

УДК 330.115

## МОДЕЛІ НЕЛІНІЙНОЇ ДИНАМІКИ У ВИРІШЕННІ ПРОБЛЕМ МАКРОЕКОНОМІЧНОЇ НЕСТАБІЛЬНОСТІ НА РИНКУ ПРАЦІ ТА КАПІТАЛУ

Журавка А.В.

Харківський національний університет будівництва та архітектури

Мудаширу Тайо Мусбау

Харківський національний університет радіоелектроніки

У статті побудовано модель конкурентних взаємодій на загальних ринках праці і капіталу довільного числа країн. Така модель може бути взята на увазі при заключенні договорів на співробітництво між країнами. Аналогом розглянутих стосунків є запропоновані країнами Північної Америки договірні взаємодії на прикладі NAFTA, в умовах яких громадяни з канадським та мексиканським громадянством мають право на безвізову роботу та ведення бізнесу у США. Детально проаналізовані окремі випадки цієї моделі для однієї країни. Знайдено рівноважні стани в цих випадках, проаналізована їхня стійкість і досліджені біфуркації типу сідло вузол.

**Ключові слова:** ринок праці, динаміка ВВП, динаміка зайнятого населення, біфуркації типу сідло вузол, співробітництво між країнами.

**Постановка проблеми.** Економіко-математичне моделювання є спробою формалізувати процес прийняття рішення, тобто застосувати під час цього процесу точні математичні методи. Зараз у світі широко використовуються математичні методи як у розв'язку конкретних економічних та управлінських задач так і у розвитку самої економічної науки. Підтвердженням правильності такого напрямку розвитку економічної науки є той факт, що більшість нобелівських премій в галузі економіки були присуджені за роботи, присвячені застосуванню математики в економічних дослідженнях та розв'язанню практичних економічних задач. Модель – це об'єкт, що заміщує оригінал і відбиває найважливіші риси і властивості оригіналу для певної мети дослідження за обраної системи гіпотез. Під економіко-математичною моделлю розуміють концентрований вираз найсуттєвіших економічних взаємозв'язків досліджуваних об'єктів (процесів) у вигляді математичних функцій, нерівностей і рівнянь, відношень формальної логіки тощо. Моделювання є процесом побудови, вивчення та застосування моделей. Воно є невід'ємною частиною будь якої цілеспрямованої діяльності.

Пізнавальні можливості моделі зумовлюються тим, що модель відображає, з погляду системного аналітика, суттєві риси об'єкта – оригіналу. Із цього можна зробити, зокрема, такі висновки:

а) будь-яка модель є суб'єктивною, вона несе в собі характерні риси індивідуальності системного аналітика;

б) в будь-якій моделі віддзеркалюються не всі, а лише суттєві властивості об'єкта-оригіналу виходячи із цілей дослідження, узяті системи гіпотез тощо;

в) можливе існування множини моделей одного й того самого об'єкта-оригіналу, які відрізняються цілями дослідження, ступенем адекватності тощо.

Модель вважається адекватною об'єкту-оригіналу, якщо вона з достатнім ступенем наближення (на рівні розуміння системним аналітиком модельованого процесу) відображає закономірності процесу функціонування реальної економічної системи у зовнішньому середовищі.

Проаналізуємо послідовність і зміст етапів одного циклу економіко-математичного моделювання.

1. Постановка економічної проблеми. Цей етап включає видокремлення найважливіших рис і властивостей об'єкта, що моделюється, і абстрагування від другорядних; вивчення структури об'єкта і головних залежностей, що поєднують його елементи; формулювання гіпотез, що пояснюють поведінку і розвиток об'єкта.

2. Побудова математичних моделей. Це – етап формалізації економічної проблеми, вираження її у вигляді конкретних математичних залежностей і відношень (функцій, рівнянь, нерівностей тощо).

3. Математичний аналіз моделі. Метою цього етапу є з'ясування загальних властивостей моделі. Тут часто застосовують математичні прийоми дослідження. Найважливіший момент – доведення існування рішень у сформованій моделі.

4. Числове моделювання. Цей етап включає розробку алгоритмів для числового розв'язування задачі, складання програм на ЕОМ і безпосереднє проведення розрахунків. Труднощі цього етапу зумовлені передусім необхідністю опрацювання значних масивів інформації. Завдяки сучасним ЕОМ вдається проводити числові «модельні» експерименти, вивчаючи «поведінку» моделі при різних значеннях деяких умов.

