

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 533.6

ВІЗУАЛІЗАЦІЯ РУХУ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ З ВИКОРИСТАННЯМ ПАКЕТУ MATLAB

Бабаєв О.А., Охріменко Ю.В.

Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

У даній статті розглядається можливість використання математичного пакету MATLAB для написання комп'ютерної програми при візуалізації руху матеріальної точки. Дана програма дозволяє задавати у параметричному вигляді рівняння положення матеріальної точки, що дає можливість в подальшому візуально зобразити траєкторію руху, швидкості та прискорення матеріальної точки. Такий потужний математичний апарат дає можливість дуже точно моделювати різні типи руху, прораховувати багато можливих параметрів таких як траєкторія точки, швидкість, доцентрове та тангенціальне прискорення. Прорахунок всіх цих даних у будь-який момент часу дає змогу не лише отримати значення шуканих параметрів, а й створити точну анімовану модель руху точки за відомими рівняннями її руху.

Ключові слова: механіка, траєкторія руху, швидкість, прискорення, візуалізація.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. *Механікою* називається наука про механічний рух або рівновагу матеріальних тіл і виникаючу при цьому взаємодію між ними. Відноситься механіка до природничих наук.

З розвитком механіки як науки в ній з'явився цілий ряд самостійних галузей, пов'язаних з вивченням механіки твердих деформованих тіл, рідин і газів: теорія пружності, теорія пластичності, гідромеханіка, аеромеханіка, газова динаміка, опір матеріалів, будівельна механіка, теорія механізмів і машин, гідравліка, динаміка споруд та інші спеціальні інженерні дисципліни. Однак в усіх цих галузях поряд зі специфічними для кожної з них закономірностями і методами дослідження, використовуються поняття, закони і методи механіки, які є загальними для них.

Теоретична механіка – це частина механіки, в якій вивчаються найзагальніші закони механічного руху або рівноваги матеріальних тіл і механічної взаємодії між ними. **Механічний рух** – найпростіша форма руху матерії, яка зводиться до простого переміщення за часом фізичних тіл з одного положення в просторі в інше.

В основі теоретичної механіки лежать закони Ньютона, тому вона називається **ньютонівською** або **класичною**. Класична механіка, яка є граничним випадком релятивістської механіки А. Ейнштейна, з великою точністю задовольняє багатьом галузям сучасної техніки при швидкостях руху тіл, досить малих у порівнянні зі швидкістю світла.

Роль і значення теоретичної механіки в інженерній освіті визначається, по перше, тим, що вона є **фундаментальною загальнонауковою дисципліною**, оскільки методи теоретичної механіки дозволяють з єдиних позицій описувати динаміку і процеси не тільки в механічних системах, а і в інших частинах фізичних (наприклад, утворення комірок Бенара при тепловій конвек-

ції; явище резонансу в електричних та оптичних ланцюгах), хімічних (хімічна термодинаміка, коливання атомів і молекул, міжмолекулярна взаємодія, динамічні явища при протіканні хімічної реакції Белоусова – Жаботинського), біологічних (динамічна поведінка системи хижак – жертва, життєвий цикл амеби), кліматичних (нерівноважність клімату Земної кулі), космічних (теорія розвитку Всесвіту) та інших системах. По друге, теоретична механіка є **основою інженерних розрахунків**, оскільки на її законах засновані статичні й динамічні розрахунки інженерних споруд (будівель, фундаментів, башт, мостів, гребель, трубопроводів, сховищ, технологічних споруд), транспортних засобів (вагонів, автомобілів, літаків, кораблів), виробничого устаткування (двигунів, насосів, компресорів), технологічних процесів (будівництва, транспортування, центрифугування, седиментації), параметрів польоту й керування літальними апаратами та ін.

Відвертаючись при вивченні руху матеріальних тіл від усього часткового, теоретична механіка розглядає тільки ті властивості, які в даній задачі є визначальними. Це приводить до розгляду різних моделей матеріальних тіл, які являють собою ту чи іншу ступень абстракції. До основних абстракцій теоретичної механіки відносять поняття матеріальної точки і абсолютно твердого тіла. **Матеріальною точкою** називається тіло, розмірами якого можна знехтувати при розв'язанні певних задач. Наприклад, при наближеному дослідженні рухів планет їх можна розглядати як матеріальні точки. **Абсолютно твердим** називається тіло, відстань між будь-якими точками якого не змінюється під час рівноваги або руху.

