УДК 517:072

САМОСТІЙНА РОБОТА З ТЕМИ «ПОДВІЙНІ ТА ПОВТОРНІ РЯДИ»

Олійник О.В., Сонько В.І.
Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет
імені Григорія Сковороди

У статті систематизовано знання про «подвійні та повторні ряди» та подано методичні рекомендації щодо організації самостійної роботи з теми «Подвійні та повторні ряди».
Ключові слова: математичний аналіз, теорія рядів, повторні ряди, подвійні ряди, збіжність рядів.

Постановка проблеми. Система фахової підготовки спеціалістів у вищих навчальних закладах періодично зазнає змін відповідно до соціально-економічних перетворень. Метою вищої освіти сьогодні є підготовка фахівців, здатних забезпечити перехід від індустріального до інформаційно-технологічного суспільства через новаторство в навчанні, вихованні і науково-методичній роботі [7].

Підготовка фахівців у вищих навчальних закладах забезпечується професійними освітніми програмами, на основі яких розробляються навчальні плани. Навчальний план містить різні форми організації навчального процесу: аудиторні заняття – лекції, семінари, практичні або лабораторні заняття, контрольні заходи, а також позааудиторні заняття, до яких належить самостійна робота студентів. В існуючих навчальних планах ці форми навчання, як правило, подані в рівній пропорції: половина навчальних годин відводиться для роботи в аудиторії, друга половина – на самостійну. В той же час, в навчально-методичній літературі помітна тенденція до скорочення в навчальних планах аудиторних годин і збільшення годин, відведених на самостійну роботу (до 60% навчального часу). Не виключенням є і математика, самостійна робота в процесі вивчення різних її розділів, дає змогу студентам встановити зв'язки деяких тем з іншими науками і також опрацювати новий матеріал [6].

Ряди – одне з основних понять математичного аналізу. Поняття рядів виникло як результат багатовікових зусиль, спрямованих на розв'язання великої кількості задач природознавства і математики [1]. Вони є інструментом для випробування значущості понять математичного аналізу, які з'явилися без зв'язку з теорією рядів. Таке положення було раніше та зберігається і зараз.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Багато вчених, вивчаючи ряди, описували їх вишуканість та неповторність, ці математики захоплювалися їхньою незвичайністю. Це були Ґетфрід Вільгельм Лейбніц, Йоганн Петер Густав Лежен-Діріхле, Франсуа Марі, Шарль Фур'є, В. Бернуллі, Б. Тейлор, К. Маклорен, Л. Ейлер, Ж. Д'Аламбер, Ж. Лагранж, також вони є працях К. Гауса, Б. Больцано, О. Коші, Н. Абеля, К. Вейєрштраса, Б. Рімана. Систематизація повторних та подвійних рядів подана у таких авторів: Г.М. Фіхтенгольц «Курс диференціального та інтегрального числення» та Е.Т. Уіттекер «Курс сучасного аналізу. Основні операції аналізу». Методичним основам самостійної роботи студентів приділяли увагу у свої роботах З.І. Слєпкань, О.О. Дорошенко, Г.М. Клейман, Е.І. Машбиць, Н.А. Тарасенкова та інші.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Сьогодні в процесі вивчення математичного аналізу, диференціальних рівнянь важливе місце посідають ряди, зокрема числові, функціональні та степеневі, однак повторні та подвійні ряди не достатньо інтегровані у навчальному процесі. Оскільки багато знань при вивченні математики у вищій школі розкриваються не повною мірою, розкриття значущості повторних та подвійних рядів відбувається за допомогою відеоуроків, лекцій та семінарів відомих та невідомих дослідників, адже дослідження рядів здійснюється ними самостійно.

Мета статті. Головною метою цієї роботи є систематизація знань про повторні та подвійні ряди, організація самостійної роботи з теми «Повторні та подвійні ряди».

Виклад основного матеріалу. Самостійна робота передбачає опанування теоретичного матеріалу, вміння розв'язувати завдання практичні, тестові та відповідати на запитання.

