

МОДЕЛЮВАННЯ НЕСТАЦІОНАРНИХ ТЕМПЕРАТУРНИХ ПОЛІВ У СУЦІЛЬНОМУ ЦИЛІНДРІ, ЯКИЙ ОБЕРТАЄТЬСЯ

Бердник М.Г., Воробйов К.Ю.

Дніпропетровський національний університет імені Олеся Гончара

У роботі для дослідження процесу теплообміну в циліндрі, що обертається, був використаний метод кінцевих різниць. Розроблено програмне забезпечення на Microsoft Visual Basic for Application, що дозволяє отримувати чисельні результати. Приведено результати роботи програми.

Ключові слова: температурне поле, метод кінцевих різниць, крайова задача, рівняння теплопровідності, Visual Basic for Application.

Постановка проблеми. В сучасному виробництві вихід із ладу кожної деталі може суттєво вплинути на хід виробництва та якість отриманого результату. Розглянемо прокат металевих листів на заводі. Металевий розжарений лист рухається за допомогою валків. При цьому валки можуть сильно нагріватися і, при досягненні певних критичних температур, деформуватися. Що в свою чергу викликає брак виробництва. А отже виникає необхідність аналізу температури валку та аналітично вирахувати необхідне охолодження для нього. Внутрішнє охолодження прокатних валків істотно поліпшує стабілізацію їхнього температурного режиму й теплового профілю. Отже, вивчення теплових явищ, пов'язаних із внутрішнім охолодженням валків, представляє теоретичний і практичний інтерес. Це дозволить уникнути досягнення небажаних деформацій.

В данні роботі представлено циліндр як спрощену модель прокатного валку. Циліндр знаходиться під впливом теплового потоку. Тепловий потік відображає дію розжареного металевого листа на валок.

Постановка задачі. Необхідно знайти нестационарне температурне поле циліндра, який обертається з постійною кутовою швидкістю навколо осі OZ радіуса R.

Виклад основного матеріалу дослідження. В роботі розглянуто два випадки: теплофізичні властивості валка не залежать і залежать від температури [2]. На поверхні циліндра відома температура як функція часу і швидкості обертання.

У першому випадку необхідно знайти розв'язок рівняння теплопровідності в циліндричних координатах [1]:

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) \quad (1)$$

а початкові і граничні умови запишуться таким чином:

$$T(r, 0) = T_n, \quad (2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial T(0,t)}{\partial r} = 0 \\ T(R,t) = T_n(t, \omega) \end{cases} \quad (3)$$

де ρ – щільність середовища; c – питома теплоємність; $T(r,t)$ – температура середовища; λ – коефіцієнт теплопровідності; t – час.

Для вирішення сформульованої крайової задачі застосуємо метод кінцевих різниць на основі невяної чотирьох точкової схеми [3, 4].

Спочатку введемо рівномірну просторову сітку:

$$r_i = (i - 1)h, i = 1, \dots, N;$$

$$h = \frac{R}{N - 1}$$

Аналогічно вводиться тимчасова сітка:

$$t_n = n \cdot \tau, n = 0, 1, \dots, M;$$

Замінімо диференціальні оператори в рівнянні (1) на їх кінцево-різницеви аналоги:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} \quad (4)$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{1}{h^2} \left[r_{i+\frac{1}{2}} \cdot T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}} \right) T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot T_{i-1}^{n+1} \right] \quad (5)$$

де:

$$r_{i-\frac{1}{2}} = \frac{r_{i-1} + r_i}{2}, r_{i+\frac{1}{2}} = \frac{r_i + r_{i+1}}{2}$$

Таким чином, в результаті апроксимації похідних відповідними кінцевими різницями (4)-(5) отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{\lambda}{r_i h^2} \left[r_{i+\frac{1}{2}} \cdot T_{i+1}^{n+1} - \left(r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}} \right) T_i^{n+1} + r_{i-\frac{1}{2}} \cdot T_{i-1}^{n+1} \right] \quad (6)$$

$$i = 2, \dots, N - 1, n = 0, 1, \dots, M$$

Отриману систему можна звести до найбільш загального вигляду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i \quad (7)$$

де

$$A_i = \frac{\lambda}{h^2} \frac{r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i}, B_i = \frac{\lambda}{h^2} \frac{r_{i-\frac{1}{2}} + r_{i+\frac{1}{2}}}{r_i} + \frac{\rho c}{\tau}, C_i = \frac{\lambda}{h^2} \frac{r_{i-\frac{1}{2}}}{r_i}, F_i = -\frac{\rho c}{\tau} T_i^n$$

Такі рівняння називають трьох-точковими різницеви рівняннями другого порядку. Система (7) має трьох-діагональну структуру. У зв'язку з тим, що розглядається не стаціонарна задача, систему (7) необхідно розв'язувати на кожному проміжку часу.

