и втором подвариантах (рис. 1; 2). В подварианте, представляемом рис. 3, вычисления базировались на свойствах прямоугольных треугольников: ΔSS_0A; $\Delta A'O'A$ и ΔS_0B_0A. В результате имеем

$$A_x' = A_x - A_y(A_x - S_x)/(A_y + S_y)$$

при $A_x''(\equiv A_x') = S_x + S_y(A_x - S_x)/(S_y + A_y)$
и $A_z' = A_z + A_y(S_z - A_z)/(A_y + S_y)$
и при $A_z''(A_z') = S_z - S_y(S_z - A_z)/(S_y + A_y)$. (табл. 2).

И, наконец, рис. 4, который соответствует наблюдению объекта A «направо – вверх», т.е, $S_x < A_x$ и $S_z < A_z$. Используемые для расчётов прямоугольные треугольники на рис. 4 — это ΔASA_0; ($\angle ASA_0 = \beta$ находится вершиной в «нейтральном» пространстве) и подобный ему $\Delta A'SO'$; $\Delta S_xS_1A_1 = \Delta S_0SA_0$ и подобные им $\Delta S_x'S_1A_x' = \Delta S_2SO'(\angle S_2O'S = \angle S_x'A_x'S_1 = \alpha)$. Основываясь на их свойствах и используя применённый выше способ преобразований исходных данных, можно записать (табл. 2):

$$A_x' = A_x - A_y(A_xS_x)/(A_y + S_y)$$

при $A_x''(\equiv A_x') = S_x + S_y(A_x - S_x)//(S_y + A_y)$
и $A_z' = A_z - A_y(A_z - S_z)/(A_y + S_y)$
при $A_z''(\equiv A_z') = S_z + S_y(A_z - S_z)/(S_y + A_y)$.

Полученные выражения без труда преобразуются в формулы для определения значений A_x', A_z' и в случае варианта условия задачи, в котором

Таблица 1

Формулы для вычисления координат точки A' — перспективной проекции точки A на картинной плоскости при $S_x > A_x$. S — точка наблюдения

п/п	Условия задачи	Расчетные формулы
1	$S_z > A_z$ (рис. 1)	$A_x' = A_x + A_y \cdot (S_x - A_x)/(A_y + S_y)$ $A_x'' = S_x - S_y \cdot (S_x - A_x)/(S_y + A_y)$
		$A_z' = A_z + A_y \cdot (S_z - A_z)/(A_y + S_y)$ $A_z'' = S_z - S_y \cdot (S_z - A_z)/(S_y + A_y)$
2	$S_z < A_z$ (рис. 2)	$A_x' = A_x + A_y \cdot (S_x - A_x)/(A_y + S_y)$ $A_x'' = S_x - S_y \cdot (S_x - A_x)/(S_y + A_y)$
		$A_z' = A_z - A_y \cdot (A_z - S_z)/(A_y + S_y)$ $A_z'' = S_z + S_y \cdot (A_z - S_z)/(S_y + A_y)$
3	$S_z = A_z$	$A_x' = A_x + A_y \cdot (S_x - A_x)/(A_y + S_y)$ $A_x'' = S_x - S_y \cdot (S_x - A_x)/(S_y + A_y)$
		$A_z' = S_z = A_z$

Таблица 2

Формулы для вычисления координат точки A' — перспективной проекции точки A на картинной плоскости при $S_x < A_x$. S_x — точка наблюдения

п/п	Условия задачи	Расчетные формулы
1	$S_z > A_z$ (рис. 3)	$A_x' = A_x - A_y \cdot (A_x - S_x)/(A_y + S_y)$ $A_x'' = S_x + S_y \cdot (A_x - S_x)/(S_y + A_y)$
		$A_z' = A_z + A_y \cdot (S_z - A_z)/(A_y + S_y)$ $A_z'' = S_z - S_y \cdot (S_z - A_z)/(S_y + A_y)$
2	$S_z < A_z$ (рис. 4)	$A_x' = A_x - A_y \cdot (A_x - S_x)/(A_y + S_y)$ $A_x'' = S_x + S_y \cdot (A_x - S_x)/(S_y + A_y)$
		$A_z' = A_z - A_y \cdot (A_z - S_z)/(A_y + S_y)$ $A_z'' = S_z + S_y \cdot (A_z - S_z)/(S_y + A_y)$
3	$S_z = A_z$	$A_x' = A_x - A_y \cdot (A_x - S_x)/(A_y + S_y)$ $A_x'' = S_x + S_y \cdot (A_x - S_x)/(S_y + A_y)$
		$A_z' = S_z = A_z$

$S_x = A_x$ (табл. 3). В этом варианте как для случая $S_z > A_z$, так и для случая $S_z < A_z$ абсцисса точки A' совпадает со значениями абсцисс точек наблюдения и объекта наблюдения, т.е. $A'_x\left(\equiv A''_x\right)\left(S_x = A_x\right)$. Выражения для аппликаты точки A' в этих двух случаях такого варианта условия задачи совпадают с подобными выражениями, выведенными для подвариантов, рассмотренных выше.