5. Аналіз числових результатів та їх використання. На цьому, завершальному, етапі циклу виникає питання про правильність і повноту результатів моделювання, про рівень практичного застосування останніх.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Проведемо аналіз досліджень та публікацій, проблем математичного моделювання спільної динаміки ВВП та робочих місць. Для цього розглянемо задачу моделювання конкурентних взаємодій у виді автономної динамічної системи [1]. Такого роду динамічні системи, включаючи системи більш високого порядку, використовуються, для аналізу конкурентних взаємодій різних екологічних, соціальних і економічних об'єктів [2-19]. Зробимо висновок, що капітал, який працює на ринку праці, приводить до росту робочої сили за

рахунок підвищення її конкурентноздатності (інвестиції в людський капітал) і створення нових робочих місць.

**Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми.** У розвиток роботи [1] побудуємо математичну модель взаємодій на загальних ринках праці і капіталу однієї країни. З метою визначення прогнозних рівнів зайнятості населення та ВВП проведемо чисельне моделювання та імітаційні експерименти з цією моделлю для визначення умов зростання макроекономічних показників.

**Формування цілей статті.** Проаналізуємо модель конкурентних взаємодій на загальних ринках праці і капіталу. Детально розглянемо окремі випадки цієї моделі для однієї країни. Знайдемо умови існування рівноважних станів цієї моделі. Розглянути можливість застосування цієї моделі при заключенні договорів на співробітництво між країнами. довільного числа країн.

**Виклад основного матеріалу.** Проведемо аналіз цих станів на існування біфуркації типу сітло вузол. У цьому випадку систему рівнянь можна записати у вигляді:

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = ky(L - y) + \alpha z \\ \frac{dz}{dt} = cz(K - z) + \delta y, \end{cases} \quad (1)$$

де  $y$  – чисельність робочої сили;  $z$  – обсяг капіталу;  $L, K$  – деякі граничні рівні робочої сили (при  $z = 0$ ) і капіталу (при  $y = 0$ );  $k$  – коефіцієнт стримування росту чисельності робочої сили,  $\alpha$  – коефіцієнт росту числа робочої сили на одиницю об'єму капіталу;  $c$  – коефіцієнт стримування росту обсягу капіталу;  $\delta$  – коефіцієнт росту обсягу капіталу на одиницю чисельності робочої сили.

Покажемо, що динамічна система (2), що описує найпростішу ситуацію взаємодії робочої сили і капіталу однієї країни (враховуються логістичні і лінійні члени цієї взаємодії), з чотирьох рівноважних станів (два з яких нефізичні) існує тільки один стійкий рівноважний стан, що задовольняє умовам  $y_* > L, z_* > K$ .

Систему (1) рівнянь за допомогою заміни перемінних:  $\tilde{y} = 1 - \frac{y}{L}, y \geq 0; \tilde{z} = 1 - \frac{z}{K}, z \geq 0; t' = kLt$  приведемо до виду:

$$\begin{cases} \frac{d\tilde{y}}{dt'} = \tilde{y}(\tilde{y} - 1) + a_1(\tilde{z} - 1) \\ \frac{d\tilde{z}}{dt'} = a_3(\tilde{y} - 1) + a_2\tilde{z}(\tilde{z} - 1), \end{cases} \quad (2)$$

де  $a_1 = \frac{\alpha K}{kL^2}, a_2 = \frac{cK}{kL}, a_3 = \frac{\delta}{kK}$  – безрозмірні позитивні параметри.

З цієї динамічної системи впливає наявність одиничної особливої точки  $(\tilde{y}_*, \tilde{z}_*) = (1, 1)$ . Інші три особливі точки знаходяться з рішення рівняння

$$\tilde{y}_*^3 - \tilde{y}_*^2 - a_1\tilde{y}_* + \frac{a_3 a_1^2}{a_2} = 0, \quad (3)$$

причому  $\tilde{z}_* = 1 - \frac{1}{a_1}\tilde{y}_*(\tilde{y}_* - 1)$  мають вид: при  $a_1 = a_3 = 1/4, a_2 = 1$  Рис. 1, 2; при  $a_1 = 1/2, a_3 = 1/4, a_2 = 1$ ,  $x_1 = y, x_2 = z$ ; при  $a_1 = 1/2, a_3 = 1/4, a_2 = 1$ ,  $x_1 = y, x_2 = z$  Рис. 3; при  $a_1 = a_2 = a_3 = 1, x_1 = y, x_2 = z$  Рис. 4.

