УДК 532.51:534-141

ВИПРОМІНЮВАННЯ АКУСТИЧНИХ ХВИЛЬ ЦИЛІНДРИЧНОЮ П'ЄЗОКЕРАМІЧНОЮ ОБОЛОНКОЮ

Бабаєв О.А., Штефан Н.І., Гнатейко Н.В.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут»

Наведена постановка і розв'язок задачі випромінювання акустичних хвиль гідроелектропружною системою, яка складається з тонкостінної п'єзокерамічної циліндричної оболонки, та контактує з ідеальною стисливою рідиною. П'єзовібратор збуджується стаціонарними електричними сигналами, які подаються на струмопровідні поверхні безпосередньо. Якщо на електродах відсутні розрізи, то в цьому випадку електрична напруга, яка прикладена до всієї поверхні п'єзовипромінювача, і п'єзовипромінювач буде скоювати вісесиметричні пульсуючи коливання (одномодовий випромінювач).

Ключові слова: гідродинамічний тиск, переміщення циліндричної оболонки, функцій Ханкеля, гідроелектропружна система.

Математична постановка задачі. Розглядається стаціонарна задача випромінювання акустичних хвиль гідроелектропружною системою, що складається з циліндричної п'єзокерамічної оболонки та контактує з ідеальною стисливою рідиною.

Будемо вважати, що циліндрична п'єзокерамічна оболонка радіусом R та товщиною h є нескінченно довгою, тонкостінною та оточена ідеальною стисливою рідиною з густиною ρ і швидкістю звука c. У внутрішньому об'ємі – вакуум. Вважається, що оболонка поляризована по товщині у радіальному напрямку, а на струмопровідні поверхні подається безпосередньо стаціонарний електричний сигнал. Збуджений рух оболонки моделюється співвідношеннями теорії тонких електропружних оболонок, яка базується на гіпотезах Кірхгофа-Лява, а динамічні процеси які виникають у середовищі описуються в рамкам акустичної теорії.

При описанні динамічної поведінки розглянутої гідроелектропружної системи при збудженні п'єзокерамічної оболонки стаціонарними електричними сигналами необхідно скласти систему рівнянь, яка описує коливання оболонки та контактуючою з нею рідиною при відповідних граничних умовах, умовах для електричної складової поля, умовах на нескінченності.

Рівняння руху тонкостінної п'єзокерамічної оболонки з урахуванням прийнятих припущень мають наступний вигляд:

$$-w+\frac{e_{13}}{C_{11}^E d_{33}}E_r^{(0)}=\frac{\rho_m c^2}{C_{11}^E}\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}+\frac{\rho c^2 R}{C_{11}^E h}q \qquad (1)$$

де w – нормальні переміщення точок серединної поверхні; $E_r^{(0)}$ та q – напруженість електричного поля та гідродинамічна нагрузка, яка діє на оболонку; ρ_m, C_{11}^E, e_{13} і d_{33} – густина, модуль пружності, п'єзомодуль, диэлектрическая проникненість і п'єзоелектрична постійна кераміки; t – час.

Збуджений рух рідини у зовнішньому середовищі, який виникає в разі збудження оболонки стаціонарним сигналом, описується хвильовим рівнянням, яке має для плоскої задачі в полярних координатах (r, θ) наступний вигляд:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}, \qquad (2)$$

де φ – потенціал швидкості збудженого руху рідини у зовнішньому середовищі.

Гідродинамічна нагрузка, що діє на оболонку, створюється тиском який виникає у рідині:

$$q=-p\big|_{r=R}, \qquad (3)$$

де співвідношення

$$p=-\frac{\partial\varphi}{\partial t}, \qquad (4)$$

$$V_r=\frac{\partial\varphi}{\partial r} \qquad (5)$$

описують гідродинамічний тиск та швидкість які виникають в акустичному середовищі.

Напруженість електричного поля, яка виникає в п'єзокерамічній оболонки, коли подається на струмопровідні поверхні електричний сигнал, при обраному варіанті поляризації, може бути представлена у наступному вигляді:

$$E_r^{(0)}=-\frac{U}{h}, \qquad (6)$$

де U – конфігурація стаціонарного електричного сигналу.

Як граничні приймаються умови безвідривного контакту поверхні оболонки ($r=R$) з рідиною:

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial\varphi}{\partial r}\bigg|_{r=R}. \qquad (7)$$

Крім наведених граничних умов обов'язкомим є умова згасання на нескінченності розбіжності звукових хвиль.

Сформульована математична постановка задачі виконана у безрозмірних позначеннях, згідно з якими величини віднесені до радіусу оболонки R; $E_r^{(0)}$ – до $1/d_{33}$; t – до R/c; q – до ρc^2; U – до R/d_{33}; φ – до Rc; V_r – до c.

