УДК 621.3.019.3

О ВАЖНЫХ СЛЕДСТВИЯХ ИЗ ФОРМУЛЫ DN-РАСПРЕДЕЛЕНИЯ НАРАБОТКИ ДО ОТКАЗА

Федухин А.В., Ярошенко В.Н., Муха А.А.
Институт проблем математических машин и систем
Национальной академии наук Украины

Рассматривается новый подход, связанный с функцией DN-распределения, позволяющий предложить выражения для двух произвольных моментов времени, зависящих от параметров распределения. Из этих выражений получены также обратные формулы для параметров распределения как функций этих моментов времени. Получена оценка вероятности продолжительности безотказного функционирования объекта, лежащей между двумя введенными произвольными моментами времени.
Ключевые слова: DN-распределение, произвольные моменты времени, параметры распределения, функции моментов времени, продолжительность безотказного функционирования.

Введение. В известной монографии [1] подробно излагаются основы вероятностно-физического подхода к исследованию и оценке надежности различных электронных элементов и систем. В ней представлены методы прогнозирования остаточного ресурса на любой момент эксплуатации как на основе первичной информации о надежности объектов, так и на основания измерения и прогнозирования диагностических параметров в процессе их эксплуатации. Все эти результаты в большой степени получены благодаря использованию развитой в самой монографии [1] теории *DN*-распределения и других вероятностных методов с учетом реальных физических процессов исследуемого объекта (явления). **Рассмотрим более подробно основную формулу DN-распределения и получим некоторые следствия по ее применению.**

1. Получение важных следствий из формулы DN-распределения

Приведем формулу интегральной функции *DN*-распределения из [1]:

$$F(t) = DN(t;\mu,\nu) = \Phi\left(\frac{t-\mu}{\nu\sqrt{\mu t}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{t+\mu}{\nu\sqrt{\mu t}}\right) \qquad (1)$$

В этой формуле μ обозначает параметр масштаба, значение которого равно обратной величине средней скорости процесса деградации. Параметр ν представляет собой коэффициент вариации процесса деградации. Следует отметить, что оба параметра μ и ν в выражении (1) являются постоянными положительными величинами.

Соответствующие оценки возможных областей значений данных параметров излагаются в упомянутой монографии [1].

Но естественно полагать, что значения параметров, в общем случае, связанного с реальным развитием исследуемого объекта, должны зависеть от времени. В связи с этим ниже предлагается возможный подход для учета такого фактора.

Положение 1. Пусть имеются два произвольных момента времени t_1 и t_2, где $t_2 \rangle t_1$, для которых предлагаются следующие выражения:

$$t_1 = \mu\nu^2; \tag{2}$$

$$t_2 = \frac{\mu}{\nu^2}, \tag{3}$$

где μ и ν те же параметры (которые фигурируют и в DN-распределении (1)), но области изменения которых еще подлежат определению.

Из (2) и (3) следует, что

$$\frac{t_2}{t_1} = \frac{\mu}{\nu^2} \Big/ \mu \cdot \nu^2 = \frac{1}{\nu^4}; \tag{4}$$

$$\text{т.е. } \frac{1}{\nu^2} = \sqrt{\frac{t_2}{t_1}}; \tag{5}$$

$$\text{и соответственно } \nu^2 = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}. \tag{6}$$

Непосредственно вытекает из исходного предположения, что $t_2 \rangle t_1$, необходимость ограничения $\nu \langle 1$.

Что касается параметра μ, то из выражений (2) и (3), перемножая t_1 и t_2, получаем:

$$\mu^2 = t_1 \cdot t_2; \tag{7}$$

$$\text{или } \mu = \sqrt{t_1 \cdot t_2}. \tag{8}$$

Так как t_1 и t_2 ($t_2 \rangle t_1$) могут принимать любые положительные значения (в единицах времени), то μ также должно быть положительным моментом времени, определяемым из (8). Обратим внимание, что для определения μ и ν задействованы выражения $\frac{t_2}{t_1}$ из (6) и $t_1 \cdot t_2$ из (8).