За характером задач, що вивчаються, теоретична механіка складається з трьох розділів:

– **статики**, в якій вивчаються методи еквівалентних перетворень систем сил, а також умови рівноваги матеріальних тіл;

– **кінематики**, в якій вивчається механічний рух матеріальних тіл з геометричної точки зору, тобто незалежно від мас та діючих на них сил;

– **динаміки**, в якій вивчається рух матеріальних тіл у зв'язку з діючими на них силами.

Закони теоретичної механіки сформульовані завдяки плідній праці багатьох поколінь вчених. Перші викладення загальних понять механіки містяться у творах старогрецького філософа **Арістотеля** (384-322 рр. до н.е.), який розглядав розв'язання практичних задач за допомогою важеля. Вперше наукове обґрунтування механіки з'являється в роботі сиракузького геометра і механіка **Архімеда** (287-212 рр. до н.е.). Він здійснив спробу аксіоматизації механіки (статики), дав низку наукових узагальнень, що відносяться до вчення про рівновагу, центр ваги і гідростатики (закон Архімеда).

Швидкий розвиток механіки починається з епохи Відродження. Видатні вчені цієї епохи розвинули методи статики і заклали основи динаміки. Найбільш значний внесок в механіку внесли: **Леонардо да Вінчі** (1452-1519) – вивчав траєкторію тіла, що було кинуте під кутом до горизонту, рух тіла по площині і явище тертя, а також запровадив поняття моменту сили відносно точки; **Сімон Стевін** (1548-1620) – дав аксіоматичну побудову статики на основі постулатів **Архімеда**, запровадив поняття силового трикутника і довів теорему про три сили; **Микола Копернік** (1473-1543) – відкрив геліоцентричну систему світу; **Галілео Галілей** (1564-1642) – встановив основні закони вільного падіння тіл, увів поняття про нерівномірний рух і прискорення точки, вперше сформулював закон інерції, принцип відносності класичної механіки і дослідив дію сил на тіла, що рухаються; **Йоганн Кеплер** (1571-1630) – відкрив закони руху планет; **Рене Декарт** (1596-1650) – ближче до своїх сучасників підійшов до правильного формулювання закону інерції, вперше увів поняття кількості руху матеріальної точки і дослідив питання про складання довільного числа рухів точки; **Христіан Гюйгенс** (1629-1695) – розробив теорію коливань фізичного маятника і визначив центр його коливання, довів теореми про відцентрову силу, експериментально визначив прискорення сили тяжіння, дослідив проблему удару двох тіл; **Роберт Гук** (1635-1703) – відкрив закон пропорційності між силою, прикладеною до пружного тіла, і його деформацією (закон Гука), що є основним співвідношенням при сучасних розрахунках динаміки та міцності конструкцій і споруд, а також передбачив закон всесвітнього тяжіння **Ньютона**; **П. Варіньон** (1654-1722) – встановив в остаточному вигляді поняття моменту сили, умови рівноваги системи збіжних і паралельних сил, довів теорему про момент рівнодійної.

Одне з перших місць у розвитку механіки займає **Готфрід Лейбніц** (1646-1716), який розробив і застосував до задач механіки диференціальне і інтегральне числення, увів поняття кінетичної енергії і впритул наблизився до утворення варіаційного числення. Завершив встановлення основних законів динаміки великий англійський математик і механік **Ісаак Ньютон** (1643-1727). У своєму знаменитому творі «Математичні основи натуральної філософії» (1687) він сформулю-

вав основні поняття класичної механіки, її аксіоматику, а також низку фундаментальних теорем небесної механіки і закон всесвітнього тяжіння.

Період розвитку механіки після Ньютона значною мірою пов'язаний з ім'ям **Л. Ейлера** (1707-1783), який більшу частину життя працював у Петербурзькій академії наук. Л. Ейлер повністю завершив процес математизації механіки точки, був засновником механіки твердого тіла і сформулював закони динаміки для безперервного середовища.