Теоретичні відомості

Повторні ряди. Нехай задано нескінченну множину чисел $a_{ik}(i = 1, 2, 3\ldots;\ k = 1, 2, 3, \ldots,$ залежну від двох натуральних значків.

Уявімо собі їх розташованими у вигляді нескінченної прямокутної матриці:

$$\begin{matrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots a_i^{(1)} & \ldots \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots a_i^{(1)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots a_i^{(k)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \end{matrix} \tag{1}$$

Такого роду матриця носить назву нескінченної прямокутної матриці з двома входами.

Тепер зупинимося на одному понятті, пов'язаному з розглядом матриць виду (1) – поняття повторного ряду.

Якщо в нескінченній прямокутній матриці підсумувати кожен рядок окремо, то ми отримаємо нескінченну послідовність рядів виду:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{2}$$

Підсумувавши тепер цю послідовність вдруге, будемо мати:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}. \tag{3}$$

Отриманий символ і носить назву *повторного ряду* [1]. Якщо замінити рядки стовпцями, тобто якщо підсумувати члени нашої нескінченної матриці по стовпцях, то ми отримаємо другий повторний ряд

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}. \qquad (4)$$

Збіжність повторних рядів. Повторний ряд (3) називається збіжним, якщо, по-перше, збіжні всі ряди по рядках (2) (їх суми, відповідно позначимо через A^k і, по – друге, збіжний ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}A^k \qquad (5)$$

його сума і буде сумою повторного ряду (3).

Елементи матриці (1) можна багатьма способами представити у вигляді звичайної послідовності $u_1, u_2, \dots, u_r, \dots$ (5) і скласти простий ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty}u_r. \qquad (6)$$

І навпаки, якщо маємо звичайну послідовність (5), то розбивши всі її члени (не рахуючись з їх розташуванням) на нескінченну безліч нескінченних груп, можна представити її багатьма способами у вигляді матриці з двома входами (1), і з цієї матриці скласти повторний ряд (3). Природно постає питання про зв'язки між рядами (6) і (3), що складаються з одних і тих же членів.

Теорема 1. Якщо ряд (6) абсолютно збіжний до суми U, то якби його члени не розташовувались у вигляді матриці (1), буде збіжний і повторний ряд (3), причому має ту ж суму [2].

Доведення. Ряд $\sum_{r=1}^{\infty}u_r$ (6*) за припущенням збіжний; позначимо його через суму U^{-r}. Тоді, перш за все, при будь-яких n і k, $\sum_{k=1}^{n}\left|u_j^{(k)}\right| \le U^{-r}$, звідки випливає збіжність ряду $\sum_{k=1}^{n}\left|u_j^{(k)}\right|$, а значить і збіжність ряду $\sum_{k=1}^{n}\left|u_i^{(k)}\right|$ (при будь-якому k).

Для будь-якого числа $\varepsilon > 0$ існує таке число r_0, що $\sum_{r=r_0+1}^{\infty}|u_r| < \varepsilon$, (7) отже, $\left|\sum_{r=r_0+1}^{\infty}u_r\right| = \left|U - \sum_{r=1}^{r_0}u_r\right| < \varepsilon$. (8)

Члени $u_1, u_2, \dots, u_r$ ряду (6) містяться в перших рядках n і перших стовпцях m матриці (1), якщо n і m досить великі, при $n > n_0$ і $m > m_0$. Тоді для зазначених n і m вираз $\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_i^{(k)} - \sum_{r=1}^{r_0}u_r$ представляє суму членів групи u_r з номерами, більшими r_0, і виду (7) за абсолютною величиною меншою ε. Переходячи до межі при $m \to \infty$, отримаємо (для $n > n_0$)

$\left|\sum_{k=1}^{\infty}A^k - \sum_{r=1}^{r_0}u_r\right| \le \varepsilon$, так що – у зв'язку (8) – $\left|\sum_{k=1}^{n}A^k - U\right| < 2\varepsilon$, звідки випливає збіжність повторного ряду (3), і саме до суми U.