Рассмотрим разность $t_2 - t_1$, используя для этого выражения (3) и (2). Тогда получим

$$t_2 - t_1 = \mu \cdot \mu \cdot \left(\frac{1}{\nu^2} - \nu^2\right). \tag{9}$$

Выражение (9) является формальной записью алгебраической разности двух выражений (3) и (2) перед тем, когда еще не были определены μ и ν^2. Но когда имеются уже явные выражения μ из (8) и ν^2 из (6), то алгебраическая формула должна удовлетвориться (т.е. превратиться в тождество) при $\mu = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$ и $\nu^2 = \sqrt{\frac{t_1}{t_2}}$. Проверим это. Преобразуем равенство (9) к виду

$$\frac{t_2 - t_1}{\mu} = \frac{t_2 - t_1}{\sqrt{\hat{t}_1 \cdot \overleftarrow{t}_2}} = \frac{\sqrt{t_2}}{\sqrt{t_1}} - \frac{\sqrt{t_1}}{\sqrt{\overleftarrow{t}_2}}.$$

Но с использованием равенств (5) и (6) получается, что алгебраическое выражение (9) действительно превращается в тождество при произвольном выборе моментов времени t_1 и t_2 ($t_2 \rangle t_1$) и параметров μ и ν (в тексте фигурируют μ и ν^2), которые становятся согласно с выражениями (2) и (3) для исходно предлагаемых моментов времени t_1 и t_2, функциями этих моментов. В свою очередь, как видно из равенств (2) и (3), t_1 и t_2 являются функциями μ и ν. Получается как бы комплекс параметров μ и ν и моментов времени t_1 и t_2, связанных между собой выражениями (8), (6), (2), (3).

Подставим в формулу (1) для интегральной функции DN-распределения вместо переменной времени t поочередно выражения для исходно вводимых в рассмотрение моментов времени t_1 и t_2 из формул (2) и (3). Тогда получим:

$$F(t_1) = \Phi\left(\frac{\mu\nu^2 - \mu}{\nu\sqrt{\mu \cdot \mu\nu^2}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{\mu\nu^2 + \mu}{\nu\sqrt{\mu \cdot \mu\nu^2}}\right) = \Phi\left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{\nu^2 + 1}{\nu^2}\right). \tag{10}$$

$$F(t_2) = \Phi\left(\frac{\mu/\nu^2 - \mu}{\nu\sqrt{\mu \cdot \mu/\nu^2}}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{\mu/\nu^2 + \mu}{\nu\sqrt{\mu \cdot \mu/\nu^2}}\right) = \Phi\left(\frac{1 - \nu^2}{\nu^2}\right) + \exp\left(\frac{2}{\nu^2}\right)\Phi\left(-\frac{1 + \nu^2}{\nu^2}\right). \tag{11}$$

Из (10) и (11) следует

$$F(t_2) - F(t_1) = \Phi\left(\frac{1 - \nu^2}{\nu^2}\right) - \Phi\left(\frac{\nu^2 - 1}{\nu^2}\right), \tag{12}$$

поскольку вторые слагаемые в (10) и (11) равны, они взаимно уничтожаются.

Так как $f(t)$ – функция распределения, то разность (12) представляет собой вероятность того, что безотказное функционирование элемента (системы) продлится время, большее t_1, но меньшее t_2, т.е. до некоторого момента t_0, находящегося в интервале (t_1, t_2). При этом эта вероятность определяется по формуле (12), где $\Phi(\cdot)$ – функция нормированного нормального распределения. Значения этой функции табулированы во многих источниках, например, в упомянутой монографии [1].