Припустимо, що існують такі набори чисел α_i та β_i ($i = \overline{1, N-1}$), при яких

$$T_i^{n+1} = \alpha_i T_{i+1}^{n+1} + \beta_i, \quad (8)$$

тобто, трьох-точкове рівняння другого порядку (7) перетворюється у двох-точкове рівняння першого порядку (8). Зменшимо у зв'язку (8) індекс на одиницю і отриманий вираз $T_{i-1}^{n+1} = \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + \beta_{i-1}$ підставимо у рівняння (7):

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i \alpha_{i-1} T_i^{n+1} + C_i \beta_{i-1} = F_i$$

звідки отримуємо

$$T_i^{n+1} = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} T_{i+1}^{n+1} + \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}$$

Остання рівність має вигляд (8) і буде точно з ним співпадати, якщо при всіх $i = 2, 3, \dots, N-1$ виконується співвідношення.

$$\alpha_i = \frac{A_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}}, \quad \beta_i = \frac{C_i \beta_{i-1} - F_i}{B_i - C_i \alpha_{i-1}} \quad (9)$$

Для визначення α_i та β_i за (9) необхідно знати α_i та β_i , які можна знайти скориставшись лівою граничною умовою.

Далі за допомогою формули (8) послідовно знаходяться $T_{N-1}^{n+1}, T_{N-2}^{n+1}, \dots, T_2^{n+1}$, за умовою, що T_N^{n+1} знайдено з правої граничної умови.

Таким чином, розв'язок рівняння (7) таким способом називається – метод прогонки і зводиться до розрахунку за трьома формулами: знаходження, так званих, прогоночних коефіцієнтів α_i, β_i за формулами (9) при (пряма прогонка) а потім отри-

мання невідомих T_i^{n+1} за формулою (8) при $i = N-1, N-2, \dots, 2$ (зворотна прогонка).

Для успішного використання метода прогонки потрібно, щоб в процесі розрахунку не виникла ситуація з діленням на нуль, а при великих розмірностях систем не повинно бути швидкого росту погрешностей округлення.

Будемо називати прогонку коректною, якщо значення прогнаних коефіцієнтів (9) не обертаються в нуль, і стійкою, якщо $|\alpha_i| < 1$ при $i = \overline{1, N-1}$.

У першому випадку доведена теорема, яка надає достатні умови коректності та стійкості прогонки рівнянь (7):

$$|B_i| > |A_i| + |C_i| \forall i = \overline{2, N-1} \text{ та } |\alpha_1| < 1 \Rightarrow |\alpha_i| < 1 \quad (10)$$

які у багатьох додатках методу виконуються автоматично.

Повертаючись до системи (7), визначимо прогнаних коефіцієнтів та створимо повний алгоритм рішення отриманої системи.

У другому випадку необхідно знайти розв'язок нелінійного рівняння теплопровідності :

$$\rho c \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right), 0 < x < L. \quad (11)$$

з початковими і граничними

$$\begin{aligned} T(r, 0) &= T_0, \\ T(0, t) &= T_c, \\ T(L, t) &= T_n(t, \omega) \end{aligned}$$

Задачу будемо вирішувати на рівномірній сітці. Пластину розбиваємо по товщині на $N-1$ рівних проміжків.

Далі замінимо диференціальні оператори в (11) на їх різнищеві аналоги. Оскільки відмінність полягає в появі коефіцієнта теплопровідності, залежного від температури, то основний акцент зробимо на апроксимації дифузійного члена. Розглянемо явно-неявну схему.

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) = \frac{1}{h} \left(\lambda_{i+1/2}^{n+1} \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_{i+1}^{n+1}}{h} - \lambda_{i-1/2}^{n+1} \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{h} \right)$$

де

$$\lambda_{i+1/2}^n = \frac{\lambda_i^n - \lambda_{i+1}^n}{2}, \lambda_{i-1/2}^n = \frac{\lambda_{i-1}^n - \lambda_i^n}{2}$$

Таким чином, в результаті апроксимації частинних похідних відповідними кінцевими різницями отримуємо наступну систему лінійних алгебраїчних рівнянь:

$$\rho c \frac{T_i^{n+1} - T_i^n}{\tau} = \frac{1}{h} \left(\lambda_{i+1/2}^{n+1} \cdot \frac{T_{i+1}^{n+1} - T_i^{n+1}}{h} - \lambda_{i-1/2}^{n+1} \cdot \frac{T_i^{n+1} - T_{i-1}^{n+1}}{h} \right), \quad (12)$$

