УДК 519.63

ЕФЕКТИВНІ МЕТОДИ ЧИСЕЛЬНОГО РОЗВ'ЯЗКУ ТОЧКОВИХ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Хайдуров В.В.
Європейський університет, Черкаська філія

У нинішній час обернені задачі теплопровідності (ОЗТ) є досить актуальними. Вони виникають у різних галузях науки та техніки. Відомо, що для розв'язання однієї ОЗТ необхідно розв'язувати велику кількість прямих задач теплопровідності (ПЗТ). Очевидно, що для розв'язання подібного класу задач потрібно досить багато обрахунків, які займають довгий час. У роботі запропоновані методи, які оптимізують кількість обчислень для отримання чисельного розв'язку даного класу задач. Тестування методів виконано на точкових обернених задачах теплопровідності.

Ключові слова: обернена задача теплопровідності (ОЗТ), чисельний розв'язок ОЗТ, квадратичний функціонал, обмеження у вигляді диференціальних рівнянь.

Постановка проблеми. У роботі описано досить актуальне завдання оптимізації. Потрібно знайти оптимальну температуру промислової печі, система опалення якої є на основі електричних нагрівачів.

Перша частина дослідження полягає у обчисленні температури поля всередині печі, коли значення температур нагрівачів відомі. Ця робота називається прямою задачею: значення температур нагрівачів відомі, а температурне поле потрібно знайти.

Друга частина дослідження, яка саме і описана у статті, присвячена обчисленню значень температур точкових нагрівачів та їх розташувань для підтримки температури в печі. Неважко здогадатись, що кожна із задач цього дослідження є задачею оптимізації.

Перша задача оптимізації звучить наступним чином. У піч вбудовані точкові нагрівачі. Потрібно знайти такі температури цих нагрівачів, щоб температура на об'єкті печі була близька до наперед заданої.

Друга задача оптимізації звучить наступним чином. У піч вбудовані точкові нагрівачі, температури яких відомі. Потрібно знайти розташування цих нагрівачів у області печі, щоб температура на об'єкті печі була близька до наперед заданої.

Розрахунок температурних полів двох вище сформульованих задач здійснюється з методом скінченних елементів.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Відомо, що більшість обернених задач, зокрема задач теплопровідності вимагають великої кількості обчислень. Кожна обернена задача індивідуальна. Основним завданням даної статті є прискорення отримання чисельного розв'язку точкових обернених задач теплопровідності.

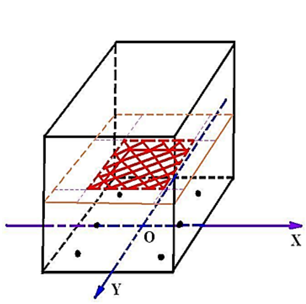
Аналіз останніх публікацій. У промисловості існує ряд задач, які зводяться до обернениз задач математичної фізики. У [1; 2] описано кілька таких задач, зокрема задача про відновлення початкової умови для рівняння теплопровідності. У [3] описаний підхід до знаходження чисельного розв'язку лінійної ОЗТ на відновлення початкової умови. У [4] описано загальний підхід до розв'язання нелінійних ОЗТ на відновлення початкової умови. У статті описані модифікації методу Ньютона, для знаходження чисельного розв'язку нелінійних обернених точкових задач теплопровідності.

Мета статті. Головною метою даної статті є розробка та апробація методів, які зменшують кількість обчислень при розв'язанні нелінійних точкових задач теплопровідності.

Виклад основного матеріалу. Технічна постановка першої задачі оптимізації.

В піч покладено об'єкт. Піч не спроможна нагріти об'єкт до заданої температури. З метою підвищення ефективності її роботи, у неї вмонтовані точкові нагрівачі, розташування яких задається двома просторовими координатами. Потрібно знайти такі значення температур цих нагрівачів, щоб температура на об'єкті була близька до наперед заданої. Розрахувати температурне поле всередині печі, яке утвориться в результаті дії цих нагрівачів при знайдених значеннях їх температур.

Для простоти ми обмежимося геометрією задачі елементарної форми: об'єкт печі – прямокутник, який поміщено в область даної печі (див. рис. 1).