Розв'язок задачі. Невідомі функції w, q, φ, V_r, $E_r^{(0)}$, U які описують динамічні процеси в оболонці та акустичному середовищі будемо шукати в наступному вигляді:

$$w=w_0e^{i\omega t}, \qquad (8)$$

$$q=q_0e^{i\omega t}, \qquad (9)$$

$$\varphi=\varphi_0e^{i\omega t}, \qquad (10)$$

$$V_r=V_{r0}e^{i\omega t}, \qquad (11)$$

$$E_r^{(0)}=E_{r0}^{(0)}e^{i\omega t}, \qquad (12)$$

$$U=U_0e^{i\omega t}. \qquad (13)$$

Після підстановки співвідношень (8) – (13) в систему рівнянь (1) – (7), яка описує динамічні процеси в даній гідроелектропружній системі отримаємо залежності для переміщення оболонки

$$aw_0=bi\varphi_0+dU_0, \qquad (14)$$

$$i\omega w_0=\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}\bigg|_{r=R}, \qquad (15)$$

та хвильового потенціалу

$$\frac{\partial^2\varphi_0}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi_0}{\partial r}=-\omega^2\varphi_0, \qquad (16)$$

де $a=\frac{\rho_m c^2\omega^2}{C_{11}^E}-1$; $b=-\frac{\rho c^2\omega R}{C_{11}^E h}$; $d=\frac{e_{13}}{C_{11}^E d_{33}h}$.

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Загальний розв'язок отриманого хвильового рівняння (16), з урахуванням згасання хвиль на нескінченності має наступний вигляд:

$$\varphi_0 = BH_0^{(2)}(\omega r), \quad (17)$$

де $H_0^{(2)}(\omega r)$ – функція Ханкеля другого роду нульового порядку.

Після підстановки загального розв'язку хвильового рівняння (17) у граничну умову (15) та залежність (14) наступну систему яка описує переміщення оболонки

$$-i\omega w_0 = B\left.\frac{\partial H_0^{(2)}(\omega r)}{\partial r}\right|_{r=R} = -B\omega H_1^{(2)}(\omega R),$$

і остаточно

$$w_0 = \frac{b}{a} iBH_0^{(2)}(\omega R) + \frac{d}{a}U_0,$$

$$w_0 = -iBH_1^{(2)}(\omega R), \quad (18)$$

де $H_1^{(2)}(\omega r)$ – функція Ханкеля другого роду першого порядку, B – невідомий коефіцієнт.

Прирівнявши з системи (18) перше та друге рівняння знайдемо коефіцієнт B

$$B = -\frac{\frac{d}{a} iU_0}{-H_1^{(2)}(\omega R) + \frac{b}{a}H_0^{(2)}(\omega R)}. \quad (19)$$

Для знаходження коефіцієнта B необхідно знати вигляд функцій Ханкеля другого роду нульового та першого порядків. Ці функції мають наступний вигляд [10]:

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iN_\nu(z), \quad H_\nu^{(2)}(z) = J_\nu(z) - iN_\nu(z), \quad (20)$$

де $J_\nu\ (z)$ – функція Беселля першого роду, $N_\nu\ (z)$ – функція Неймана.

Для малих значень z функції $J_\nu\ (z)$ та $N_\nu\ (z)$ мають наступний вигляд:

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(\nu+k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (|\arg z| < \pi); \quad (21)$$

$$N_\nu(z) = \frac{1}{\sin \nu\pi}\left[J_\nu(z)\cos\nu\pi - J_{-\nu}(z)\right] \quad (\nu \ne 0, \pm 1, \pm 2 \ldots\ldots\ldots\ldots);$$

$$N_\nu(z) = (-1)^\nu N_{-\nu}(z) = \frac{2}{\pi}J_\nu(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(\nu+k)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{\nu+k}\frac{1}{j}\right) -$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\nu}\sum_{k=0}^{\nu-1}\frac{(\nu-k-1)!}{k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (\nu = 0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots;\ |\arg z| < \pi); \quad (22)$$

$C = 0{,}5772156649015325$ – постійна Ейлера-Маскероні.