Подальший розвиток механіки проходив у зв'язку з вивченням руху системи матеріальних точок. Розвиток цього напрямку був покладений працями **Ж.Л. Даламбера** (1717-1783), який сформулював принцип, за допомогою якого формально задачі динаміки зводились до задач статики (принцип Даламбера) і **Ж.Л. Лагранжа** (1736-1813). У своєму видатному творі «Аналітична механіка» він сформулював найбільш загальний принцип статики – принцип можливих переміщень, знайшов загальну закономірність механіки – загальне рівняння динаміки, і вивів в узагальненому вигляді диференціальні рівняння руху механічної системи (рівняння Лагранжа першого і другого роду).

В подальшому працями видатних математиків і механіків **П.Л. Мопертюї** (1698-1759), **П.С. Лапласа** (1749-1827), **К.Ф. Гаусса** (1777-1855), **С. Пуассона** (1781-1840), **У. Гамільтона** (1805-1865), **К. Якобі** (1804-1851), **М.В. Остроградського** (1801-1861) завершилась математизація механіки системи матеріальних точок і абсолютно твердого тіла, були вироблені специфічні для аналітичної механіки поняття (узагальнені координати, узагальнені швидкості, узагальнені сили) і розроблені математичні методи розв'язання багатьох задач.

Одночасно з розвитком аналітичних методів механіки в цей період удосконалюються геометричні методи, зокрема в задачах статики. Так, у книзі французького механіка **Л. Пуансо** (1777-1859) «Елементи статики» вперше була введена нова абстракція – пара сил і викладена теорія приведення довільної системи сил до заданого центру.

Наприкінці XIX ст. під впливом розвитку кораблебудування і авіації почалась розробка проблем гідро- та аеродинаміки, де найбільш значні результати пов'язані з іменами **М.С. Жуковського**, **С.А. Чаплигіна**, **Л. Прандтля** (1875-1953), **Т. Кармана** (1881-1963). Теоретична механіка стала основою теорії автоматичного регулювання, значний внесок у розвиток якої зробив **І.А. Вишнеградський** (1831-1895).

Працями **Л. Ейлера**, **Нав'є** (1785-1836), **Коші** (1789-1857), **Сен-Венана** (1797-1886) у XIX ст. була створена теорія пружності – наука про закони статичного і динамічного деформування пружних тіл. На початку XX сторіччя у зв'язку з розвитком будівництва і машинобудування виникла потреба розробки теорії пластин та оболонок, розвиток якої пов'язаний іменами **Лява**, **Рейсснера**, **Донелла**, **С.П. Тимошенко**, **В.З. Власова**, **В.В. Новожилова**, **Х.М. Муштарі**, **А.С. Вольміра**, **А.Л. Гольденвейзера** та ін.

Теоретичні відомості. Кінематика – це розділ теоретичної механіки, що вивчає геометричні властивості руху тіл, які розглядаються як чисто геометричні об'єкти – точки і тіла – без урахуван-

ня їх матеріальних характеристик (маси та ін.). При цьому не розглядаються причини (дій на тіло сили), що викликають і змінюють рух об'єкта.

Під рухом у механіці розуміється зміна з плином часу взаємного положення в просторі даного тіла відповідно якого-небудь іншого тіла. Характер руху, що спостерігається, істотно залежить від вибору тіла, з яким пов'язаний спостерігач. З твердим тілом, відповідно якого вивчається рух, жорстко з'єднують систему координат, що утворює разом з ним **систему відліку**. Простір у механіці, в якому відбувається рух тіл, розглядається як евклідовий. Час вважається «універсальним», тобто він припускається однаковим для всіх розглянутих систем відліку. У задачах кінематики час (скалярна величина, що безупинно змінюється) приймається за незалежну перемінну. Відлік часу ведеться від деякого умовно початкового моменту, вибір якого в кожному випадку обумовлюється.

Для рішення задач кінематики треба, щоб досліджувані рух був заданий (описаний математичним виразом).

Кінематично задати рух точки (тіла) – означає задати положення цієї точки (тіла) відносно даної системи відліку в будь-який момент часу. Якщо положення точки (тіла) визначається якими-небудь координатами (параметрами), то треба задати залежність даних координат від часу t . Ця залежність називається **кінематичним рівнянням руху або законом руху**.

Основною задачею кінематики є встановлення завдання руху точок (тіл) і методів визначення кінематичних величин, які характеризують цей рух.