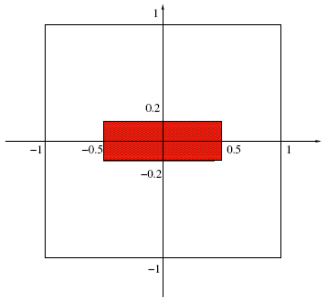


Рис. 1. Положення об'єкту всередині печі

Рівняння в частинних похідних, яке описує розповсюдження тепла всередині печі з часом, має наступний вигляд

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} = \nabla(k \nabla T). \quad (1)$$

Надалі будемо використовувати стаціонарний процес, тобто коли $\frac{\partial T}{\partial t} = 0$. Рівняння (1) набуде вигляду (2):

$$\nabla(k \nabla T) = 0. \quad (2)$$

Повний розв'язок стаціонарної задачі теплопровідності у заданій області містить:

ТЕХНІЧНІ НАУКИ

1) Граничні умови: $\partial D = \partial D_D + \partial D_N$, $(x,y) \in \partial D_D : T = T(x,y)$; $(x,y) \in \partial D_N : \partial T / \partial n = p(x,y)$. Тут ∂D – границя області, ∂D_D – частина границі (може бути порожня), на якій задано умову Дирихле та ∂D_N – частина границі, на якій задано умову Неймана, n – нормаль до границі області.

2) Залежність параметрів задачі від координат та температури: $k = k(x,y,T)$.

Для фізичних і математичних задач, температурне поле повинне задовольняти певним умовам на стінках печі. Для прикладу буде взято умову першого роду на двох протилежних стінках печі, а саме: T_D на $\partial\Omega_D$ (умова Дирихле). Друга частина умов (на двох інших протилежних стінках) задає теплоізоляцію на ∂D_N (умова Неймана). Остання умова поєднує температурний баланс між серединою та зовнішньою частиною печі.

Математична постановка першої задачі оптимізації

Знайти глобальний мінімум функціоналу

$$J(\overline{\alpha}) = \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{задане} - T(\overline{\alpha})\right)^2 ds, \qquad (3)$$

при обмеженні

$$\nabla(k\nabla T) = 0 \text{ на } D \in (x,y), D \subset R^2 \qquad (4)$$

де $T_{задане}$ – наперед задана температура, яка повинна бути на об'єкті печі,

D_{object} – область, у якій знаходиться об'єкт печі,

D – область всієї печі $(D_{object} \subset D)$,

$\overline{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – шукані значення температур вбудованих у піч нагрівачів,

n – кількість вбудованих у піч точкових нагрівачів.

З математичної постановки першої ОЗТ (3), (4) видно, що вона відноситься до серії задач на умовний екстремум [3; 4]. Слід також відмітити, що умова представляє собою саме рівняння стаціонарної теплопровідності (4). У якості основного підходу до розв'язання даної задачі є метод множників Лагранжа.

Очевидно, що задача є нелінійною, тому її потрібно розв'язувати чисельно. До класичних методів розв'язку подібних нелінійних ОЗТ відносять різні модифікації методів Ньютона [1; 2]. Не дивлячись та не, що сам же метод Ньютона має матрицю Гессе, яка для даних задач обраховується досить довго, він є одним із найоптимальніших методів розв'язку подібного класу ОЗТ.

Як вже було сказано, задачу (3), (4) будемо розв'язувати методом скінченних елементів. Це означає, що шуканий розподіл температури описується значеннями температури у вузлах сітки, тобто являє собою досить великий масив дійсних чисел. Звідси випливає, що ми маємо задачу мінімізації, яка залежить від певного числа визначальних параметрів.

Технічна постановка другої задачі оптимізації

В піч покладено об'єкт. Піч не спроможна нагріти об'єкт до заданої температури (див. рис. 1). З ціллю підвищення ефективності її роботи, у неї вмонтовані точкові нагрівачі, розташування яких задається двома просторовими координатами. Температури цих нагрівачів задані. Потрібно визначити такі їхні розташування у самій печі, щоб температура на об'єкті була близька до наперед заданої. Розрахувати температурне поле всередині печі, яке утвориться в результаті дії цих нагрівачів при знайдених значеннях їх положень.

