УДК 514.7:004.94

ЦИЛІНДРИЧНА ГВИНТОВА ЛІНІЯ: ВЛАСТИВОСТІ, ЗАСТОСУВАННЯ, ВІЗУАЛІЗАЦІЯ

Довбня П.І., Сонько В.І.
Переяслав-Хмельницький державний педагогічний університет
імені Григорія Сковороди

У статті систематизовано знання про властивості циліндричної гвинтової лінії, показано сфери її застосування, викладено авторський підхід у використанні комп'ютерної візуалізації гвинтової лінії, подано методичні рекомендації щодо дослідження кривої та засвоєння її властивостей.
Ключові слова: диференціальна геометрія, механічна крива, циліндрична гвинтова лінія, комп'ютерна візуалізація, принцип навчання, Geogebra.

Постановка проблеми. У процесі навчання математики особлива увага приділяється питанню використання засобів наочності. Відомий німецький математик Д. Гільберт зазначав: «У математиці, як і взагалі в наукових дослідженнях, існують дві тенденції: тенденція до абстракції – вона намагається виробити логічний погляд на основі різного матеріалу і привести цей матеріал у систематичний зв'язок, і друга тенденція – тенденція до наочності, яка на противагу першій прагне до живого споглядання об'єктів і їх внутрішніх відношень» [2, с. 5]. Дане твердження вченого має особливе значення при вивченні геометричних курсів (аналітичної геометрії, диференціальної геометрії, проективної та нарисної геометрії), у яких дуже часто доводиться застосовувати комп'ютерну графіку для повнішого візуального сприйняття студентами досліджуваних кривих чи поверхонь. Сьогодні важко переоцінити важливість знань про криві при моделюванні різноманітних процесів, об'єктів та явищ. За їх допомогою визначають форму нового об'єкта, траєкторію космічної ракети, руху електронів і переміщення ураганів, описують гірські маршрути й орбіти планет, прогнозують різноманітні процеси в науці, техніці та повсякденному житті [4; 6; 7]. Криві є саме тією темою, яка може зацікавити студентів різних курсів, при цьому буде реалізовуватися принцип спірального навчання і студенти будуть поглиблювати раніше отримані знання та отримувати нові, порівнювати різні способи розв'язання задач. Дослідження кривих передбачає наявність інтегрованих знань із багатьох розділів математики: лінійної алгебри, аналітичної, диференціальної, проективної, комп'ютерної геометрії, математичного аналізу, диференціальних рівнянь, обчислювальної математики [1; 2]. З іншого боку, вони мають широке застосування в різноаспектних галузях прикладної математики, теорії поля, техніки, механіки, оптики тощо. Усе це допомагатиме студентам краще зрозуміти внутріматематичні та міжпредметні зв'язки математики, мотивуватиме їх до пошуку більш елегантного способу розв'язання задач із застосуванням знання із різних розділів математики.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Систематизація знань про криві наведена у працях О.В. Погорелова, О.А. Борисенка, О.О. Пришляка, Ж. Салеса, Ф. Баньюле та багатьох інших. Дослідженню окремих кривих на основі комп'ютерних технологій приділяли увагу Г.В. Горр, Е.К. Щетиніна, Д.Н. Шеховцова, Р.А. Зіатдинов, В.М. Ракута, С.А. Раков та інші. Застосування комп'ютерів для виконання різноманітних завдань навчання, виховання і розвитку учнів обґрунтовується в цілій низці досліджень (М.І. Жалдак, Ю.С. Рамський, А.П. Єршов Н.І. Морзе, В.М. Монахов, В.В. Лапінський, П.І. Самойленко, С. Пейперт, Г.М. Клейман, Е.І. Машбиць, Н.А. Тарасенкова, Л.С. Голоднюк та ін.).

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. Сьогодні розглядаються різні педагогічні програмні засоби для розв'язання математичних задач, серед яких і задачі курсу аналітичної, диференціальної, проективної геометрії. Однак методи інтеграції математичних знань, методи комп'ютерної візуалізації властивостей геометричних об'єктів при вивченні математики у вищій школі, застосовуються не повною мірою. Комплексні дослідження деяких кривих за допомогою окремих програмних математичних пакетів, зокрема Geogebra, у процесі навчання в поєднанні із класичними, особливо евристичними методиками, усе ще потребують розробки й удосконалення.

