ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 537

ЗБУДЖЕННЯ БАГАТОШАРОВОГО П'ЄЗОКЕРАМІЧНОГО ПАКЕТУ НЕСТАЦІОНАРНИМ ЕЛЕКТРИЧНИМ СИГНАЛОМ

Бабаєв О.А., Штефан Н.І., Гнатейко Н.В.
Національний технічний університет України «Київський політехнічний інститут»

У даній статті розглядається дослідження перехідних процесів і отримати залежності для визначення фізичних характеристик, які виникають при збудженні нестаціонарними електричними імпульсами багатошарового пьезокерамического пакета який контактує з ідеальної стисливої рідиною. Один край пакета жорстко защемлений, а інший підкріплений пружним шаром та контактує з півпростором ідеальної стисливої рідини. При цьому нестаціонарний електричний сигнал подається безпосередньо на струмопровідні поверхності. Представлені основні формули для визначення фізичних характеристик досліджуваного перехідного процесу.

Ключові слова: перетворення Лапласа за часом, акустичне середовище, п'єзоперетворювач, функція Хевісайда.

Актуальність. Тематика даної роботи, присвяченої дослідженню динамічних процесів в гідроелектропружних системах та відноситься до одного з сучасних напрямків механіки деформівного твердого тіла, та має інтенсивний розвиток в цьому напрямку в наш час. Отримані фундаментальні наукові результати в цій області знаходять широке застосування при вдосконаленні існуючих і створенні принципово нових технічних пристроїв, дія яких заснована на використанні явища п'єзоефекту, що свідчить про їхню актуальність.

Розширення знань з цієї проблематики вимагає постановок нових класів задач, які по можливості повніше враховують конструктивні особливості та умови експлуатації реальної апаратури, розробки ефективних методів їх вирішення та виявлення нових механічних закономірностей процесів в гідроелектропружних системах.

Математична постановка задачі. Розглядається задача про збудження багатошарового п'єзокерамічного пакету нестаціонарним електричним сигналом що підводиться до електродів які розташовані на площинах контакту електропружних елементів. Один з країв пакету жорстко закріплений, а інший підкріплений пружнім шаром що контактує з півпростором ідеальної стисливої рідини. Кожний з N п'єзокерамічних шарів має товщину h та однакові механічні властивості, а пружний шар – товщину l. При описанні перехідних процесів в гідроелектропружній системі використовуються рівняння лінійної теорії електропружності, теорії пружності та акустичного наближення. В рамках прийнятих моделей суцільних середовищ формулювання задачі має наступний вигляд:

$$\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial z^2}=\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial t^2};\frac{\partial^2 \Psi^{(k)}}{\partial z^2}=\left(-1\right)^k\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial z^2};\qquad(1)$$

$$\sigma^{(k)}=\frac{\partial^2 u^{(k)}}{\partial z^2}-\left(-1\right)^k\chi\frac{\partial \Psi^{(k)}}{\partial z},\quad k=1,2,........,N;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2}=a^2\frac{\partial^2 w}{\partial t^2};\tau=\beta\frac{\partial w}{\partial z};\qquad(2)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}=b^2\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2};\ p=-\lambda\frac{\partial \varphi}{\partial t},\qquad(3)$$

де $u^{(k)}$, $\sigma^{(k)}$, $\Psi^{(k)}$ – відповідно переміщення, напруження (вздовж вісі z) та напруженість електричного поля у k – м п'єзокерамічном шарі; w та τ – переміщення та напруження у пружному елементі; φ та p – хвильовий потенціал і тиск в акустичному середовищі:

$$\chi=\frac{e_{33}^2}{C_{33}^E\varepsilon_{33}^s};a=\sqrt{\frac{\left(C_{33}^E\varepsilon_{33}^s+e_{33}^2\right)\gamma}{E\mu\varepsilon_{33}^s}};b=\sqrt{\frac{\left(C_{33}^E\varepsilon_{33}^s+e_{33}\right)\gamma}{c^2\mu\varepsilon_{33}^s}};\lambda=\frac{\rho c^2}{C_{33}^E}.$$

Тут $C_{33}^E,e_{33},\varepsilon_{33}^s,\mu$ – характеристики електропружніх шаров (відповідно модуль пружності, п'єзомодулі та густина); E, γ – відповідно модуль Юнга та густина пружного матеріалу; c та ρ – параметри акустичного середовища.