Зворотна теорема має місце лише при посиленні припущень про повторний ряд [3].

Теорема 2. Нехай дано повторний ряд (3). Якщо при заміні його членів їх абсолютними величинами отримаємо збіжний ряд, то збіжний не тільки ряд (3), але і простий ряд (6), що складається з тих же членів, що і ряд (3), розташованих у довільному порядку, і притому – до тієї ж сумі.

Тому все вищезгадане про повторний ряд (3) справедливе і для повторного ряду (4), як наслідок із доведених теорем виходить наступне:

Теорема 3. Нехай дана матриця (1). Якщо при заміні членів ряду (3) їх абсолютними величинами отримаємо збіжний ряд, то збіжні обидва повторних ряди (3), (4) і мають ту ж суму: $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty}a_i^{(k)} = \sum_{i=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$ [5].

Подвійні ряди. З нескінченною прямокутною матрицею (1) пов'язане і поняття подвійного ряду:

$$\begin{array}{ccccc} a_1^{(1)} + & a_2^{(1)} + & \dots + a_i^{(1)} + & \dots \\ a_1^{(2)} + & a_2^{(2)} + & \dots + a_i^{(1)} + & \dots \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots & \dots \\ a_1^{(k)} + & a_2^{(k)} + & \dots + a_i^{(k)} + & \dots \\ \dots & \dots & \dots \quad \dots & \dots \end{array} \qquad (9)$$

Обмежившись першими m стовпчиками і першими n рядками, розглянемо скінченну суму $A_m^{(n)} = \sum_{i,k=1}^{i=m,k=n}a_i^{(k)}$, називається частковою сумою даного подвійного ряду. Почнемо збільшувати числа m і n одночасно, але незалежно один від одного, спрямовуючи їх до безкінечності, отримаємо границю (скінченну або нескінченну): $A = \lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} A_m^{(n)}$ яку називають сумою подвійного ряду, і пишуть $A = \sum_{i,k=1}^{\infty}a_i^{(k)}$ [4].

Якщо ряд (9) має скінченну суму, його називають збіжним, в іншому випадку – розбіжним.

Розглянемо для прикладу до матрицю

$$\begin{array}{cccccc} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots & a_ib_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots & a_ib_2 & \dots \\ a_1b_3 & a_2b_3 & a_3b_3 & \dots & a_ib_3 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_1b_k & a_2b_k & a_3b_k & \dots & a_ib_k & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

із загальним членом $c_i^{(k)} = a_ib_k$. У цьому випадку часткова сума дорівнює $C_m^{(n)} = A_mB_n$, так що подвійний ряд, відповідної вищезгаданої матриці, завжди збіжний і має суму: $C = \lim_{\substack{m\to\infty \\ n\to\infty}} A_mB_n = AB$.

На подвійні ряди легко застосувати теореми:

– про множення членів збіжного ряду на постійне число: Якщо члени збіжного ряду помножити на один і той самий множник c, то його збіжність не порушиться (а сума лише помножиться на c).

– про почлене додавання або віднімання двох збіжних рядів: Два збіжних ряди A і B можна почлено додавати (або віднімати), при тому утворений ряд також збігається і його сума дорівнює, відповідно, $A + B$. Так само як і для збіжності подвійного ряду необхідно щоб загальний член прямував до 0: $\lim_{\substack{i\to\infty \\ k\to\infty}} a_i^{(k)} = 0$.

Зіставимо подвійний ряд (9) з повторними рядами (3) і (4), розглянутими вище. Так як $A_m^{(n)} = \sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=1}^{m}a_i^{(k)}\right\}$, то, переходячи при фіксованому n до границі при $m \to \infty$ (припустимо, що ряди по рядках збіжні), отримаємо $\lim\limits_{m\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} A^{(k)}$.

Зрозуміло, що сума повторного ряду (3) є не що інше, як повторна границя: $\lim\limits_{n\to\infty} \lim\limits_{m\to\infty} A_m^{(n)}$.