Метою статті є систематизація знань про циліндричну гвинтову лінію та можливості її застосування, демонстрація авторського підходу до комп'ютерної візуалізації гвинтової лінії, дослідження її властивостей за допомогою середовища Geogebra.

Виклад основного матеріалу. Гвинтова лінія утворюється рівномірним переміщенням точки по прямолінійній твірній циліндричної або конічної поверхні з одночасним рівномірним її обертанням навколо нерухомої осі. Залежно від виду поверхні обертання гвинтова лінія може бути циліндричною, конічною, торовою тощо. Циліндричну гвинтову лінію ще називають гелісою – від фр. helice – спіраль, гвинтова лінія. Тіло, що має форму гвинтової лінії, у розмовному мовленні часто називають спіраллю, у математиці спіралями називають певний клас плоских кривих. Широко застосовуються на практиці циліндричні й конічні гвинтові лінії. Форму гвинтової лінії мають багато деталей машин та механізмів: пружини, частини гвинтових свердел, з'єднувальні гвинти, болти, шпильки. Гвинти м'ясорубок, екструдерів, гвинт Архімеда, шнеки снігоприбиральних машин та багато інших пристроїв мають гвинтову поверхню – гелікоїд. Форму гвинтової лінії також мають відомі молекули живих організмів (ДНК, РНК, кальмодулін, аспарагиназа) [4].

Циліндрична гвинтова лінія визначається двома параметрами: кроком P, що дорівнює висоті циліндра (точка переміститься на величину кроку при повному обертанні твірної навколо осі циліндра) та радіусом циліндра R.

Для побудови зображення циліндричної гвинтової лінії за радіусом основи R і кроком гвинтової лінії P, напрямом обертання й поступального руху точки кола основу циліндра ділять на будь-яку кількість рівних частин (зазвичай 12). Точки поділу нумерують у напрямку руху точки A_0', A_1', A_2', A_3', A_4', A_5', A_6', A_7', A_8', A_9', A_{10}', A_{11}'. Потім на твірній циліндра відкладають заданий крок P, який також ділять на ту ж кількість рівних частин, точки поділу нумерують від низу до верху (рис. 1). Через точки поділу кола проводять вертикальні лінії зв'язку до перетину з горизонтальними прямими поділу кроку й отримують точки A_0'', A_1'', A_2'', A_3'', A_4'', A_5'', A_6'', A_7'', A_8'', A_9'', A_{10}'', A_{11}'', що належать до фронтальної проекції гвинтової лінії, потім з'єднують їх кривою за допомогою лекала. Фронтальна проекція циліндричної гвинтової лінії – синусоїда, а горизонтальна – коло. Розгорткою циліндричної гвинтової лінії (A_0, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8, A_9, A_{10}, A_{11}) є пряма.

У декартових координатах циліндрична гвинтова лінія визначається параметричною формулою:

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = a\sin t, \\ z = bt. \end{cases} \qquad (1)$$

У векторній формі

$$r = r(t) = (a\cos t;\ a\sin t;\ bt),\ 0 < t \le 2\pi. \qquad (2)$$

За допомогою похідних по параметру радіус-вектора, $r'(t)$, $r''(t)$ у кожній точці кривої визначаються вектори ортонормованого базису $\{e\} = \{\tau; \nu; \beta\}$, де $\tau = \frac{r'}{|r'|}, \beta = \frac{[r',r'']}{|[r',r'']|}, \nu = \frac{[r',[r',r'']]}{|[r',[r',r'']]|}$ (3) – одиничні вектори дотичної, бінормалі та нормалі відповідно. Приєднання до даної точки кривої $M(t)$ ортонормованого базису (3) дає нам адаптований репер, $R_t(M(t); \tau(t), \nu(t), \beta(t))$, – правий прямокутний декартовий репер, який рухається вздовж параметричної кривої і є основним інструментом дослідження її геометрії не тільки в тривимірному евклідовому, а й у рімановому просторі довільної розмірності. У зв'язку із цим поняття адаптованого репера є важливим для диференціальної геометрії і потребує наочного представлення в курсі диференціальної геометрії (рис. 3).

Для гладкої кривої γ вводиться її натуральний параметр s як довжина цієї кривої:

$$s = \int_{t_0}^{t} |r'(t')|dt = \int_0^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}\, dt$$

Знаходимо формулу довжину дуги циліндричної гвинтової кривої:

$$r' = (-asint; acost, bt)$$

$|r'| = \sqrt{(-asint)^2 + (acost)^2 + (b)^2} = \sqrt{a^2\sin^2 t + a^2\cos^2 t + b^2} = \sqrt{a^2(\sin^2 t + \cos^2 t) + b^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$ (1).