Из формулы (6) для ν^2 видно, что этот параметр приобретает одно и то же значение, когда отношение $\frac{t_1}{t_2}$ заменяется любым другим, имеющим вид $\frac{t_1 a}{t_2 a}$, где a – произвольное действительное положительное число.

Представляет интерес следующий вопрос. Если в интервале (t_1, t_2) t_0 – момент окончания безотказного функционирования, начало которого в точке $t = 0$, то, как можно оценивать аналогичный момент, но уже принадлежащий интервалу, концы которого есть $t_1 \cdot a$ и $t_2 \cdot a$.

Рациональное решение вопроса представляется следующим. Если принять, что длина интервала (0, t_0), где $t = 0$ – начало функционирования элемента (системы), равна параметру μ, принимающему (по предположению) значение математического ожидания длины отрезка (0, t_0), равной t_0, то согласно с формулой $\mu = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$, а при переходе от t_1 к $t_1 a$ и от t_2 к $t_2 \cdot a$ эта формула для нового μ_1 приобретет вид $\mu_1 = \sqrt{at_1 \cdot at_2} = a\sqrt{t_1 \cdot t_2} = a\mu$, т.е. новое математическое ожидание положения конечного момента функционирования уже в интервале (at_1, at_2) определится длиной интервала (0, at_0), равной at_0. Т.е. увеличение (уменьшение) значений моментов t_1 и t_2 в a раз приведет тогда к соответствующему увеличению (уменьшению) величины t_0 момента также в a раз.

Важно рассмотреть роль параметра μ, входящего в формулы (2) и (3) для моментов t_1 и t_2. Безотказное функционирование в интервале (t_1, t_2) закончится в некоторый момент t_0, величина которого неизвестна. В силу такой неизвестности (связанной со случайностью величины t_0), первоначально можно принять, что момент t_0 (конец интервала безотказности) совпадает с серединой интервала (t_1, t_2). Но более логичным представляется, что случайный момент t_0 определяется значением параметра μ, определяемого формулой (8).

Из этой формулы видно, что значение μ совпадает со средним геометрическим величин t_1 и t_2. Итак, принимается t_0 = $\mu = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$. Известно, что среднее геометрическое (в данном случае μ) обладает тем свойством, что справедливо неравенство $\mu - t_1 < t_2 - \mu$, т.е. разность во времени между t_0 и t_1 меньше, чем между t_2 и t_0. Такой выбор оценки математического ожидания положения точки t_0 означает, что принято предположение, что безотказное функционирование в среднем будет продолжаться по времени меньше среднего арифметического величин t_1 и t_2. Тем самым рассматривается менее благоприятная ситуация для продолжительности безотказного функционирования относительно различных временных интервалов (t_1, t_2) при исходных выборах t_1 и t_2 по формулам (2) и (3). При достаточном увеличении значений обоих моментов t_1 и t_2 математическое ожидание положения точки все более будет приближаться к середине интервала (t_1, t_2), т.е. к значению $\frac{t_2 - t_1}{2}$.

2. Численные примеры расчетов по полученным выражениям

Представляется полезным рассмотреть численные расчеты по полученным формулам, носящие иллюстративный характер. Итак, значения моментов t_1 и t_2, где $t_1 \rangle t_2$, определяются по формулам (2) и (3) при заданных $\mu = 1$ и $\nu = 0,75$:

$$t_1 = 1 \cdot 0,75^2 = 0,5625; \; t_2 = 1/0,75^2 = 1/0,5625 = 1,7777777 \cdot$$

Формулы $\mu = \sqrt{t_1 \cdot t_2}$ и $\nu^2 = \sqrt{t_1 / t_2}$, как и должно быть в данном подходе, удовлетворяются. Проверим это:

$$\sqrt{t_1 \cdot t_2} = \sqrt{0,5625 \cdot 1,7777777} = \sqrt{0,9999999} \approx 0,9999999 \approx 1 = \mu$$

$$\sqrt{\frac{t_1}{t_2}} = \sqrt{\frac{0,5625}{1,7777777}} = \sqrt{0,3164062} = 0,5624999 \approx 0,5625 = \nu^2.$$

С заданием значения ν, по формуле $F(t_2) - F(t_1) = 2\Phi\left(\frac{1}{\nu^2} - 1\right) - 1$, аналогу формулы (12), определяется вероятность события, что продолжительность безотказного функционирования, начавшегося в момент $t = 0$, будет больше величины t_1, но меньше t_2.