де

$$\lambda_{i+1/2}^n = \frac{\lambda_i^n - \lambda_{i+1}^n}{2}, \lambda_{i-1/2}^n = \frac{\lambda_{i-1}^n - \lambda_i^n}{2},$$

Отриману систему можна звести до найбільш загальному вигляду:

$$A_i T_{i+1}^{n+1} - B_i T_i^{n+1} + C_i T_{i-1}^{n+1} = F_i$$

де

$$A_i = C_i = \frac{\lambda_{i+1/2}^n}{h^2}, B_i = \frac{\lambda_{i+1/2}^n - \lambda_{i-1/2}^n}{h^2} + \frac{\rho c}{\tau}, F_i = -\frac{\rho c}{\tau} T_i^n$$

$$\lambda_{i+1/2}^n = \frac{\lambda_i^n - \lambda_{i+1}^n}{2}, \lambda_{i-1/2}^n = \frac{\lambda_{i-1}^n - \lambda_i^n}{2},$$

Прогнаних коефіцієнти знаходяться за формулами (9). Далі невідоме поле температури визначається за виразом (8).

Скористаємося лівим граничним умовою для визначення початкових прогнаних коефіцієнтів α_i та β_i зі співвідношенням $T_1 = \alpha_i T_2 + \beta_i$

На лівій межі стоїть умова симетрії:

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0; \frac{T_2 - T_1}{h} = 0; T_1 = T_2; \begin{cases} \alpha_1 = 1 \\ \beta_1 = 0 \end{cases}$$

А на правій межі температура відома $T|_{r=R} = T_h \cdot \eta(\sin \omega t)$,

де

$$\eta(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$$

У даній роботі для комп'ютерної реалізації розрахунку температурних полів та графічного їх відображення, використовувалися система програмування Microsoft Visual Basic for Application. Була розроблена програма за допомогою VBA-технологій.

Для першого випадку був розглянутий приклад: знайдемо температурне поле в безкінечному циліндрі радіуса $R = 0,1$ м через 5, 10, 30 і 60 секунд. Матеріал циліндра ($\lambda = 0,7$ Вт/(м°C), $\rho = 1500$ кг/м³, $c = 750$ Дж/(кг°C)). Начальна температура $T_0 = 20^\circ\text{C}$. На границі $r = R$ підтримується постійна температура $T_h = 100^\circ\text{C}$.

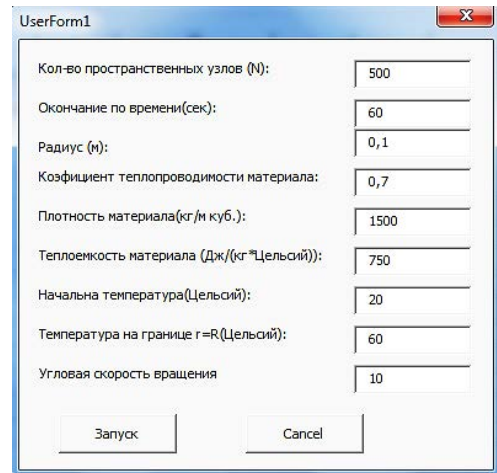


Рис. 1. Приклад форми вводу початкових даних
Джерело: розроблено авторами

Вихідні дані. Результатом роботи програми є графіки, які ілюструють температуру циліндра при різних значеннях кутової швидкості обертання 10, 1000.

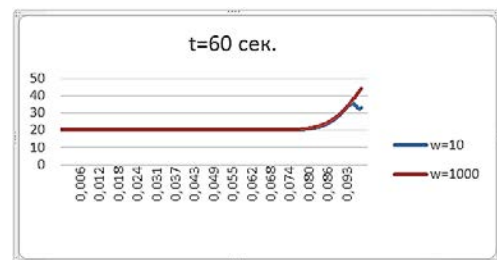


Рис. 2. Графік температурних полів при t = 60 сек
Джерело: розроблено авторами

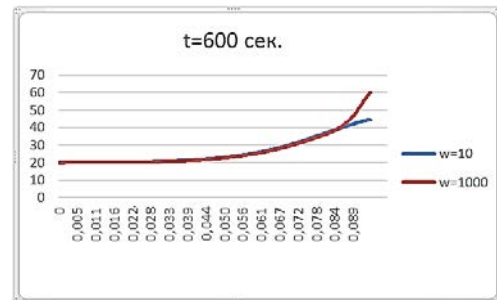


Рис. 3. Графік температурних полів при t = 600 сек
Джерело: розроблено авторами

Для другого випадку був розглянутий приклад. Вхідні дані. Якщо пластина виготовлена з діоксиду урану, то $\rho = 10950$ кг/м³, $c = 236$ Дж / (кг · К), $\lambda(T) = \frac{5500}{560+T} + 0,942 \cdot 10^{-10} T^3$. Пластина з розміром $L = 0,5$ м.