Отже,

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 + b^2} dt = \sqrt{(a^2 + b^2)}t\ \Big|_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{a^2 + b^2}.$$

Функція $s(t)$ є монотонно зростаючою функцією параметра t. Розклад похідних за натуральним параметром від векторів базиса по векторах $\{e\}$ представляється формулами Френе-Серре:

$$\tau' = k_1 \nu;\ \nu' = -k_1 \tau + k_2 \beta;\ \beta' = -k_2 \nu, \quad (4)$$

де два скаляри:

$$k_1 = k(s);\ k_2 = \kappa(s) \quad (5)$$

кривизна і скрут кривої відповідно визначаються формулами:

$$k_1 = \frac{|[r', r'']|}{|r'|^2};\ k_2 = \frac{(r', r'', r''')}{|[r', r'']|^2}. \quad (6)$$

Співвідношення (5) називається натуральним рівнянням кривої. Знання щодо кожної точки кривої її кривизни та скруту повністю визначатиме внутрішню геометрію цієї кривої.

Обчислимо кривизну і скрут гвинтової лінії:

$$r'' = (-acost;\ -asint;\ 0),$$

$$r''' = (asint;\ -acost;\ 0),$$

$$[r', r''] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -asint & acost & b \\ -acost & -asint & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} acost & b \\ -asint & 0 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} -asint & b \\ -acost & 0 \end{vmatrix} \vec{j} +$$

$$\begin{vmatrix} -asint & acost \\ -acost & -asint \end{vmatrix} \vec{k} = (absint)\vec{i} - (abcost)\vec{j} + (a^2 \sin^2 t + a^2 \cos^2 t)\vec{k} =$$

$$(absint)\vec{i} - (abcost)\vec{j} + a^2(\sin^2 t + \cos^2 t)\vec{k} = (absint)\vec{i} - (abcost)\vec{j} + a^2\vec{k},$$

$$[r', r''] = (absint; -abcost;\ a^2)$$

Знайдемо довжину вектора

$$|[r', r'']| = \sqrt{(absint)^2 + (-abcost)^2 + (a^2)^2} =$$

$$\sqrt{(absint)^2 + (-abcost)^2 + (a^2)^2} = \sqrt{a^2 b^2 \sin^2 t + a^2 b^2 \cos^2 t + a^4} =$$

$$\sqrt{a^2 b^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) + a^4} = \sqrt{a^2 b^2 + a^4} = a\sqrt{a^2 + b^2}.$$

$$(r', r'', r''') = \begin{vmatrix} -asint & acost & b \\ -acost & -asint & 0 \\ asint & -acost & 0 \end{vmatrix} = a^2 b \cos^2 t + a^2 b \sin^2 t = a^2 b\ .$$

Отже, *кривизна*

$$k_1 = \frac{a\sqrt{a^2+b^2}}{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^3} = \frac{a}{a^2+b^2}, \quad (7)$$

скрут

$$k_2 = \frac{a^2 b}{a^2(a^2+b^2)} = \frac{b}{a^2+b^2}, \quad (8).$$

З формул (7) і (8) випливає, що кривизна і скрут гвинтової лінії не залежать від параметра t, тобто вони мають сталі значення в будь-якій точці кривої.

Визначимо рівняння дотичної до гвинтової лінії для параметрів $a = 2$ і $b = \frac{1}{\pi}$. Відомо, рівняння дотичної має вигляд

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)}\ M_0(x_0; y_0; z_0).$$

Нехай тоді рівняння гвинтової лінії матиме вигляд

$$\begin{cases} x = 2\cos t, \\ y = 2\sin t, \\ z = \frac{t}{\pi}. \end{cases}, \quad (9)$$

а рівняння дотичної буде:

$$x' = -2sint, y' = 2cost, z' = \frac{1}{\pi}.$$

Візьмемо точку $\frac{\pi}{2}$, тоді

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(-2; 0; \frac{1}{\pi}\right) \Rightarrow \frac{x}{-2} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-0.5}{\frac{1}{\pi}}. \quad (10)$$

– рівнянням дотичної.