Для задання руху точки і визначення її кінематичних характеристик можна застосувати один з трьох способів: векторний, координатний та натуральний.

Векторний спосіб: $\vec{r} = \vec{r}(t)$ – закон руху (рівняння руху точки у векторній формі), де \vec{r} – радіус-вектор точки (вектор, проведений із нерухомої точки O до розглядуваної); $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$ – швидкість точки – векторна величина, яка:

- 1) дорівнює першій похідній радіуса-вектора точки за часом;
- 2) напрямлена по дотичній до траєкторії точки у бік її руху;
- 3) характеризує швидкість зміни положення точки за часом;

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \text{ або } \vec{a} = \dot{\vec{v}} = \ddot{\vec{r}} \text{ – прискорення точки}$$

– векторна величина, яка (рис. 1):

- 1) дорівнює першій (другій) похідній швидкості (радіуса-вектора) точки за часом;
- 2) напрямлена у бік угнутості траєкторії точки;
- 3) характеризує швидкість зміни швидкості точки за часом.

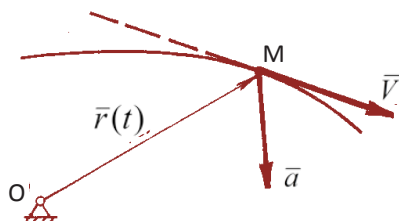


Рис. 1.

Координатний спосіб: при даному способі задання руху $x = x(t); y = y(t); z = z(t)$ – закон руху (рівняння руху точки у координатній формі), де x, y, z – декартові координати точки; $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y + \vec{v}_z = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}$ – швидкість точки, де $\vec{v}_x, \vec{v}_y, \vec{v}_z$ – координатні складові швидкості точки; $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – орти осей координат. $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$ – модуль (величина) швидкості; $v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}$ – проєкції вектора швидкості на осі координат; $\vec{a} = a_x\vec{i} + a_y\vec{j} + a_z\vec{k}$ – прискорення точки, де $\vec{a}_x, \vec{a}_y, \vec{a}_z$ – координатні складові прискорення точки; $a = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$ – модуль (величина) прискорення точки, $a_x = \dot{v}_x = \ddot{x}; a_y = \dot{v}_y = \ddot{y}; a_z = \dot{v}_z = \ddot{z}$ – проєкції вектора прискорення на осі координат.

У випадку плоскої траєкторії рисунок може бути, наприклад, таким (рис. 2):

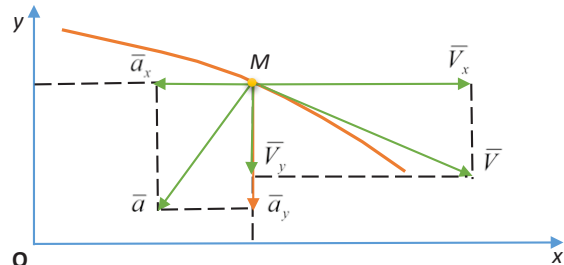


Рис. 2.

Натуральний спосіб: при цьому способі задання руху відомими є (рис. 3):

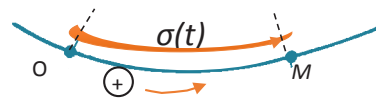


Рис. 3.

- а) траєкторія руху точки;
- б) початок і напрямок відліку руху точки;
- в) $\sigma = \sigma(t)$ – закон руху (рівняння руху точки в натуральній формі), де σ – дугова координата.

При натуральному способі застосовується натуральна система координат (рис. 4): вісь дотичної $\vec{\tau}$ – напрямлена по дотичній до траєкторії у даній точці в бік додатного напрямку відліку дугової координати; вісь головної нормалі \vec{n} лежить у стичній площині і напрямлена перпендикулярно до дотичної у бік угнутості траєкторії; вісь бінормалі \vec{b} – доповнює систему координат до просторової, тобто перпендикулярна площині τMn , так що її орта дорівнює $\vec{b} = \vec{\tau} \times \vec{n}$, де $\vec{\tau}, \vec{n}$ – орти дотичної та головної нормалі; $\vec{v} = \vec{v}_\tau = v_\tau \cdot \vec{\tau}$ – швидкість точки;

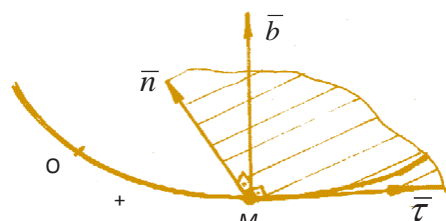


Рис. 4.