Рассчитаем эту вероятность:

$$2\Phi\left(\frac{1}{\nu^2} - 1\right) - 1 = 2\Phi\left(\frac{1}{0,5625} - 1\right) - 1 = 2\Phi(0,7777777) - 1 = 2 \cdot 0,781879 - 1 = 0,563758.$$

Значение $\Phi(0,7777777)$ определено по таблицам для функции нормированного нормального распределения. Таким образом, продолжительность безотказного функционирования, упомянутого выше объекта с заданными характеристиками, принадлежит интервалу времени (0,5625, 1.7777777), а соответствующая вероятность равна 0,563758.

Если принять, что среднее значение упомянутой длины (по времени) совпадает с параметром μ (в данном случае он равен 1), то получается приемлемый результат в виде неравенства 0,5625<1<1,7777777. Кроме того, подтверждается неравенство 0,4375=1−0,5625<1,7777777−1= =0.7777777, свойственное геометрическому среднему, когда расстояние (во времени) от левого конца интервала (t_1, t_2) меньше расстояния μ от правого конца t_2.

Полагаем, что рассмотренные выше примеры численных расчетов, как нам кажется, полезны для подтверждения логической корректности предлагаемого подхода.

Напомним, что из формулы (6) для ν^2 следует, что ν<1. В этом можно еще раз убедиться, решая уравнение (9), в котором неизвестной переменной является именно ν.

После преобразования (9) к виду

$$t_2 - t_1 = \mu \cdot \left(\frac{1}{\nu^2} - \nu^2\right), \tag{13}$$

при замене переменной ν на так, что $\nu^2 = x$ легко получить уравнение для новой переменной x, оно следующее

$$x^2 + \frac{t_2 - t_1}{\mu} x - 1 = 0. \tag{14}$$

Во избежание громоздких записей введем обозначение

$$\frac{t_2 - t_1}{\mu} = M. \tag{15}$$

Тогда квадратное уравнение для определяемого неизвестного x сведется к виду

$$x^2 + Mx - 1 = 0. \tag{16}$$

Решение находится по известной формуле и выглядит как

$$x = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 + 4}}{2}. \tag{17}$$

При практических расчетах следует отказаться от знака «минус», стоящего в формуле (17) перед знаком корня, так как отрицательные значения x не соответствуют реальности.

Из очевидного неравенства $M^2 + 4 \langle (M+2)^2$ следует, что $x \langle \frac{-M + \sqrt{(M+2)^2}}{2} = 1$, т.е. $x \langle 1$, и поскольку $\nu^2 = x$, то и $\nu \langle 1$, что нашло подтверждение и исходному для параметра ν факту. Из получаемого по формуле (17) решения для переменной x определяется соответствующее значение параметра ν по формуле $\nu = \sqrt{x}$.

3. Некоторые выводы из предложенного выше подхода

В вопросах теории надежности еще не достаточно широко используются теоретические и прикладные приемы, развитые в теории *DN*-распределения. Несомненным достоинством этой теории является применимость ее для решения многих прикладных задач, требующих разумного подхода при разработке программ проектирования различных важных систем.

Но, как оказывается, теория *DN*-распределения такова, что является подспорьем особенно при удачном выявлении закономерностей, лежащих как бы в «недрах» самого *DN*-распределения. Это говорит как о достаточной развитости теории самого этого распределения, так и о потенциальной способности адекватно описывать реальные физические процессы на основе разумного использования и других вероятностных подходов при решении теоретических и, что очень важно, практических задач проектирования и прогнозирования.