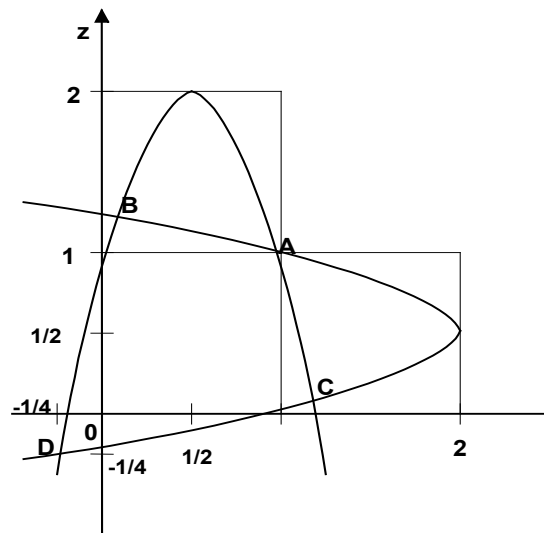


Рис. 1. Розташування ізоклін  $\frac{dz}{dy} = 0$  і  $\frac{d\tilde{z}}{d\tilde{y}} = \pm\infty$  і точок їх перетинання для динамічної системи (2) при  $a_1 = a_3 = 1/4, a_2 = 1$

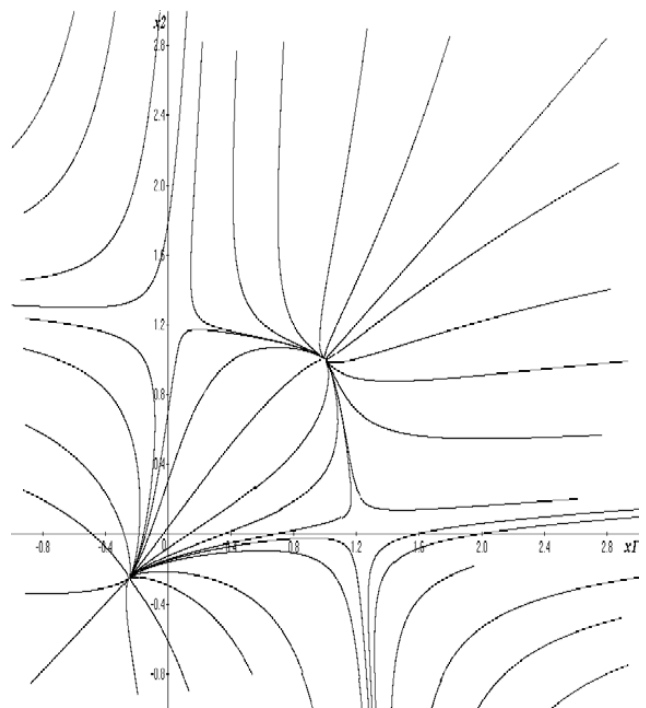


Рис. 2. Фазовий портрет динамічної системи (2) при  $a_1 = a_3 = 1/4, a_2 = 1, x_1 = y, x_2 = z$

Наступним кроком є чисельне моделювання для цього необхідно погодити результати чисельного фазового портрета, показаного на рис. 1-4 з даними офіційної статистики Держкомстату України по зайнятості населення та динаміці ВВП.

Для оцінки параметрів  $k, a, c, \delta$  моделі (1) попередньо розраховувалися наближені значення фактичних значень похідних

$$(y')_i^p = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2}; (z')_i^p = \frac{z_{i+1} - z_{i-1}}{2},$$

$i = 2 \div (n - 1)$ , де  $n$  – число фактичних точок даних.

Параметри  $k, a, c, \delta$  оцінювалися з умови мінімізації суми квадратів відхилень фактичних значень похідних від їхніх розрахункових значень  $(y')_i^p$  і  $(z')_i^p$ .