\vec{v}_τ – складова швидкості точки уздовж дотичної (завжди збігається з вектором швидкості); $v_\tau = \dot{\sigma}$ – проекція швидкості \vec{v} точки на вісь дотичної;

$\bar{v} = |\vec{v}_\tau|$ – модуль (величина) швидкості; $\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n = a_\tau \cdot \vec{\tau} + a_n \cdot \vec{n}$ – **прискорення точки**, де \vec{a}_τ, \vec{a}_n – складові прискорення точки уздовж осей τ и n ; $a_\tau = \dot{v}_\tau = \dot{\sigma}$ – проекція прискорення точки на вісь дотичної (називається **дотичним прискоренням**), характеризує швидкість зміни модуля швидкості точки за часом; $a_n = \frac{v^2}{\rho}$ – проекція

прискорення точки на вісь головної нормалі, де ρ – радіус кривизни траєкторії в даній точці (називається **нормальним прискоренням**) характеризує швидкість зміни напрямку вектора швидкості точки за часом;

$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2}$ – модуль (величина) прискорення.

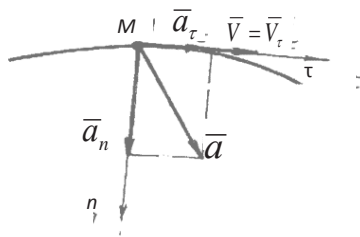


Рис. 5.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. З розвитком технологій комп'ютерного проектування та пакетів прикладних програм для числового аналізу набуває все більшої актуальності візуалізація різних видів руху матеріальної точки з освітньою та прикладною метою. Саме ці причини сприяють активній розробці програмного забезпечення для реалізації обумовлених задач.

Основна мета роботи – візуалізація різних типів руху матеріальної точки з допомогою пакету програм для чисельного аналізу MATLAB.

Об'єкт дослідження – технології візуалізації кінематики матеріальної точки.

Очевидна доцільність візуалізації руху матеріальної точки з допомогою методів комп'ютерного математичного моделювання. Це збільшує наочність досліджень різних типів руху, полегшує аналіз експериментальних даних. Для реалізації такої задачі було обрано пакет прикладних програм для чисельного аналізу – MATLAB.

MATLAB підтримує створення застосунків з властивостями графічних інтерфейсів користувача. MATLAB включає GUIDE (GUI development environment – середовище розробки) для графічного проектування графічних інтерфейсів користувача.

Програми на MATLAB можуть також будувати трьохвимірні графіки з допомогою функцій **surf**, **plot3** чи **mesh**. Що дозволяє моделювати навіть відносно складні види руху у трьох вимірах.

Мова MATLAB є високорівневою інтерпретованою мовою програмування, що включає

засновані на матрицях структури даних, широкий спектр функцій, інтегроване середовище розробки, об'єктно-орієнтовані можливості і інтерфейси до програм, написаних на інших мовах програмування.

MATLAB надає користувачеві велику кількість (кілька сотень) функцій для аналізу даних, які покривають майже всі області математики, зокрема:

– Матриці і лінійна алгебра – алгебра матриць, лінійні рівняння, власні значення і вектори, сингулярності, факторизація матриць та інші.

– Багаточлени і інтерполяція – корені многочленів, операції над многочленами та їх диференціювання, інтерполяція і екстраполяція кривих та інші.

– Математична статистика та аналіз даних – статистичні функції, статистична регресія, цифрова фільтрація, швидке перетворення Фур'є та інші.

– Обробка даних – набір спеціальних функцій, включаючи побудову графіків, оптимізацію, пошук нулів, чисельне інтегрування (в квадратах) та інші.

– Диференціальні рівняння – рішення диференціальних і диференціально-алгебраїчних рівнянь, диференціальних рівнянь із запізненням, рівнянь з обмеженнями, рівнянь в приватних похідних та інші.

– Розріджені матриці – спеціальний клас даних пакету MATLAB, що використовується в спеціалізованих додатках.