В представленной работе удачно выявлены некоторые связи, существующие между параметрами *DN*-распределения, путем подстановки в переменную времени t, некоторых моментов времени, представленных явными выражениями, содержащими одноименные параметры μ и ν самого распределения. Как оказалось в процессе исследования, параметры μ и ν вместе с парой исходно введенных моментов времени t_1 и t_2 представляют как бы некоторую замкнутую систему, где параметры μ и ν определяются аналитическими выражениями и являются функциями моментов времени t_1 и t_2.

Эти моменты, в свою очередь, будучи введенными изначально для исследования, являются явными функциями параметров μ и ν. Такое представление на основании изложенного выше подхода, как надеемся, позволит решать такие вопросы, как получение обоснованных оценок величин наработок на отказ и среднего времени остаточной продолжительности безотказного функционирования элемента (системы). Как полагаем, эти дополнительные исследования, которые предстоит сделать, будут иметь характер более прикладного значения, и могут существенно опираться на результаты, представленные в данной работе, благодаря счастливо выявленным важным следствиям из формулы самого DN-распределения.

4. Принципиальная схема возможного определения наработки на отказ

Пусть на оси времени последовательно располагаются интервалы времени $(n,n+1)$ $n=(1,2,3,...)$, где целые числа n и $n+1$ означают моменты времени (при выбранной единице времени, например, часе или годе), а n и $n+1$ – это концы таких интервалов. Длины всех интервалов $n=(1,2,3,...)$, как видно, одинаковы и равны 1 (единице времени).

Исходя из уже рассмотренного подхода, предполагая, что такие интервалы возможны для содержания в них моментов окончания безотказного функционирования элемента (системы), выходит, что параметры ν, согласно с формулой (6), в данном случае будут определяться формулой

$$\frac{1}{\nu^2}=\sqrt{\frac{n+1}{n}},\ n=(1,2,3,...). \tag{18}$$

Параметры μ, по аналогии с полученной ранее формулой (8), будут рассчитываться по формуле

$$\mu=\sqrt{n(n+1)},\ n=(1,2,3,...). \tag{19}$$

Вероятность того, что отказ произойдет в интервале $(n,n+1)$, с помощью уже полученной формулы (12), имеющей вид

$$F(t_2)-F(t_1)=\Phi\left(\frac{1-\nu^2}{\nu^2}\right)-\Phi\left(\frac{\nu^2-1}{\nu^2}\right),$$

будет определяться этой формулой путем замены в формуле (12) моментов времени t_1 и t_2 соответственно моментами $n+1$ и n.

Упомянутые вероятности можно считать реализациями мысленного эксперимента, проводимого над каждым из интервалов $(n,n+1)$, и состоящего в определении посредством формулы (12) относящихся к ним вероятностей.

Для правомерного их использования при решении прикладных задач (например, задачи оценки средней наработки) необходимо корректно определять относительный вклад каждой вероятности из мыслимой их совокупности, т.е. при каждом фиксированном значении n, где $n=(1,2,3,...)$, в сумму вероятностей по всем n. Это, по сути, задача определения весов каждой вероятности в такой совокупности.

Итак, будем определять веса вышеупомянутых вероятностей выражением

$$V_n=\frac{W_n}{\sum_{k=1}^{N}W_k}\quad n=(1,2,3,...N). \tag{20}$$

В этой формуле W_n и V_n обозначают соответственно упомянутые выше вероятности и их веса, а N, как видим, верхний предел суммирования. Определение этого связано с разумным прагматичным подходом, включающим возможные ограничения на процесс функционирования элемента (системы), например, заданием граничного срока эксплуатации.

Следует отметить, что сумма вероятностей W_k в (20) никак не обязана быть равной единице, поскольку эти вероятности не относятся к событиям, составляющим полную группу событий, где сумма их вероятностей должна быть равной 1.