Теорема 4. Якщо збіжний подвійний ряд (9) і збіжні всі ряди по рядках, то збіжний повторний ряд (3) і має ту ж суму, що і подвійний ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum\limits_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$.

Аналогічна теорема має місце і для повторного другого ряду (4).

Питання про збіжність подвійного ряду (9) просто вирішується для випадку додатного ряду, тобто ряду з невід'ємними членами [4].

Теорема 5. Для збіжності ряду (9), якщо $a_i^{(k)} \geq 0$, необхідно і достатньо, щоб його часткові суми були обмежені [5].

Розглянемо тепер подвійний ряд, складений з матриці, у якої всі елементи додатні. Очевидно, що, як для простих рядів, ми можемо виключити з розгляду ті випадки, коли всі елементи матриці від'ємні або коли є лише скінченне число додатних або від'ємних елементів, так як всі ці випадки безпосередньо приводять до вищерозглянутих. Тому ми припустимо, що в матриці (1), а значить і в ряді (9), є безліч як додатних так і від'ємних елементів.

Крім матриці (1), складемо ще матрицю з абсолютних величин елементів.

$$
\begin{array}{|ccccc}
|a_1^{(1)}| & |a_2^{(1)}| & \ldots & |a_i^{(1)}| & \ldots \\
|a_1^{(2)}| & |a_2^{(2)}| & \ldots & |a_i^{(2)}| & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
|a_1^{(k)}| & |a_2^{(k)}| & & |a_i^{(k)}| & \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

і з цієї матриці складемо подвійний ряд $\sum\limits_{i,k=1}^{\infty} \left|a_i^{(k)}\right|$. (10)

Теорема 6. Якщо збіжний ряд (10), то ряд (9) теж збіжний. Якщо одночасно з рядом (9) збігається і ряд (10), то ряд (9) називається абсолютно збіжний. Якщо ж ряд (9) збігається, а ряд (10) розбігається, то ряд (9) називається умовно збіжний

Приклади розв'язування завдань з рядами
Завдання 1:

1) Показати, що якщо

$$a_{m,n} = \frac{m-n}{2^{m+n}} \cdot \frac{(m+n-1)!}{m!\,n!},$$

$$\text{то } a_{m,0} = 2^{-m}, a_{0,n} = -2^{-n}, a_{0,0} = 0,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} n\left(\sum_{b=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = -1\,,\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = 1.$$

Розв'язання:

1) $a_{m,n} = \frac{m-n}{2^{m+n}} \cdot \frac{(m+n-1)!}{m!n!}$;

$a_{m,0} = \frac{m-0}{2^{m+0}} \cdot \frac{(m+0-1)!}{m!0!} = \frac{1}{2^m} \cdot \frac{(m-1)!}{(m-1)!} = 2^{-m}$,

2) $a_{0,n} = \frac{0-n}{2^{0+n}} \cdot \frac{(0+n-1)!}{0!n!} = \frac{-1}{2^n} \cdot \frac{(n-1)!}{(n-1)!} = -2^{-n}$,

3) $a_{0,0} = \frac{0-0}{2^{0+0}} \cdot \frac{(0+0-1)!}{1} = 0.$

Розглянемо суму по рядках:

$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{m,n}\right) =$$
$$\sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{m}{2^m 2^n} - \frac{n}{2^m 2^n}\right) \cdot \frac{(m+n-1)!}{m!n!}\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(m+n-1)!}{2^m 2^n n!(m-1)!} - \frac{(m+n-1)!}{2^m 2^n m!(n-1)!}\right)\right) =$$
$$= \sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^m m!}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(m+n-1)!(m-n)}{2^n n!}\right)\right) = -1.$$