Для великих значень $z \to \infty$ функції $J_\nu\ (z)$ та $N_\nu\ (z)$ мають наступний вигляд:

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_\nu(z)\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) - B_\nu \sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right];$$

$$N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_\nu(z)\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + B_\nu \cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]; \quad (23)$$

де функції $A_\nu\ (z)$ та $B_\nu\ (z)$ мають асимптотичне розкладення (не враховуючи остаточний член)

$$A_\nu(z) = 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8z)^4};$$

$$B_\nu(z) = \frac{4\nu^2-1}{8z} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8z)^3}; \quad (24)$$

Підставляє розкладення (23) та (24) у формулу (2.20), отримаємо відповідні асимптотичні розкладання для $H_\nu^{(1)}(z)$ та $H_\nu^{(2)}(z)$. З розкладання (23) та (24) слідує, що для $z >> \nu$ при $z \to \infty$

$$J_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad H_\nu^{(1)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)},$$

$$N_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right), \quad H_\nu^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\nu\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)}; \quad (25)$$

Враховуючи те, що до складу коефіцієнта B входять функції Ханкеля другого роду нульового та першого порядків, тоді в нашому випадку формули (20)-(25) набувають вигляду:

$$H_1^{(2)}(z) = J_1(z) - iN_1(z), \quad H_0^{(2)}(z) = J_0(z) - iN_0(z), \quad (26)$$

Для малих значень z функції $J_0\ (z)$, $J_1\ (z)$, $N_0\ (z)$, $N_1\ (z)$ мають наступний вигляд:

$$J_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k};$$

$$J_1(z) = \left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\,\Gamma(k+2)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k} \quad (|\arg z| < \pi) \quad (27)$$

$$N_0(z) = \frac{2}{\pi}J_0(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!k!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j}\right) \quad (28)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, ..;\ |\arg z| < \pi)$$

$$N_1(z) = -N_{-1}(z) = \frac{2}{\pi}J_1(z)\left(\ln\frac{z}{2} + C\right) - \frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(k+1)!}\left(\frac{z}{2}\right)^{2k}\left(\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} + \sum_{j=1}^{k+1}\frac{1}{j}\right) \quad (29)$$

$$(\nu = 0, 1, 2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;\ |\arg z| < \pi)$$

$C = 0{,}5772156649015325$ – постійна Ейлера-Маскероні.

Для великих значень $z \to \infty$ функції $J_0\ (z)$, $J_1\ (z)$, $N_0\ (z)$, $N_1\ (z)$ мають наступний вигляд:

$$J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_0(z)\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) - B_0\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right]; \quad (30)$$

$$J_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_1(z)\cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right) - B_1\sin\left(z - \frac{3\pi}{4}\right)\right]; \quad (31)$$

$$N_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_0(z)\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right) + B_0\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right)\right]; \quad (32)$$

$$N_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left[A_1(z)\sin\left(z - \frac{3\pi}{4}\right) + B_1\cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right)\right]; \quad (33)$$

де функції $A_0\ (z)$, $A_1\ (z)$, $B_0\ (z)$, $B_1\ (z)$ мають асимптотичне розкладення (не враховуючи остаточний член)

$$A_0(z) = 1 - \frac{9}{2!(8z)^2} + \frac{11025}{4!(8z)^4}; \quad (34)$$

$$A_1(z) = 1 + \frac{15}{2!(8z)^2} - \frac{14175}{4!(8z)^4}; \quad (35)$$

$$B_0(z) = -\frac{1}{8z} + \frac{225}{3!(8z)^3}; \quad (36)$$

$$B_1(z) = \frac{3}{8z} - \frac{315}{3!(8z)^3}; \quad (37)$$

Підставляє розкладення (30)-(33) у формулу (26), отримаємо відповідні асимптотичні розкладання для $H_1^{(2)}(z)$ та $H_0^{(2)}(z)$. З розкладання (30)-(33) слідує, що для $z >> \nu$ при $z \to \infty$

$$J_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad J_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\cos\left(z - \frac{3\pi}{4}\right),$$

$$N_0(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{\pi}{4}\right), \quad N_1(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\sin\left(z - \frac{3\pi}{4}\right), \quad (38)$$

$$H_0^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{\pi}{4}\right)}, \quad H_1^{(2)}(z) \approx \sqrt{\frac{2}{\pi z}}e^{i\left(z-\frac{3\pi}{4}\right)};$$

Після знаходження функцій Ханкеля нульового та першого роду другого порядку та коефіцієнта B, не виникає затруднення знаходження фізичних характеристик досліджуваного перехідного процесу, як наприклад

гідродинамічний тиск

$$p|_{r=R} = \frac{\frac{d}{a}U_0}{-H_1^{(2)}(\omega R) + \frac{b}{a}H_0^{(2)}(\omega R)}\omega H_0^{(2)}(\omega R) \quad (39)$$

переміщення циліндричної оболонки

$$u|_{r=R} = -\frac{\frac{d}{a}U_0}{-H_1^{(2)}(\omega R) + \frac{b}{a}H_0^{(2)}(\omega R)}\omega H_1^{(2)}(\omega R), \quad (40)$$

та інші величини.

Мета статті. Головна мета цієї роботи полягає в наступному, це виконана постановка та розв'язок задачі випромінювання акустичних хвиль циліндричною п'єзокерамічною оболонкою та отримані формули для визначення фізичних характеристик досліджуваного перехідного процесу, це: переміщення п'єзокерамічної оболонки та гідродинамічного тиску.