Применяя приёмы проведенного здесь ранее анализа к соответствующему графическому построению, легко можно получить вариации координат точки A' и при условиях $S_z = A_z$. А именно, в этом случае при $S_x < A_x$ $A'_x = A_x - A_y\left(A_x S_x\right)/\left(A_y + S_y\right)$ и $A''_x\left(\equiv A'_x\right) = S_x + S_y\left(A_x S_x\right)/\left(S_y + A_y\right)$ (табл. 2), а, если $S_x > A_x$, то $A'_x = A_x + A_y\left(S_x - A_x\right)//\left(S_y + A_y\right)$ и $A''_x\left(\equiv A'_x\right) = S_x - S_y\left(S_x - A_x\right)/\left(S_y + A_y\right)$ (табл. 1), тогда как в обоих этих вариантах: $A'_z \equiv \left(S_z = A_z\right)$.

Последний подвариант координат точки A' из рассмотренной здесь процедуры перспективного проецирования реализуется при условиях — $S_x = A_x$ и $S_z = A_z$ (табл. 3). В этом случае координаты точки A' на картине выражаются как $A'_x\left(\equiv A''_x\right)\left(S_x = A_x\right)$ и $A'_z\left(\equiv A''_z\right) = \left(S_z = A_z\right)$.

Следует отметить, что приведенные в табл. 1–3 независимые уравнения для определения координат точек перспективной проекции тримерного объекта могут быть использованы и для решения обратной задачи. А именно, по заданным координатам точек перспективного изображения объекта можно определить его реальные координаты и, соответственно, его размеры. Заданным в таком случае должно быть и положение наблюдателя (точки S). Для указанной процедуры необходимо составить и решить соответствующую систему из трёх уравнений, например, уравнения для координат A'_x, A''_x и A'_z (или A''_z). Это приведёт к однозначному определению величин A_x, A_y, A_z, а, при необходимости, и размеров наблюдаемого объекта. Последнее может быть выражено в виде разницы соответствующих натуральных координат объекта — $\Delta A_i\left(i = 1;2;3;\ldots\right)$ с учётом необходимых масштабов.

Таблица 3

Формулы для вычисления координат точки A' — перспективной проекции точки А на картинной плоскости при $S_x = A_x$. S_x — точка наблюдения

п\п	Условия задачи	Расчетные формулы
1	$S_z > A_z$	$A'_x = S_x = A_x$
		$A'_z = A_z + A_y \cdot \left(S_z - A_z\right)/\left(A_y + S_y\right)$ $A''_z = S_z - S_y \cdot \left(S_z - A_z\right)/\left(S_y + A_y\right)$
2	$S_z < A_z$	$A'_x = S_x = A_x$
		$A'_z = A_z - A_y \cdot \left(A_z - S_z\right)/\left(A_y + S_y\right)$ $A''_z = S_z + S_y \cdot \left(A_z - S_z\right)/\left(S_y + A_y\right)$
3	$S_z = A_z$	$A'_x = S_x = A_x$
		$A'_z = S_z = A_z$

Литература

1. Виноградов Н. Н. Начертательная геометрия, — Минск: «Вышейшая школа», 1977. — 368 с.
2. Жолдак, М. І. Грохольська А. В., Жильцов О. Б. Математика (тригонометрія, геометрія, елементи стохастики). — К.: МАУП, 2004. — 456 с.
3. Колотов С. М. Начертательная геометрия — К.: «Вища школа», 1975. — 261 с.
4. Макарова М. Н. Перспектива. — М.: «Просвещение», 1989. — 190 с.
5. Михайленко В. Є., Євстіфеєв М. Ф., Ковальов С. М. Нарисна геометрія. — К.: «Вища школа», 2004. — 300 с.
6. Нікулін О. В. Геометрія. Поглиблинний курс. — К.: «ПЕРУН», 1999. — 49 с.
7. Чалый А. Т. Курс начертательной геометрии. — К.: МАШГИЗ, 1952. — 279 с.