Розглянемо суму за стовпцями:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty} a_{m,n}\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{m}{2^m 2^n} - \frac{n}{2^m 2^n}\right) \cdot \frac{(m+n-1)!}{m!n!}\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{m=0}^{\infty}\left(\frac{(m+n-1)!}{2^m 2^n n!(m-1)!} - \frac{(m+n-1)!}{2^m 2^n m!(n-1)!}\right)\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n(n-1)!}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(\frac{m(m+n-1)! - n(m+n+1)!}{2^m n(m)!}\right)\right)\right) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n n!}\sum_{m=0}^{\infty}\left(\left(\frac{(m+n-1)! - (m-n)}{2^m m!}\right)\right)\right) = 1.$$

Завдання 2: Знайти суму подвійного ряду із загальним членом:

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)*\ldots*(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)*\ldots*(k+i)}$$

Розв'язання:

Розглянемо матрицю з даним загальним членом:

$$a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{i(i+1)*\ldots*(i+k)} = \frac{(i-1)!}{k(k+1)*\ldots*(k+i)}.$$

Використавши співвідношення в теоремі 4:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\alpha+n)(\alpha+n+1)*\ldots*(\alpha+n+p)} = \frac{1}{p(\alpha+1)*\ldots*(\alpha+p)} \qquad (1)$$

при $\alpha = 0$, $p = k$, легко просумувати члени k-го рядка: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \frac{(k-1)!}{k * k!} = \frac{1}{k^2}$

Звідси сума повторного ряду: $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$

Змінимо матрицю таким чином: збережемо в m-му рядку $m-1$ членів, замість m-го члена підставимо суму r_m всіх членів m-го рядка, починаючи з m-го, інші члени відкинемо. Для нової матриці

$$
\begin{array}{|llllll}
r_1 & & & & & \\
a_1^{(2)} & r_2 & & & & \\
a_1^{(3)} & a_2^{(3)} & r_3 & & & \\
\ldots & \ldots & \ldots & & & \\
a_1^{(m)} & a_2^{(m)} & a_3^{(m)} & \ldots\ a_{m-1}^{(m)} & r_m & \\
a_1^{(m+1)} & a_2^{(m+1)} & a_3^{(m+1)} & \ldots\ a_{m-1}^{(m+1)} & a_m^{(m+1)} & r_{m+1} \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots
\end{array}
$$

Сума рядків по стовпцям та сума першого повторного ряду залишаться незмінними. Для сумування рядів по стовпцям знайдемо спочатку:

$$r_m = \sum_{i=m}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)*\ldots*(i+m)} =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m-1+n)*\ldots*(2m-1+n)} = \frac{(m-1)!}{m^2(m+1)*\ldots*(2m-1)}$$

Скористаємося співвідношенням (1) знову, при $\alpha = m - 1,\ p = m$. Сума інших членів m-го стовбця дорівнює:

$$\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{i(i+1)*\ldots*(i+m)} =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(m-1)!}{(m+n)(m+n+1)*\ldots*(2m+n)} = \frac{(m-1)!}{(m+1)*\ldots*2m}$$

В (1) ми покладемо $\alpha = p = m$, тоді сума m-го стовбця дорівнює:

$$3*\frac{(m-1)!}{m*(m+1)*\ldots*(2m-1)*2m} = 3*\frac{[(m-1)!]^2}{2m!}$$

Прирівнявши суми обох повторних рядів, отримаємо співвідношення:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = 3*\sum_{m=1}^{\infty} \frac{[(m-1)!]^2}{2m!}$$

Ряд справа збігається, він допоможе знайти приблизне обчислення суми ряду зліва. Дане співвідношення дозволяє виразити суму першого ряду «в скінченному виді»: вона дорівнює $\frac{\pi^2}{6}$ (цей результат належить Ейлеру) [2].

Завдання 4: Дослідити збіжність ряду

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} \frac{1}{(i+k)^{\sigma}},\ \sigma > 0$$

Представимо даний ряд у вигляді простого ряду, розмістивши його члени по діагоналям. Оскільки члени, які лежать на одній діагоналі рівні, то об'єднавши їх, отримаємо ряд: $\sum_{n=2}^{\infty}(n-1)\frac{1}{n^{\sigma}}$, звідси отримуємо нерівність: $\frac{1}{2}n \le n-1 < n,$ поділимо на n^{σ}, отримаємо: $\frac{1}{2}*\frac{1}{n^{\sigma-1}} \le (n-1)\frac{1}{n^{\sigma}} \le \frac{1}{n^{\sigma-1}}$.