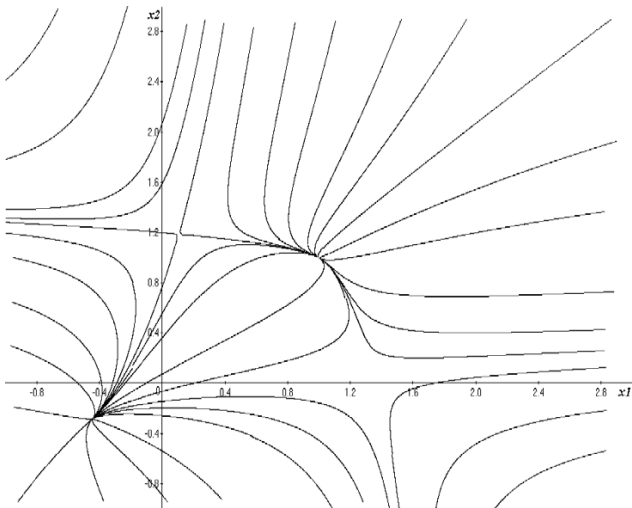


Рис. 3. Фазовий портрет динамічної системи (2) при  $a_1 = 1/2, a_3 = 1/4, a_2 = 1, x_1 = y, x_2 = z$

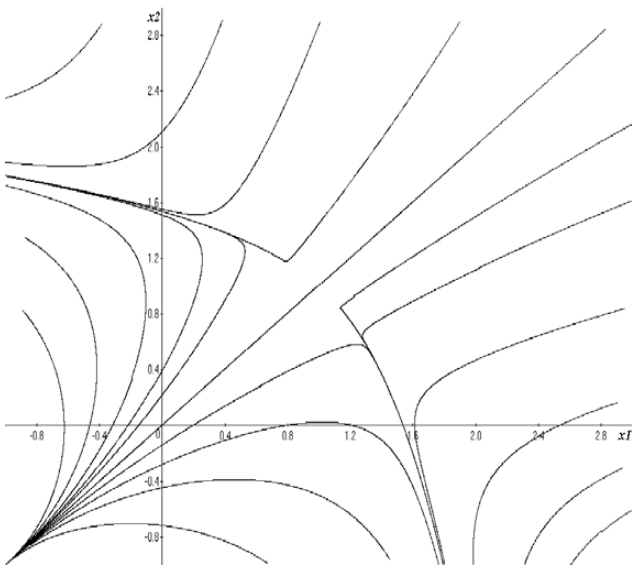


Рис. 4. Фазовий портрет динамічної системи (2) при  $a_1 = a_2 = a_3 = 1, x_1 = y, x_2 = z$

Для цього складався функціонал:

$$S = \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (y'_i)^p - (y'_i)^\varphi \right]^2 + \sum_{i=2}^{n-1} \left[ (z'_i)^p - (z'_i)^\varphi \right]^2$$

Позначимо:  $u_i = y_i(L - y_i), v_i = z_i(K - z_i)$ , тоді функціонал  $S$  приймає вид:

$$S = \sum (ku_i + \alpha z_i - y'_i)^2 + \sum (cv_i + \delta y_i - z'_i)^2$$

Умова мінімізації функціонала  $S$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial S}{\partial k} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \alpha} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial c} = 0 \\ \frac{\partial S}{\partial \delta} = 0 \end{cases}$$

Ця система рівнянь рівносильна двом системам рівнянь.

Перша система для параметрів  $k$  і  $a$

$$\begin{cases} 2\sum (ku_i + \alpha z_i - y'_i)u_i = 0 \\ 2\sum (ku_i + \alpha z_i - y'_i)z_i = 0 \end{cases}$$

Після перетворень приходимо до системи лінійних рівнянь щодо перемінних  $k$  і  $a$ :

$$\begin{cases} k\sum u_i^2 + \alpha\sum z_i u_i = \sum y'_i u_i \\ k\sum u_i z_i + \alpha\sum z_i^2 = \sum y'_i z_i \end{cases}$$

Друга система рівнянь для  $c$  і  $\delta$  має вигляд:

$$\begin{cases} 2\sum (cv_i + \delta y_i - z'_i)v_i = 0 \\ 2\sum (cv_i + \delta y_i - z'_i)y_i = 0 \end{cases}$$

Аналогічно ця система приводиться до системи лінійних рівнянь щодо перемінних  $c$  і  $\delta$ :

$$\begin{cases} c\sum v_i^2 + \delta\sum v_i y_i = \sum z'_i v_i \\ c\sum v_i y_i + \delta\sum y_i^2 = \sum z'_i y_i \end{cases}$$

Знайдені шукані значення коефіцієнтів  $k, c, \delta, a$  для України: дорівнюють  $k = 0,01, c = 0,0003, \delta = 1,48, a = 0,0005$ .