Определение весов V_n, очевидно, необходимо, когда стоит задача получить некую удовлетворяющую усредненную величину, используя возможные реализации, получаемые при как бы проведении мысленного эксперимента, при котором требуемые вероятности (реализации) могут быть приемлемо определены.

Определение весов необходимо, в частности, и когда требуется находить среднее остаточное время функционирования системы. Здесь, как и в случае с наработкой, помимо определения весов, необходимо привлечение к использованию упомянутого уже параметра μ, связанного с приемлемым определением времени, отсчитываемого с момента начала функционирования $t = 0$ до момента его прекращения в некотором интервале $(k,k+1)$, где k – это целое значение единиц времени: $k = (1,2,3,...N)$, не исключая упоминавшегося значения N, а отказ может случиться в любом временном интервале $(k,k+1)$. При этом посредством значения параметра ν определяется вероятность того, что отказ произойдет в любом конкретном интервале.

Заключение. Использование предложенного выше принципиального подхода, базирующегося на следствиях из формулы DN-распределения, может основываться на следующем. Значения вероятностей совокупности W_n, $n = (1,2,3,...)$, определяемые с помощью формулы (12), могут мыслиться как события, частоты которых определяются выражением (20). Сами эти частоты являются как бы вероятностями более высокого порядка в сравнении с вероятностями W_n. В этой связи полезно напомнить, что сумма упомянутых уже весов V_n, учитывая равенство (20), будет, очевидно, равна 1 (единице).

Что касается параметра μ, то привлечение его в исследование, как можно правомерно считать, будет необходимым при получении оценок наработки на отказ или среднего остаточного времени функционирования. Полагаем, что получение таких оценок, а также использование предложенного подхода для решения и некоторых других задач, где фигурирует DN-распределение, окажется полезным на этапе проектирования систем.

Список литературы:

1. Стрельников В.П., Федухин А.В. Оценка и прогнозирование надежности электронных элементов и систем. – К.: Логос; 2002. – 486 с.
2. Большев Л.Н., Смирнов Н.В. Таблицы математической статистики. – М.: Наука: Главная редакция физико-математической литературы, 1983. – 116 с.

Федухін О.В., Ярошенко В.М., Муха А.А.
Інститут проблем математичних машин та систем
Національної академії наук України

ПРО ВАЖЛИВІ НАСЛІДКИ ФОРМУЛИ DN-РОЗПОДІЛУ НАПРАЦЮВАННЯ ДО ВІДМОВИ

Анотація
Розглядається новий підхід, пов'язаний з функцією DN-розподілу, що дозволяє запропонувати вирази для двох довільних моментів часу, що залежать від параметрів розподілу. З цих виразів отримані також зворотні формули для параметрів розподілу як функцій цих моментів часу. Отримано оцінку ймовірності тривалості безвідмовного функціонування об'єкта, що лежить між двома введеними довільними моментами часу.
Ключові слова: DN-розподіл, довільні моменти часу, параметри розподілу, функції моментів часу, тривалість безвідмовного функціонування.

Fedukhin A.V., Yaroshenko V.N., Mukha A.A.
Institute of Mathematical Machines and Systems Problems
of the Ukraine National Academy of Science

ABOUT IMPORTANT COROLLARIES FROM THE FORMULA DN-DISTRIBUTION TIME TO FAILURE

Summary
A new approach, associated with the function of DN-distribution, which allows to propose expressions for two arbitrary points in time, depending on the distribution parameters,was discussed. From these expressions are also obtained inverse formulas for the distribution parameters as functions of these time points. An estimate of the probability of the duration of object's failure-free operation, which lies between the two imposed arbitrary time points, was obtained.
Keywords: DN-distribution, arbitrary points in time, the distribution parameters, the function of time points, the duration of failure -free operation.