На поверхнях контакту складових пакету приймаються умови жорсткого зчеплення, на поверхні рідини – умова не протікання:

$$u^{(1)}\Big|_{z=0}=0;$$

$$u^{(k)}\Big|_{z=kh}=u^{(k+1)}\Big|_{z=kh};\sigma^{(k)}\Big|_{z=kh}=\sigma^{(k+1)}\Big|_{z=kh}\left(k=1,2,3,.......,N\right);\qquad(4)$$

$$u^{(N)}\Big|_{z=Nh}=w\Big|_{z=Nh};\sigma^{(N)}\Big|_{z=Nh}=\tau^{(k+1)}\Big|_{z=Nh};$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}\Big|_{z=Nh+l}=\frac{\partial \varphi}{\partial z}\Big|_{z=Nh+l};\tau\Big|_{z=Nh+l}=-p\Big|_{z=Nh+l}.$$

Конфігурація нестаціонарного електричного імпульсу який підводиться до електродованих площин $(z=kh)$ нестаціонарного електричного імпульса визначається функцією $Q\ (t)$:

$$\Psi^{(k)}\Big|_{z=kh}=\left(-1\right)^k Q(t)H(t);\Psi^{(k)}\Big|_{z=(k-1)h}=\left(-1\right)^{k-1}Q(t)H(t),\qquad(5)$$

де k = 1, 2,….., N, H – одинична функція Хевісайда.

Початкові умови є однорідними.

У рівняннях (1) – (5) використовуються безрозмірні позначення, згідно яких переміщення $u^{(k)}$, w, товщини h, l та координата z віднесені до h; час t – до h/η $\eta=\sqrt{(C_{33}^E\varepsilon_{33}^s+e_{33}^2)/(\mu\varepsilon_{33}^s)}$); напруження $\sigma^{(k)},\tau$ та гідродинамічний тиск p – до C_{33}^E.

Розв'язок задачі. Застосувавши до рівнянь (1) – (3) та граничним умовам (4), (5) інтегральне перетворення Лапласа за часом.

У просторі зображень загальні розв'язки задачі з врахуванням обмежування збурення у акустичному середовищі при умові що $z \to \infty$ визначається формулами:

$$u^{(k)L} = A^{(k)L}(s)\frac{1}{s}e^{-s(k-z)} + B^{(k)L}(s)\frac{1}{s}e^{-s(z-(k-1))}, \qquad (6)$$

$$\Psi^{(k)L} = (-1)^k \left\{ A^{(k)L}(s)\frac{1}{s}e^{-s(k-z)} + B^{(k)L}(s)\frac{1}{s}e^{-s(z-(k-1))} + D^{(k)L}(s)(z-k+1) + C^{(k)L}(s) \right\};$$

$$w^L = M^L(s)\frac{1}{s}e^{-sa(N+l-z)} + N^L(s)\frac{1}{s}e^{-sa(z-N)}; \qquad (7)$$

$$\varphi^L = R^L(s)\frac{1}{s}e^{-sb(z-N-l)}, \qquad (8)$$

де $A^{(k)L}(s), B^{(k)L}(s), D^{(k)L}(s), C^{(k)L}(s)\ (k = 1,2,3,......,N)$; $M^{(k)L}(s), N^{(k)L}(s); R^L(s)$ – функція параметра перетворення, які визначаються з граничних умов, h=1.

Задовольнив співвідношенням для потенціалів $\Psi^{(k)L}$ на поверхнях z = 0, 1, 2, 3,......, N (5), знайдемо залежності між величинами $A^{(k)L}(s), B^{(k)L}(s), D^{(k)L}(s), C^{(k)L}(s)$:

$$C^{(k)L} = -Q^L(s) - A^{(k)L}(s)\frac{1}{s}e^{-s} - B^{(k)L}(s)\frac{1}{s};$$

$$D^{(k)L} = 2Q^L(s) - A^{(k)L}(s)\frac{1}{s}(1-e^{-s}) + B^{(k)L}(s)\frac{1}{s}(1-e^{-s}). \qquad (9)$$

Невідомі $A^{(k)L}(s), B^{(k)L}(s)\ (k = 1,2,3,......,N); M^L(s), N^L(s); R^L(s)$ описуються наступною системою рівнянь яка була отримана в наслідок підстановки загальних розв'язків (6) – (8) та граничних умов:

при $z = 0$

$$A^{(1)L}(s)e^{-s} + B^{(1)L}(s) = 0; \qquad (10)$$

при $z = k$, k = 1, 2, 3, ..., N − 1,

$$A^{(k+1)L}(s)[(1-\xi)e^{-s} + \frac{\xi}{s}(1-e^{-s})] - B^{(k+1)L}(s)[(1-\xi)e^{-s} + \frac{\xi}{s}(1-e^{-s})] =$$
$$= A^{(k)L}(s)[(1-\xi)e^{-s} + \frac{\xi}{s}(1-e^{-s})] - B^{(k)L}(s)[(1-\xi)e^{-s} + \frac{\xi}{s}(1-e^{-s})]; \qquad (11)$$
$$A^{(k+1)L}(s)e^{-s} + B^{(k+1)L}(s) = A^{(k)L}(s) - B^{(k)L}e^{-s},$$