**Зробимо висновок і визначимо перспективи подальших розвідок у цьому напрямку.** Ринок праці і капіталу можна представити як динамічну систему (1), тоді для її опису пропонується використовувати модель взаємодії  $n$  країн:

$$\begin{aligned} \frac{dy_i}{dt} &= k_i y_i \left( L_i - \sum_{j=1}^n \beta_{ij} y_j \right) + \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} z_j, \quad \frac{dz_i}{dt} = \\ &= c_i z_i \left( K_i - \sum_{j=1}^n \varepsilon_{ij} z_j \right) + \sum_{j=1}^n \gamma_{ij} y_j \end{aligned}, \quad (4)$$

де  $i = \overline{1, n}, \beta_{ij} = \varepsilon_{ij} = 1$ ,  $y$  – чисельність робочої сили  $i$ -тої і  $j$ -тої країн,  $z$  – обсяг капіталу,  $k_i$  – коефіцієнт конкуренції робочої сили за вільні робочі місця на ринку  $i$ -тої країни;  $\beta_{ij}$  – частка вільних робочих місць  $i$ -тої країни, за які конкурує робоча сила  $j$ -тої країни;  $L, K$  – деякі граничні рівні робочої сили (за  $z = 0$ ) і капіталу (за  $y = 0$ ); коефіцієнти  $\alpha_{ij}$  і  $\gamma_{ij}$  представлено у вигляді:  $\alpha_{ij} = a_i a_{ij}^0$ , де  $a_{11}^0 + a_{21}^0 = 1, a_{12}^0 + a_{22}^0 = 1, a_{ij}^0$  – частка капіталу  $j$ -тої країни, що звертається на ринку праці  $i$ -тої країни і веде до росту робочої сили  $i$ -тої країни;  $\gamma_{ij} = \gamma_i \gamma_{ij}^0$ , де  $\gamma_{11}^0 + \gamma_{21}^0 = 1, \gamma_{12}^0 + \gamma_{22}^0 = 1, a_{ij}^0$  – частка робочої сили  $j$ -тої країни, що звертається на ринку праці  $i$ -тої країни і веде до росту капіталу  $i$ -тої країни,  $\varepsilon_{ij}$  ( $i \neq j$ ) – частки вартості інвестиційних об'єктів  $i$ -тої країни, за які конкурує капітал  $j$ -тої країни,  $c_i$  – коефіцієнт конкуренції за капітал  $i$ -тої країни.

**Висновки і пропозиції.** Таким чином, побудовано модель конкурентних взаємодій на загальному ринку праці і капіталу довільного числа країн. Детально проаналізовані окремі випадок цієї моделі для однієї країни. Знайдено рівноважні стани в цих випадках, проаналізована їхня стійкість і досліджені біфуркації типу сідло вузол.

Така модель може бути взята на увазі при заключенні договорів на співробітництво між країнами. Аналогом можуть бути запропановані країнами Північної Америки договірні стосунки на прикладі NAFTA. В умовах яких громадяни з канадським та мексиканським громадянством мають право на безвізову роботу та ведення бізнесу у США.