Висновки. В статті виконана постановка та отримано розв'язок стаціонарної задачі випромінювання акустичних хвиль тонкостінною циліндричною оболонкою що контактує з ідеальною стисливою рідиною. Отримано формули для фізичних характеристик обраної гідроелектропружної системи при стаціонарних режимах її роботи. Отримані результати можуть бути використані в науково-дослідних організаціях при розробці акустичної техніки, а також в педагогічному процесі

Список літератури:

1. Бабаев А.Э. Нестационарные волны в слошных середах с системой отражающих поверхностей / А.Э. Бабаев // Киев.: Наук. думка, 1990. – 176 с.
2. Вовк И.В., Гринченко В.Т. Взаимодействие электроакустических преобразователей при различных способах их электрического возбуждения / И.В. Вовк, В.Т. Гринченко // Докл. XI Всес. акуст. конф. – Москва, 1991. – С. 143-146.
3. Векслер Н.Д. Информационные проблемы гидроупругости / Н.Д. Векслер // – Таллинн: Валгус, 1982. – 246 с.
4. Градштейн И.М., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений / И.М. Градштейн, И.М. Рыжик // – М.: Физматгиз, 1962. – 1108 с.
5. Гринченко В.Г., Улитко А.Ф., Шульга Н.А. Электроупругость / В.Г. Гринченко, А.Ф. Улитко, Н.А. Шульга // – К.: Наук. думка, 1989. – 279 с. – (Механика связанных полей в элементах конструкций: В 5 т.; Т.5).
6. Гузь А.Н., Кубенко В.Д., Бабаев А.Э. Гидроупругость систем оболочек / А.Н. Гузь, В.Д. Кубенко, А.Э. Бабаев // – Киев: Вища школа, 1984. – 466 с.
7. Мнев Е.Н., Перцев А.К. Гидроупругость оболочек / Е.Н. Мнев, А.К. Перцев // – Л.: Судостроение, 1970. – 366 с.
8. Новожилов Н.В. Теория тонких оболочек / Н.В. Новожилов // – Л.: Судостроение, 1962. – 430 с.
9. Перцев А.К., Платонов Э.Г. Динамика оболочек и пластин / А.К. Перцев, Э.Г. Платонов // – Л.: Судостроение, 1987. – 317 с.
10. Пьезокерамические преобразователи / Под ред. С.И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
11. Седов Л.И. Механика сплошной среды / Л.И. Седов // – М.: Наука, 1970. – Т. 1. – 492 с.; Т. 2. – 568 с.
12. Улитко А.Ф. К теории колебаний пьезокерамических тел / А.Ф Улитко // Тепловые напряжения в элементах конструкций. – 1975. – № 15. – С. 90-99.
13. 1Фридлендер Ф. Звуковые импульсы / Ф. Фридлендер // – М.: Иностр. литература, 1962. – 232 с.
14. Шендеров Е.Л. Волновые задачи гидроакустики / Е.Л. Шендеров // – Л.: Судостроение, 1972. – 348 с.

Бабаев А.А., Штефан Н.И., Гнатейко Н.В.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт»

ИЗЛУЧЕНИЕ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ

Аннотация
Выполнена постановка и решение задачи излучения акустических волн гидроэлектроупругой системой, которая состоит из тонкостенной пьезокерамической цилиндрической оболочки и контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью. Пьезовибратор возбуждается стационарными электрическими сигналами, которые подаваются на токопроводящие поверхности непосредственно. Если на электродах отсутствуют разрезы, то в этом случае электрическое напряжение, которое приложена ко всей поверхности пьезоизлучателя, и пьезоизлучатель будет выполнять осесимметричные пульсирующие колебания (одномодовый излучатель).
Ключевые слова: гидродинамическое давление, перемещения цилиндрической оболочки, функция Ханкеля, гидроэлектроупругая система.

Babaev A.A., Shtefan N.I., Gnatejko N.V.
National Technical University of Ukraine
«Kyiv Polytechnic Institute»

RADIATION OF ACOUSTIC WAVES CYLINDRICAL PIEZOCERAMIC SHELL

Summary
Made formulation and solution of the problem of acoustic waves hydroelectroelasticity system, which consists of thin piezoceramic cylindrical shell and is in contact with an ideal compressible liquid. Piezodriver excited stationary electrical signals, which are supplied to the conductive surface itself. If the electrodes are no cuts, then the voltage that is applied to the entire surface of the piezo and piezo buzzer would perform axisymmetric pulsating oscillation (singlemode emitter).
Keywords: hydrodynamic pressure, movement of the cylindrical shell, Hankel function, hydroelectroelasticity system.