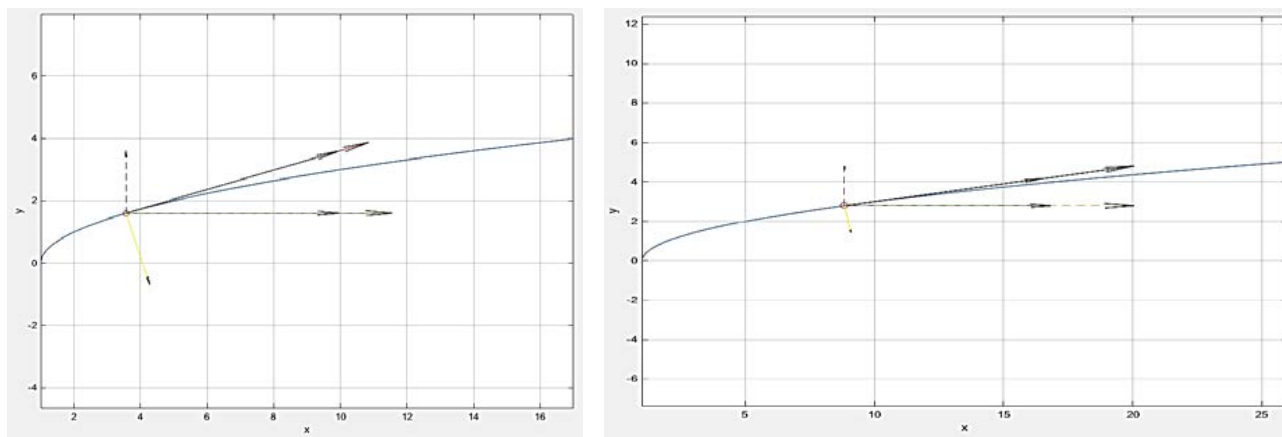
– Цілочисельна арифметика – виконання операцій цілочисельної арифметики в середовищі MATLAB.

Такий потужний математичний апарат дає можливість дуже точно моделювати різні типи руху, прораховувати багато можливих параметрів таких як траєкторія точки, швидкість, доцентрове та тангенційні прискорення. Прорахунок всіх цих даних у будь-який момент часу дає змогу не лише отримати значення шуканих параметрів, а й створити точну анімовану модель руху точки за відомими рівняннями її руху.

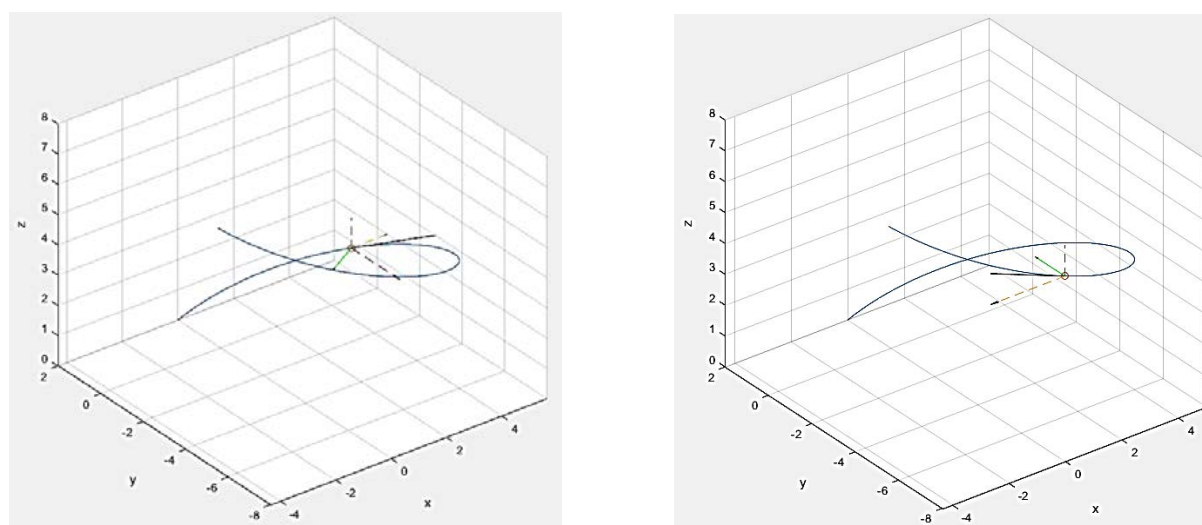
Для анімації руху точки необхідно прорахувати кожен кадр за допомогою математичного апарату та скласти статичні кадри з інформацією про те, скільки часу кожен кадр буде показаний на моніторі. Анімації записують у форматі GIF (*Graphics Interchange Format*), який реалізує необхідні можливості.