Математична постановка другої задачі оптимізації

Знайти глобальний мінімум функціоналу

$$J(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \iint\limits_{D_{object}} \left(T_{задане} - T(\overline{\alpha}, \overline{\beta})\right)^2 ds, \qquad (5)$$

при обмеженні

$$\nabla(k\nabla T) = 0 \text{ на } D \in (x,y), D \subset R^2 \qquad (6)$$

де $T_{задане}$ – наперед задана температура, яка повинна бути на об'єкті печі,

D_{object} – область, у якій знаходиться об'єкт печі,

D – область всієї печі $(D_{object} \subset D)$,

$\overline{\alpha} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ – шукані координати осі абсцис розташування нагрівачів,

$\overline{\beta} = (y_1, y_2, ..., y_n)$ – шукані координати осі ординат розташування нагрівачів,

n – кількість вбудованих у піч точкових нагрівачів.

Пошук значення функції, яка мінімізується вимагає чисельного розв'язку диференціального рівняння (4) та (6), тому для кожної із описаних вище задач мінімізацію функціоналу (3) та (5) будемо проводити двома способами:

а) методом найшвидшого спуску,

б) розв'язуючи систем нелінійних рівнянь.

Методи спуску

Розглянемо приклад. Нехай $f(x) \to \min, x \in R$. Застосуємо до задачі безумовної оптимізації метод найшвидшого спуску. За напрям спуску потрібно взяти рух у напрямі антиградієнту, наприклад, наступним чином:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - h_k f'(x^{(k)}), \ h_k > 0, k = 0,1,2,....$$

Задача полягає у тому, щоб знайти на кожному кроці таке значення h_k, яке мінімізує функцію при певному значенні $x^{(k)}$. Воно береться з попередньої ітерації. Пошук такого значення h_k може

Таблиця 1

Результати роботи модифікованих методів. Сітка на 2048 елементів (5789 вузлів). Точність обчислень eps = 10^{-9}

	Задача 1 (15)	Задача 2 (16)	Задача 3 (17)
Метод найшвидшого спуску	44325 викликів функції (100%)	34540 викликів функції (100%)	38122 виклики функції (100%)
Класичний метод Ньютона	11456 викликів функції	12525 викликів функції	11523 виклики функції
Перша модифікація методу Ньютона (10)	6423 виклики функції	5325 викликів функції	4124 виклики функції
Друга модифікація метода Ньютона (11)	8704 виклики функції	8384 виклики функції	6895 викликів функції
Третя модифікація метода Ньютона (12)	8238 викликів функції	7324 виклики функції	5726 викликів функції

бути реалізований з допомогою різних методів одновимірної безумовної оптимізації.

Значення параметру $h_k \in R^1$ береться з умови мінімуму функції *f (x)* у напрямі руху антиградієнту:

$$f\left(x^{(k)} - h_k f'\left(x^{(k)}\right)\right) = \min f\left(x^{(k)} - hf'\left(x^{(k)}\right)\right),\ h > 0.$$

На основі одновимірного випадку, можна записати ітерційну формулу для мінімізації функціоналу типу (4):

$$J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - h_k J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - h \cdot J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right),\ h > 0.$$

Методи Ньютона

При розв'язанні поставленої задачі, а саме при мінімізації квадратичного функціоналу типу (3), буде отримана система нелінійних рівнянь виду:

$$\frac{\partial J}{\partial(\alpha_i)} = 0, i = \overline{1,n}. \tag{7}$$

Система (7) буде розв'язуватись методом Ньютона та його модифікаціями, які будуть описані нижче.

Тепер задачу оптимізації можна поставити наступним чином – серед існуючих методів спуску та розроблених модифікацій до методів типу Ньютона обрати найбільш відповідні до поставленого класу задач і скоротити для них кількість викликів функції розв'язку ПЗТ.

При розв'язанні подібного класу задач, похідні функціоналу по кожному його параметру потрібно задавати численно, оскільки розв'язання подібних задач може бути отримано тільки чисельним шляхом (у вигляді таблиці значень). Перед тем, як записувати формули для методів запишемо спочатку класичний метод Ньютона для поставленої ОЗТ.

$$\begin{gathered} H^k \Delta\alpha^k = -R^k \\ \alpha^{k+1} = \alpha^k + \Delta\alpha^k, \end{gathered} \tag{8}$$

де $G = (H_{ij}) = \left(\partial^2 J / \partial\alpha_i \partial\alpha_j\right)$ – матриця Гессе, $\Delta\alpha = (\Delta\alpha_1, ..., \Delta\alpha_n)^T$ – вектор-стовпчик приростів параметрів, $R = (R_1, ..., R_n)^T = (\partial J/\partial\alpha_1, ..., \partial J/\partial\alpha_n)^T$ – вектор-стовпчик похідних цільового функціоналу.