де $\xi = \frac{e_{33}^2}{C_{33}^E \varepsilon_{33}^2}$;

при $z = N$

$$A^{(N)L}(s)[1-\xi + \frac{\xi}{s}(1-e^{-s})] - B^{(N)L}(s)[(1-\xi)e^{-s} + \frac{\xi}{s}(1-e^{-s})] - 2\xi Q^L(s) =$$
$$= \xi a M^L(s)e^{-sal} - \xi a N^L(s); \qquad (12)$$

де $\xi = \frac{E}{C_{33}^E}$;

при $z = N + l$

$$M^L(s) + N^L(s)e^{-sal} = -bR^L(s);$$
$$M^L(s) - N^L(s)e^{-sal} = -\delta R^L(s), \qquad (13)$$

де $\delta = \frac{\lambda}{\beta a}$.

Для кожного конкретного N теоретично система (10) – (13) може бути розв'язана у явному вигляді. Зі зміною N процедура отримання явних формул для $A^{(k)L}(s), B^{(k)L}(s)\ (k = 1,2,3,......,N); M^L(s), N^L(s); R^L(s)$ необхідно виконувати заново. При такому підході навіть у випадку структур з невеликою кількістю шарів формули, які описують шукані функції є настільки складні, що їх інверсія в подальшому практично не можлива.

Запропонований метод розв'язання задачі дозволяє проводити розрахунки перехідних процесів у багатошарових електропружних пакетах з довільним числом елементів.

Введемо нову невідому функцію

$$X^{(k)L}(s) = \frac{1}{s}\frac{B^{(k)L}}{A^{(k)L}}. \qquad (14)$$

З рівняння (10) випливає наступне

$$X^{(1)L}(s) = -\frac{1}{s}e^{-s}. \qquad (15)$$

За допомогою співвідношення (11) вдається отримати рекурентну

я $X^{(k+1)L}(s)$, та $X^{(k)L}(s)$:

$$X^{(k+1)L}(s) = \{1 + \frac{\xi}{1-\xi}[\frac{1}{s} - \frac{1}{s}e^{-s} - \frac{1}{2}X^{(k)L}(s) + X^{(k)L}(s)e^{-s} - \frac{1}{2}X^{(k)L}(s) + X^{(k)L}(s)e^{-2s}]\} =$$
$$= \frac{\xi}{2(1-\xi)}\frac{1}{s^2}(1-2e^{-s}+e^{-2s}) + \frac{\xi}{1-\xi}(\frac{1}{s}e^{-s} + \frac{1-\xi}{\xi}e^{-2s} - \frac{1}{s}e^{-2s})X^{(k)L}(s),\ k = 1,2,......,N-1 \qquad (16)$$

Після інверсії рівнянь (15), (16) значення $X^{(k)}(t)$ (k = 2, ..., N) можуть бути знайдені в результаті послідовного розв'язку інтегральних рівнянь:

$$X^{(k+1)}(t) + \frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t [1 - \frac{1}{2}X^{(k)}(t-x)]X^{(k+1)}(x)dx =$$
$$= \frac{\xi}{2(1-\xi)}[t - 2(t-1)H(t-1) + (t-2)H(t-2)] + \frac{\xi}{1-\xi}\{\int_1^t X^{(k)}(x-1)dx + \int_1^t [1 - X^{(k)}(t-x)]X^{(k+1)}(x-1)dx\} \qquad (17)$$
$$H(t-1) + \{X^{(k)}(t-2) - \frac{\xi}{1-\xi}[\int_2^t X^{(k)}(x-2)dx - \frac{1}{2}\int_2^t X^{(k)}(t-x)X^{(k+1)}(x-2)dx]\}H(t-2),$$