Висновки. В статті розглянуто візуалізацію руху матеріальної точки з використанням математичного пакету MATLAB. Ця програма дає можливість задавши в параметричному вигляді положення матеріальної точки визначити траєкторію руху, абсолютні значення та проекції швидкості і прискорення в будь-який момент часу.

Дана стаття буде цікавою для студентів, аспірантів та викладачів які викладають дисципліну теоретична механіка.



а) б)
Рис. 6. Траєкторія руху матеріальної точки задано рівнянням:
 $x(t) = 4t^2 + 1$; $y(t) = 2t$ в момент часу а) $t = 0,8$ с; б) $t = 1,4$ с



а) б)
Рис. 7. Траєкторія руху матеріальної точки задано рівнянням:
 $x(t) = 5\sin(\pi t/6)$; $y(t) = 5\cos(\pi t/6) - 3$; $z = t$ в момент часу а) $t = 2$ с; б) $t = 6$ с

Список літератури:

1. Павловский М.А. Теоретична механіка / Павловский М.А. – К.: Техніка, 2002. – 512 с.
2. Павловский М.А. Теоретическая механика. Ч. 1. / Павловский М.А., Акинфиева Л.Ю., Бойчук О.Ф. – К.: Вища школа, 1985. – 351 с.
3. Попов М.В. Теоретическая механика / Попов М.В. – М.: Наука, 1986. – 335 с.
4. Савин Г.Н. Курс теоретической механики / Савин Г.Н., Путята Т.В., Фрадлин Б.Н. – К.: Вища школа, 1973. – 359 с.
5. Лазарев Ю. Моделирование процессов и систем в MATLAB: учеб. курс / Лазарев Ю. – СПб.: Питер BHV, 2005. – 512 с.
6. Дьяконов В.П. Matlab. Анализ, идентификация и моделирование систем: Специальный справочник / В.П. Дьяконов, В. Круглов. – СПб.: Питер, 2002. – 448 с.

Бабаев А.А., Охрименко Ю.В.

Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

ВИЗУАЛИЗАЦІЯ ДВИЖЕННЯ МАТЕРІАЛЬНОЇ ТОЧКИ С ІСПОЛЬЗОВАННЯМ ПАКЕТА MATLAB

Аннотація

В даній статті розглядається можливість використання математичного пакета MATLAB для написання комп'ютерної програми при візуалізації руху матеріальної точки. Данна програма дозволяє задавати в параметричному вигляді рівняння положення матеріальної точки, що дозволяє в подальшому візуально зобразити траєкторію руху, швидкість і прискорення матеріальної точки. Такий потужний математичний апарат дозволяє дуже точно моделювати різні типи руху, розраховувати багато можливих параметрів таких як траєкторія точки, швидкість, центробіжне і тангенціальне прискорення. Розрахунок всіх цих даних в будь-який момент часу дозволяє не тільки отримати значення шуканих параметрів, але і створити точну анімовану модель руху точки за відомих рівнянь її руху.

Ключові слова: механіка, траєкторія руху, швидкість, прискорення, візуалізація.

Babaev A.A., Okhrimenko Y.V.

National Technical University of Ukraine
«Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute»

VISUALIZATION OF PARTICLE USE PACKAGE MATLAB

Summary

This article discusses the use of mathematical package MATLAB for writing a computer program when rendering motion of a point. This program allows you to specify a parametric equation in the position of a point, which makes it possible to visually depict the future trajectory, velocity and acceleration of a point. Such a powerful mathematical tools makes it possible to accurately simulate different types of movement count many possible options such as point trajectory, velocity, tangential and centripetal acceleration. Miscalculation of the data at any time allows you not only get the value of the unknown parameters, but also to create an accurate model of movement animated point by known equations of motion.

Keywords: mechanics, motion trajectory, velocity, uskorenyya, visualization.