На основі методу середніх та класичного методу Ньютона, можна записати формули для мінімізації функціоналу зі змінним кроком β:

$$\begin{gathered} \overline{z} = \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} = \overline{\alpha}^{(k)} - 2 \cdot \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) + H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1} J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \end{gathered}. \tag{9}$$

У класичному варіанті значення β рівне одиниці.

Аналогічним чином модифікацію класичного методу Ньютона для розв'язання нелінійної ОЗТ можна провести з введенням середнього геометричного:

$$\begin{gathered} \overline{z} = \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} = \overline{\alpha}^{(k)} - \frac{1}{2} \cdot \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \cdot H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1} \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) + H\left(\overline{z}\right)\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \end{gathered} \tag{10}$$

Останній варіант модифікації, який розглядається у роботі є також модифікацією методу Ньютона з використанням методу середніх. Ітераційні формули мають наступний вигляд:

$$\begin{gathered} \overline{z} = \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right), \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} = \overline{\alpha}^{(k)} - H^{-1}\left(\frac{\overline{\alpha}^{(k)} + \overline{z}}{2}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right). \end{gathered} \tag{11}$$

$\overline{\alpha}^{(k)}$ – вектор невідомих задачі на *k*-ій ітерації, *H* – матриця Гессе. Слід відмітити, що метод (11) має третій порядок точності.

Можна також прискорити метод (6)- (9), використавши для знаходження вектору $\overline{\alpha}^{(k+1)}$ метод найшвидшого спуску. Тоді ітераційні формули метода (6) можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered} J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - \beta_k J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right),\ \beta > 0, \\ \overline{z} = \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right), \\ J\left(\overline{z} - h_k J'\left(\overline{z}\right)\right) = \min J\left(\overline{z} - h \cdot J'\left(\overline{z}\right)\right),\ h > 0, \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} = \overline{\alpha}^{(k)} - 2h_k \cdot \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) + H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1} J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right). \end{gathered} \tag{12}$$

Ітераційні формули методу (9) можна записати у вигляді:

$$\begin{gathered} J\left(\overline{\theta}^{(k)} - \beta_k J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right),\ \beta > 0, \\ \overline{z} = \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right). \\ J\left(\overline{z} - h_k J'\left(\overline{z}\right)\right) = \min J\left(\overline{z} - h \cdot J'\left(\overline{z}\right)\right),\ h > 0, \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} = \overline{\alpha}^{(k)} - \frac{h_k}{2} \cdot \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) \cdot H\left(\overline{z}\right)\right)^{-1} \left(H\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) + H\left(\overline{z}\right)\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right). \end{gathered} \tag{13}$$

Аналогічно, метод (10) буде мати наступний вигляд:

$$\begin{gathered} J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - \beta_k J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right) = \min J\left(\overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot J'\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right)\right),\ \beta > 0, \\ \overline{z} = \overline{\alpha}^{(k)} - \beta \cdot H^{-1}\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right), \\ J\left(\overline{z} - h_k J'\left(\overline{z}\right)\right) = \min J\left(\overline{z} - h \cdot J'\left(\overline{z}\right)\right),\ h > 0, \\ \overline{\alpha}^{(k+1)} = \overline{\alpha}^{(k)} - h_k H^{-1}\left(\frac{\overline{\alpha}^{(k)} + \overline{z}}{2}\right) J\left(\overline{\alpha}^{(k)}\right). \end{gathered} \tag{14}$$

Тестування методів проводилось на ряді задач. Деякі з них наведені нижче.