**Список літератури:**

1. Московкин В.М. Основы концепции диффузии инноваций // Бизнес Информ. – X., 1998. – № 17-18. – С. 41-48.
2. Московкин В.М. Конкурентные взаимодействия в стратифицированном обществе (Математическое моделирование) // Бизнес Информ. – X., 2000. – № 2. – С. 36-39.
3. Федоров В.Д., Гильманов Т.Г. Экология. – М.: Изд-во МГУ, 1980. – 464 с.
4. Эрроусмит Д., Плейс К. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Качественная теория с приложениями. – М.: Мир, 1986. – 243 с.
5. Goh B.S. Stability in models of mutualism // The American Naturalist. – 1979. – Vol. 113. – № 2. – P. 261-274.
6. Takeuchi Yasuhiro, Karmeshu. Dynamic model of three competing social groups // Int. J. Systems Sci. – 1989. – Vol. 20, № 11. – P. 2125-2137.
7. Журавка А.В. Математическое моделирование взаимодействий на общем рынке труда и капитала // Экономика: проблемы теории та практики. – Дніпропетровськ, 2002. – Вип. 131. – С. 50-53.
8. Журавка А.В. Концепция моделирования конкурентных взаимодействий в теории экономической динамики // Радиоэлектроника и информатика. – X., 2001. – № 4. – С. 82-88.
9. Журавка А.В. Моделирование конкурентно-кооперационных взаимодействий (Социально-экономические системы) // Бизнес Информ. – X., 2002. – № 1-2. – С. 49-51.
10. Журавка А.В. Численный анализ трехмерной модели конкурентно-кооперационных взаимодействий (Социально-экономические системы) // Бизнес Информ. – X., 2002. – № 7-8. – С. 35-37.
11. Журавка А.В., Московкин В.М. Нелинейная модель динамики занятого населения и анализ устойчивости ее равновесных состояний // Вестник Международного Славянского университета. – Серия «Экономика. Социология». – X., 2002. – Том 5, № 3. – С. 32-34.
12. Журавка А.В., Московкин В.М., Брук В.В. Двумерная модель конкурентных взаимодействий в экономике: теория и численные эксперименты // Автоматические системы управления и приборы автоматизации. – X., 2001. – № 115. – С. 98-103.
13. Журавка А.В. Комплекс моделей конкурентно-кооперационных взаимодействий у социально-економічних системах // Модели управления в рыночной экономике, Донецк: 2006. – Вип. 9. – С.79-86.
14. Чуб О.В., Новожилова М.В., Журавка А.В. Моделирование попиту на послуги ремонтно-будівельних служб ЖКГ при плануванні обсягу фінансових ресурсів // Збірник наукових праць. Фінансово-кредитна діяльність. Харків: 2012. – Вип. 1. – С. 208-214.
15. Журавка А.В., Чуб О.І., Океме Елеоджо Моделирование инвестиційної стратегії на основі енерговоробничих циклів // Збірник наукових праць. II-га Всеукраїнська науково-практична конференція Актуальні проблеми економічного і соціального розвитку регіону. Красноармійськ: 2012. – С. 214.
16. Журавка А.В., Московкин В.М., Елеоджо О. Сутність процесів конкуренції в соціально-економічних системах [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир. – 2013. – №1(9).
17. Журавка А.В., Московкин В.М., Елеоджо О. Сутність процесів кооперації в соціально-економічних системах [Електронний ресурс] // Економіка. Управління. Інновації. Житомир. – 2014. – №1(11).

**Журавка А.В.**

Харьковский национальный университет строительства и архитектуры

**Мудаширу Тайо Мусибо**

Харьковский национальный университет радиоэлектроники

## **МОДЕЛИ НЕЛИНЕЙНОЙ ДИНАМИКИ В РЕШЕНИИ ПРОБЛЕМ МАКРОЭКОНОМИЧЕСКОЙ НЕСТАБИЛЬНОСТИ НА РЫНКЕ ТРУДА И КАПИТАЛА**

**Аннотация**

В статье рассмотрена модель конкурентных взаимодействий на общих рынках труда и капитала произвольного числа стран. Такая модель может быть взята за основу при заключении договоров на сотрудничество между странами. Аналогом таких взаимоотношений могут быть рассмотрены, предложенные странами Северной Америки, договорные отношения на примере НАФТА, в условиях которых граждане с канадским и мексиканским гражданством имеют право на безвизовую работу и ведения бизнеса в США. Подробно проанализированы отдельные случаи этой модели для одной страны. Для предложенной модели найдены равновесные состояния, проанализирована их устойчивость и исследованы бифуркации типа седло узел.

**Ключевые слова:** рынок труда, динамика ВВП, динамика ВНП, динамика занятого населения, бифуркации типа седло узел, сотрудничество между странами.

**Zhuravka A.V.**

Kharkiv National University of Construction and Architecture

**Mudashiru Tajo Musibau**

Kharkiv National Radiotechnic University

## **MODELS OF NONLINEAR DYNAMICS IN SOLVING PROBLEMS OF MACROECONOMIC INSTABILITY IN THE LABOR MARKET AND CAPITAL**

### **Summary**

In this article, a model of competitive interactions in the labor and capital markets any number of countries was build. This model can be used as a basis to conclude contracts on the cooperation between countries. An analogue of such a relationship may be consideration of the proposal North American countries contractual relations as an example NAFTA, under which citizens with Canadian and Mexican nationals have the right to visa-free work and do business in the United States. Analyzed in detail individual cases of this model for a single country. For the proposed model found equilibrium states, their stability is analyzed and studied the bifurcation of saddle node.

**Keywords:** labor market, GDP dynamics, GNP dynamics, the dynamics of the employed population, the bifurcation of saddle node, cooperation between countries.