Отриманий нами простий ряд збіжний при $\sigma > 2$ і розбіжний при $\sigma \le 2$, те саме справедливе для подвійного ряду даного за умовою.

Тестові питання

1. Виберіть правильний запис повторного ряду:

а) $\sum_{k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

б) $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

в) $\sum_{i,k=1}^{i=m,k=n}\ \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

г) $\sum_{i,k=1}^{i=m,k=n} a_i^{(k)}$

2.
$$\begin{matrix} a_1^{(1)} & a_2^{(1)} & \ldots a_i^{(1)} & \ldots \\ a_1^{(2)} & a_2^{(2)} & \ldots a_i^{(1)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_1^{(k)} & a_2^{(k)} & \ldots a_i^{(k)} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Такого роду матриця носить назву:

а) скінченної прямокутної матриці з двома входами

б) нескінченної прямокутної матриці з трьома входами

в) нескінченної прямокутної матриці з двома входами

г) скінченної прямокутної матриці з трьома входами

3. Для збіжності подвійного ряду

$$\begin{matrix} a_1^{(1)} + & a_2^{(1)} + & \ldots + a_i^{(1)} + & \ldots \\ a_1^{(2)} + & a_2^{(2)} + & \ldots + a_i^{(1)} + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_1^{(k)} + & a_2^{(k)} + & \ldots + a_i^{(k)} + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \end{matrix}$$

якщо $a_i^{(k)} \ge 0$, необхідно і достатньо,...

а) щоб його часткові суми були обмежені

б) щоб його часткові суми були необмежені

в) щоб його часткові суми були скінчено обмежені

г) щоб його часткові суми були нескінченно обмежені

4. Повторний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ називається збіжним, якщо...

а) збіжні всі ряди по рядках $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ (їх суми, відповідно позначимо через A^k

б) збіжний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A^k$ його сума і буде сумою повторного ряду

в) збіжні всі ряди по рядках $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ (їх суми, відповідно позначимо через A^k і збіжний ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A^k$ його сума і буде сумою повторного ряду

г) Правильна відповідь відсутня

5. Нехай дано повторний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}(3)$. Якщо при заміні його членів їх абсолютними величинами отримаємо збіжний ряд, то збіжний не тільки ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$, але і ...

а) подвійний ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$, що складається з тих же членів

б) простий ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$, що складається з тих же членів, що і ряд (3), розташованих у фіксованому порядку, і притому – до тієї ж сумі.

в) простий ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$, що складається з тих же членів, що і ряд (3), розташованих у довільному порядку, і притому – до тієї ж сумі.

г) подвійний ряд $\sum_{r=1}^{\infty} u_r$, що складається з тих же членів, що і ряд (3), розташованих у довільному порядку, і притому – до тієї ж сумі.

6. Якщо збіжний подвійний ряд

$$\begin{matrix} a_1^{(1)} + & a_2^{(1)} + & \ldots + a_i^{(1)} + & \ldots \\ a_1^{(2)} + & a_2^{(2)} + & \ldots + a_i^{(1)} + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \\ a_1^{(k)} + & a_2^{(k)} + & \ldots + a_i^{(k)} + & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ \ldots & \ldots \end{matrix}$$

і збіжні всі ряди по рядках, то збіжний повторний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)}$ і має ту ж суму, що і...

а) подвійний ряд $\sum A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

б) простий ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

в) подвійний ряд $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(k)} = A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

г) простий ряд $\sum A = \sum_{i,k=1}^{\infty} a_i^{(k)}$

Контрольні питання

1) Дайте означення збіжності повторного ряду.
2) Як позначається подвійний ряд?
3) Сформулюйте теорему збіжності подвійного ряду.
4) Поясніть, які теореми можна використовувати як для числових так і для подвійних рядів.
5) Сформулюйте означення повторного ряду.
6) Чи впливає на збіжність подвійного ряду множення його членів на число?
7) Чи буде збіжною сума (різниця) двох збіжних подвійних рядів?
8) Що можна сказати про суму (різницю) двох розбіжних рядів?