Перша задача має вигляд:

$$\begin{gathered} \rho(T) C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \\ \rho(T) = 1 + 0.15T + 0.25T^2,\ C(T) = 0.25T^2 - 0.01T + 0.15. \\ T(x,0,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)+0.5\pi)},\ T(x,1,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)-0.5\pi)}, \\ T(0,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)+0.5\pi)},\ T(1,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)-0.5\pi)}. \end{gathered} \tag{15}$$

Друга задача:

$$\begin{gathered} \rho(T) C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right), \\ \rho(T) = \frac{1 + T + 2T^2}{10},\ C(T) = 0.5 + (0.1\text{-}T)^2, \\ T(x,0,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)+0.5\pi)},\ T(x,1,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)-0.5\pi)}, \\ T(0,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)+0.5\pi)},\ T(1,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)-0.5\pi)}. \end{gathered} \tag{16}$$

Третя задача:

$$\begin{gathered} \rho(T) C(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(a(T)\frac{\partial T}{\partial y}\right) \\ \rho(T) = 1 - 0.05T + 0.55T^2,\ C(T) = 0.5 + T(0.1\text{-}T)^2. \\ T(x,0,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)+0.5\pi)},\ T(x,1,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-x)-0.5\pi)}, \\ T(0,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)+0.5\pi)},\ T(1,y,t) = 0.5e^{\sin(\pi(0.5-y)-0.5\pi)}, \end{gathered} \tag{17}$$

Нижче наведемо деякі з результатів, які були отримані методом скінченних елементів.

Висновки і пропозиції. Як бачимо (згідно табл.1), кількість викликів функції для модифікованих методів Ньютона значно менша. Це зумовлено тим, що методи передбачають змінний крок. Методи досить ефективно працюють на різних нелінійних задачах. Слід відмітити, що методи так само ефективно справляються із задачами, які містять велику кількість параметрів, наприклад, у нелінійних задачах про відновлення коефіцієнту теплопровідності.

Список літератури:

1. Klibanov M.V. Approximate Global Convergence and Adaptivity for Coefficient Inverse Problem. / M.V. Klibanov, L. Beilina. – USA.: Springer, 2012. – 407p. ISBN 978-1-4419-7804-2.
2. Isakov V., Inverse Problems for Partial Differential Equations. / V. Isakov. – USA.: Springer, 2005 – 40p.
3. Головня Б.П. Метод знаходження чисельного розв'язку двовимірної оберненої задачі теплопровідності. [Текст] / Б.П. Головня., В.В. Хайдуров. Вісник Черкаського державного технологічного університету. Серія: «Технічні науки». № 2 – 2015, ст. 49-56.
4. Головня Б.П. «Эффективные методы решения нелинейных обратных задач теплопроводности». [Текст] / Б.П. Головня., В.В. Хайдуров. Науковий журнал. Вісник Черкаського університету. Серія: «Прикладна математика. Інформатика». № 18 (311) – 2014, ст. 87-98.

Хайдуров В.В.
Европейский университет, Черкасский филиал

ЭФФЕКТИВНЫЕ МЕТОДЫ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ТОЧЕЧНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Аннотация
В настоящее время обратные задачи теплопроводности (ОЗТ) являются весьма актуальными. Они возникают в различных областях науки и техники. Известно, что для решения одной ОЗТ необходимо решать большое количество прямых задач теплопроводности (ПЗТ). Очевидно, что для решения подобного класса задач требуется достаточно много вычислений, которые занимают длительное время. В работе предложены методы, которые оптимизируют количество вычислений для получения численного решения данного класса задач. Тестирование методов выполнено на точечных обратных задачах теплопроводности.
Ключевые слова: обратная задача теплопроводности (ОЗТ), численное решение ОЗТ, квадратичный функционал, ограничения в виде дифференциальных уравнений.

Haydurov V.V.
European University, Cherkassy branch

EFFECTIVE METHODS OF NUMERICAL SOLUTION POINT HEAT INVERSE PROBLEM

Summary
Currently, inverse heat conduction problems (IHCP) are highly relevant. They arise in various fields of science and technology. It is known that the solution of one of (IHCP) is necessary to solve a large number of direct heat conduction problems (DHCP). It is obvious that the solving of this class of problems requires a lot of computing rather that take a long time. In the work the methods are proposed that optimize the number of calculations for the numerical solution of this class of problems. Testing methods are performed on the point of inverse heat conduction problems.
Keywords: inverse heat conduction problems (IHCP), IHCP numerical solution, quadratic functional, limitations in the form of differential equations.