На кордонах підтримуються постійні температури $T_c = 0^\circ\text{C}$ при $x = 0$ і $T_h = 100^\circ\text{C}$ при $x = L$. Початкова температура області рішення $T_0 = 20^\circ\text{C}$.

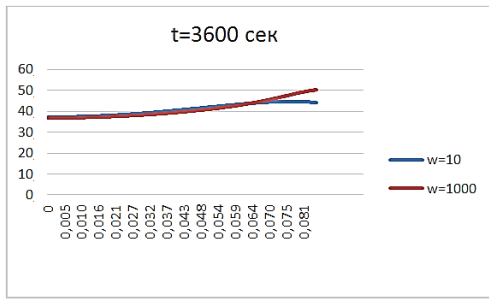


Рис. 4. Графік температурних полів при $t = 3600$ сек

Джерело: розроблено авторами

Рис. 5. Приклад форми вводу початкових даних

Джерело: розроблено авторами

Вихідні данні. Результатом роботи програми є графік, який ілюструє температуру пластины при різних значеннях часу 60, 600, 3600 секунд.

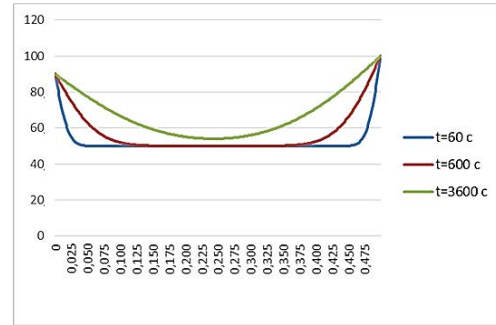


Рис. 6. Графік температурних полів при $t = 60, 600, 3600$ сек

Джерело: розроблено авторами

Висновки. В роботі для дослідження процесу теплообміну в циліндрі, що обертається, був використаний метод кінцевих різниць.

Рівняння теплопровідності в циліндричних і декартових системах координат шляхом апроксимації частинних похідних диференціального рівняння кінцевими різницями звели до системи лінійних алгебраїчних рівнянь для визначення температури, як локальної характеристики в кожному вузлі сітки. Отриману систему замкнули використовуючи різницево-подання граничних умов. У результаті отримали замкнуту систему лінійних алгебраїчних рівнянь, яку вирішили методами прогонки за допомогою ЕОМ.

Також в даній роботі продемонстровано розрахунок процесу тепло-обміну в циліндрі, що обертається. Розроблено програмне забезпечення на Microsoft Visual Basic for Application, що дозволяє отримувати чисельні результати.

Список літератури:

1. Лыков А.В. «Теория теплопроводности», – М., – 1967 г.
2. Карслоу Г., Егер Д. «Теплопроводность твердых тел», – 1964 г.
3. Самарский А.А. Теория разностных схем / А.А. Самарский. – М.: Наука, – 1989.
4. Годунов С.К. Разностные схемы / С.К. Годунов, В.С. Рябенский. – М.: Наука, – 1977.

Бердник М.Г., Воробьев К.Ю.

Днепропетровский национальный университет имени Олеса Гончара

МОДЕЛИРОВАНИЕ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В СПЛОШНОМ ЦИЛИНДРЕ, КОТОРЫЙ ВРАЩАЕТСЯ

Аннотация

В работе для исследования процесса теплообмена в вращающемся цилиндре был использован метод конечных разностей. Разработано программное обеспечение на Microsoft Visual Basic for Application, что позволяет получать численные результаты. Приведены результаты работы программы.

Ключевые слова: температурное поле, метод конечных разностей, краевая задача, уравнение теплопроводности, Visual Basic for Application.

Berdnik M.G., Vorobyov K.Y.

Dnepropetrovsk National University named after Oles' Gonchar

SIMULATION OF UNSTEADY TEMPERATURE FIELDS IN SOLID CYLINDER THAT ROTATES

Summary

In work for the study of heat transfer process in the cylinder rotating used the method of finite differences. The software is developed by Microsoft Visual Basic for Application, which allows to obtain numerical results.

Keywords: temperature field, the method of finite differences, boundary value problems, heat equation, Visual Basic for Application.