де

$$X^{(1)}(t) = -H(t-1). \qquad (18)$$

В подальшому виконавши обернення співвідношень (12) та (13) і доповнив їх залежностями між $A^{(N)}(t)$, $B^{(N)}(t)$, $X^{(N)}(t)$, отримаємо наступну систему рівнянь:

$$A^{(N)}(t) + \frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t A^{(N)}(x)dx - \frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t B^{(N)}(x)dx + \frac{a\xi}{1-\xi}N(t) =$$
$$= \frac{2\xi}{1-\xi}Q(t) + [\frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t A^{(N)}(x-1)dx + B^{(N)}(t-1) - \frac{\xi}{1-\xi}\int_1^t B^{(N)}(x-1)dx]H(t-1) -$$
$$-\frac{a\xi}{1-\xi}M(t-al)H(t-al);$$
$$A^{(N)}(t) - N(t) = B^{(N)}(t-1)H(t-1) + M(t-al)H(t-al);$$
$$\int_0^t B^{(N)}(x)dx - \int_0^t A^{(N)}(x)X^{(N)}(t-x)dx = 0; \qquad (19)$$

$$M(t) + bR(t) = -N(t-al)H(t-al);$$
$$M(t) + \delta R(t) = N(t-al)H(t-al). \qquad (20)$$

Тут значення $X^{(N)}(t)$ є відомими (вони обчислені при послідовному розв'язку інтегральних рівнянь (17)). Відмітимо, що рівняння (19) отримано в результаті інверсії (14). Система рівнянь (19), (20) містить два інтегральні і три алгебраїчні рівняння та є системою з запізнюючими аргументами. Її розв'язок може бути отримано чисельно з використанням квадратурних формул. При $t < min(1; al)$ з рівняння (19) знаходяться значення $A^{(N)}(t)$, $B^{(N)}(t)$, $N(t)$. У більш пізніші моменти часу при $t > al$ величини $N(t - al)$, є відомими та використовуються при визначені $M(t)$, $R(t)$ з рівнянь (20). В свою чергу функція M з запізнюючими аргументами, що входять у праві частини рівнянь (19), починаючи з моменту часу $t > al$.

Отримавши значення $A^{(N)}(t)$, $B^{(N)}(t)$ та розв'язуючи послідовно в порядку зменшення k ($k = N - 1$; $N - 2$, ... , 1) трансформовані за допомогою зворотнього перетворення Лапласа рівняння (11), отримаємо для кожного k наступну рекурентну систему (де одне – інтегральне (Вольтерра), а друге – алгебраїчне рівняння, з якого визначаються величини $A^{(k)}(t)$, $B^{(k)}(t)$)

$$A^{(k)}(t) + \frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t A^{(k)}(x)dx + \frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t B^{(k)}(x)dx =$$
$$= \frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t A^{(k+1)}(x)dx - B^{(k+1)}(t) - \frac{\xi}{1-\xi}\int_1^t B^{(k+1)}(x)dx +$$
$$+\{A^{(k+1)}(t-1) - \frac{\xi}{1-\xi}[\int_0^t A^{(k+1)}(x-1)dx - \int_1^t B^{(k+1)}(x-1)dx - \qquad (21)$$
$$-\int_0^t A^{(k)}(x-1)dx] + B^{(k)}(t-1) - \frac{\xi}{1-\xi}\int_1^t B^{(k+1)}(x-1)dx]H(t-1);$$

$$A^{(k)}(t)=B^{(k+1)}(t)+[A^{(k+1)}(t-1)-B^{(k)}(t-1)]H(t-1).$$

Після визначення функцій $A^{(k)}(t)$, $B^{(k)}(t)$, (k = 1, 2, ..., N), $M(t)$, $N(t)$, $R(t)$ неважко знайти різні фізичні характеристики хвильового поля у п'єзокерамічних пакетах, пружному пакету та рідині.

Наприклад, формули для розрахунку $u^{(k)}(t, z)$, $\sigma^{(k)}(t, z)$, $w(t, z)$, $p(t, z)$, які мають наступний вид:

$$u^{(k)}(t,z)=\int_{k-z}^{t}A^{(k)}[x-(k-z)]dx+\int_{z-k+1}^{t}B^{(k)}[x-(z-k+1)]dx=0; \quad (22)$$

$$\sigma^{(k)}(t,z)=(1-\xi)\{A^{(k)}[t-(k-z)]-B^{(k)}[t-(z-k+1)]\}+$$
$$+\xi\{\int_{0}^{t}[A^{(k)}(x)-B^{(k)}(x)]dx-\int_{1}^{t}[A^{(k)}(x-1)-B^{(k)}(x-1)]dx\}-2\xi Q(t); \quad (23)$$

$$w^{(k)}(t,z)=\int_{a(N+l-z)}^{t}M[x-a(N+l-z)]dx+\int_{a(z-N)}^{t}N[x-a(z-N)]dx; \quad (24)$$

$$p(t,z)=-R[t-b(z-N-l)]. \quad (25)$$

Якщо розглядати багатошаровий п'єзокерамічний пакет з однією – жорстко закріпленою, а з іншою – вільною границями (пружний шар та рідина відсутні), у площині $z = N$ приймається умова