Висновки і пропозиції. У наш час велике значення набуває використання комп'ютерних технологій та інтернету як засобів навчання. Виникає потреба у створенні доступного інформаційно-навчального середовища, формуванні навчальних електронних модулів для того, щоб студент мав можливість підвищувати рівень своїх знань самостійно. Самостійна робота стимулює пізнавальну діяльність, підвищує розвиток професійних математичних компетентностей майбутніх вчителів математики.

Логічним продовженням вивчення числових, степеневих та функціональних рядів є ознайомлення з повторними та подвійними рядами. У даній роботі узагальнено та систематизовано теоретичний матеріал щодо збіжності повторних та подвійних рядів. Наведено приклади розв'язування практичних завдань з теми, складено тестовий контроль для перевірки набутих знань та приклади контрольних запитань з теми «Повторні та подвійні ряди».

У процесі вивчення теорії рядів вищеподані дані дадуть змогу студентам розширити кругозір про теорію рядів, адже дослідження повторних і подвійних рядів дає можливість розвитку комп'ютерних пакетів математичних програм, які з часом потребуватимуть глибших знань не тільки в теорії рядів, а й в математичному аналізі, диференціальних рівняннях, природничих науках.

Список літератури:

1. Воробьев Н.Н. Теория рядов: Учеб. пособие для вузов / Н.Н. Воробьев. – М.: Наука, 1996. – 408 с.
2. Заболоцький М.В. Математичний аналіз / М.В. Заболоцький, О.Г. Сторож, С.І. Тарасюк. – Л.: Видавничий центр ЛНУ ім. Івана Франка, 2007. – 416 с.
3. Богомолов Н.В. Практичні заняття з математики / Н.В. Богомолов. – М.: Вища школа, 1990. – 495 с.
4. Уіттекер Е.Т. Курс сучасного аналізу. Основні операції аналізу. Ч. 1 / Е. Т. Уіттекер, Дж.Н. Ватсон. – М: Державне вид-во фізико-математичної літератури, 2003. – 387 с.
5. Фіхтенгольц Г.М. Курс диференціального та інтегрального числення. Том 2 / Г.М. Фіхтенгольц. – М.: Наука, 1970. – 800 с.
6. Слєпкань З.І. Методика навчання математики / З.І. Слєпкань. – К.: Вища щкола, 2006. – 583 с.
7. Дорошенко О.О. Особливості організації форм самостійної роботи під час вивчення математики [Електронний ресурс] / О.О. Дорошенко // Освіта.ua – Режим доступу: https://ru.osvita.ua/school/lessons_summary/education/45707/#soc2

Олейник Е.В., Сонько В.И.
Переяслав-Хмельницкий государственный педагогический университет
имени Григория Сковороды

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА С ТЕМЫ «ПОВТОРНЫЕ И ДВОЙНЫЕ РЯДЫ»

Аннотация
В статье систематизированы знания о «повторных и двойных рядах» и представлены методические рекомендации об организации самостоятельной работы по теме «Повторные и двойные ряды».
Ключевые слова: математический анализ, теория рядов, повторные ряди, двойные ряди, сходимость рядов.

Oliynyk E.V., Sonko V.I.
Pereyaslav-Khmelnitsky State Pedagogical University
named after Grygory Skovoroda

INDEPENDENT WORKS ON THE TOPIC «REPETITIVE AND DOUBLE ROWS»

Summary
This article systematizes the knowledge about «Repetitive and double rows», gives methodical recommendations for the organization of independent works on the topic «Repetitive and double rows».
Keywords: mathematical analysis, theory of rows, repetitive rows, double rows, convergence of rows.