$$\sigma^{(N)}\Big|_{z=Nh}=0. \quad (26)$$

В цьому випадку рівняння (19), (20), які відповідають граничним умовам при $z = Nh$, необхідно виконати заміну на рівняння які мають вид:

$$A^{(N)}(t)+\frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t A^{(N)}(x)dx-\frac{\xi}{1-\xi}\int_0^t B^{(N)}(x)dx=\frac{2\xi}{1-\xi}Q(t)+$$
$$+[\frac{\xi}{1-\xi}\int_1^t A^{(N)}(x-1)dx+B^{(N)}(t-1)-\frac{\xi}{1-\xi}\int_1^t B^{(N)}(x-1)dx]H(t-1). \quad (27)$$

Відмітимо, що співвідношення (17), (18), (21) – (25) залишаються незмінними.

Мета статті. Головна мета цієї роботи полягає в наступному, це виконана постановка та розв'язок нестаціонарної задачі випромінювання акустичних хвиль багатошаровим пакетом у акустичне середовище. Рівняння що описують збуджений рух акустичного середовища трансформуються за допомогою інтегрального перетворення Лапласа за часом. Наведені основні формули для визначення фізичних характеристик досліджуваного перехідного процесу.

Висновки. Отримані результати можуть бути використані в науково-дослідних організаціях при розробці акустичної техніки, а також в педагогічному процесі

Список літератури:

1. Бабаев А. Э. Нестационарные волны в сплошных средах с системой отражающих поверхностей. – Киев.: Наукова думка, 1990. – 176 с.
2. Верлань А. Ф., Сизиков В. С. Методы решения интегральных уравнений с программами для ЭВМ. – Киев: Наукова думка, 1978. – 291 с.
3. Головчан В. Т., Кубенко В. Д., Шульга Н. А., Гузь А. Н., Гринченко В. Т. Пространственные задачи теории упругости и пластичности: В шести т. – Т. 5. Динамика упругих тел. – К.: Наукова думка, 1986. – 286 с.
4. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1962, 108 с.
5. Гринченко В. Т., Улитко А. Ф., Шульга Н. А. Электроупругость. Т. 5 – Механика связанных полей в элементах конструкций. – Киев: Наукова думка, 1989. – 280 с.
6. Диткин В. А., Прудников А. О. Справочник по операционному исчислению. – М.: Высшая школа, 1965. – 466 с.
7. Пьезокерамические преобразователи // Под. ред. С. И. Пугачева. – Л.: Судостроение, 1984. – 256 с.
8. Слепян Л. И. Нестационарные упругие волны. – Л.: Судостроение, 1972. – 374 с.

Бабаев А.А., Штефан Н.И., Гнатейко Н.В.
Национальный технический университет Украины «Киевский политехнический институт»

ВОЗБУЖДЕНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ПЬЕЗОКЕРАМИЧЕСКОГО ПАКЕТА НЕСТАЦИОНАРНЫМ ЭЛЕКТРИЧЕСКИМ СИГНАЛОМ

Аннотация
В данной статье рассматривается исследование переходных процессов и получить зависимости для определения физических характеристик, которые возникают при возбуждении нестационарными электрическими импульсами многослойного пьезокерамического пакета который контактирует с идеальной сжимаемой жидкостью. Один край пакета жестко защемлен, а другой подкреплен упругим слоем, соприкосающимся с полупространством идеальной сжимаемой жидкости. При этом нестационарный электрический сигнал подается непосредственно на токопроводящие поверхности.Представлены основне формулы для определения физических характеристик исследуемого переходного процесса.

Ключевые слова: преобразования Лапласа по времени, акустическая середа, пьезопреобразователь, функция Хевисайда.

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

Babayev A.A., Shtefan N.I., Gnateyko N.V.
National Technical University of Ukraine «Kyiv Polytechnic Institute»

EXCITATION MULTILAYER PIEZOCERAMIC PACKAGE NONSTATIONARY ELECTRICAL SIGNALS

Summary
This article describes a study of transients and receiving according to the definition of the physical characteristics that occur in the excitation of non-stationary electrical pulses multilayer piezoceramic package which is in contact with an ideal compressible fluid. One edge of the package is rigidly fixed and the other is supported by an elastic layer contacted with half-an ideal compressible fluid. In this transient electrical signal is applied directly to the conductive surfaces. It's presented basic formula which was for determining the physical characteristics of the test of the transition process.
Keywords: laplace transform in time, acoustic area, piezoelectric transducer, the Heaviside function.