Знайдемо φ – кут нахилу дотичної до гвинтової лінії.

$$\cos\varphi = \left(\widehat{\vec{r}, \vec{k}}\right) = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

тобто *дотичні до гвинтової лінії мають постійний кут нахилу.*

Рівняння еволюти знайдемо за формулою:

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{|r'|^2 * [[r', r''], r']}{|[r', r'']|^2}.$$

$$[[r', r''], r'] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ absint & -abcost & a^2 \\ -asint & acost & b \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -abcost & a^2 \\ -acost & b \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} absint & a^2 \\ -asint & b \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} absint & -abcost \\ -asint & acost \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$= (-ab^2 \cos t - a^3 \cos t)\vec{i} - (ab^2 \sin t - a^3 \sin t)\vec{j}$$

$$+ (a^2 bsintcost - a^2 bsintcost)\vec{k}$$

$$= (-ab^2 \cos t - a^3 \cos t)\vec{i} - (ab^2 \sin t - a^3 \sin t)\vec{j} + 0 * \vec{k}.$$

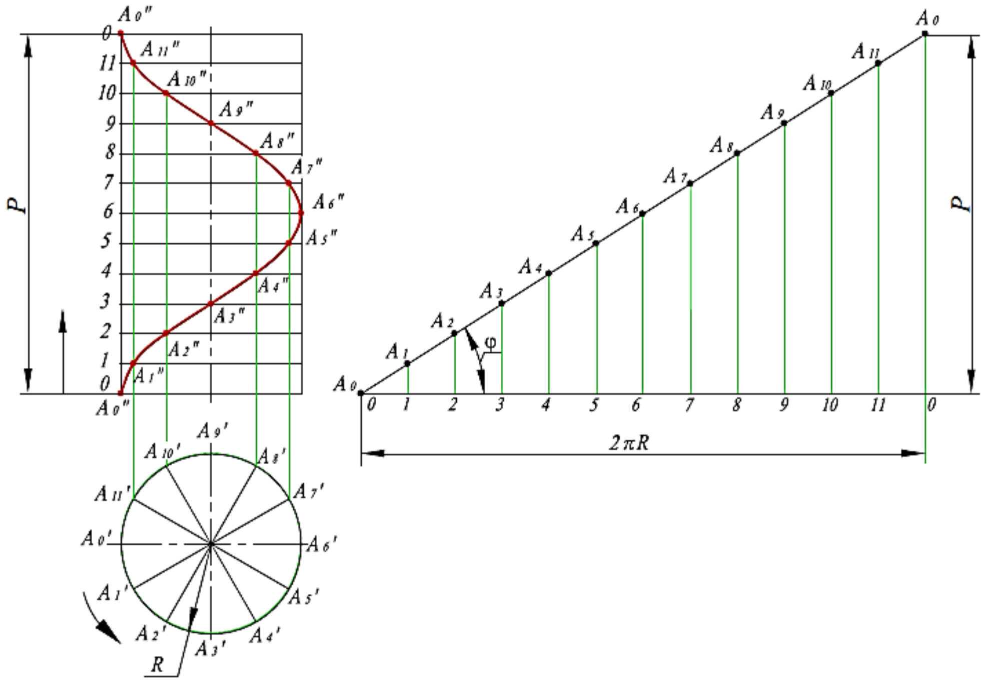

Рис. 1. Побудова зображення циліндричної гвинтової лінії

ПЕДАГОГІЧНІ НАУКИ

$$\vec{\rho} = \vec{r} + \frac{(a^2+b^2)^2 * (-ab^2\cos t + a^3\cos t\,; -ab^2\sin t + a^3\sin t\,; 0)}{a^2(a^2+b^2)} =$$

$$= \vec{r} + \frac{(a^5\cos t - ab^4\cos t\,;\ a^5\sin t - ab^4\sin t\,; 0)}{a^2}$$

$$= (acost; asint; bt) + \left(a^3\cos t - \frac{b^4\cos t}{a};\ a^3\sin t - \frac{b^4\sin t}{a}; 0\right)$$

$$= \left(a\cos t + a^3\cos t - \frac{b^4\cos t}{a}; a\sin t + a^3\sin t - \frac{b^4\sin t}{a}; bt\right)$$

$$= \left(\left(\frac{a^2+a^4-b^4}{a}\right)\cos t\,; \left(\frac{a^2+a^4-b^4}{a}\right)\sin t\,; bt\right)$$

Нехай $a_1 = \frac{a^2+a^4-b^4}{a}$, тоді

$$\vec{\rho} = (a_1\cos t\,;\ a_1\sin t\,; bt) \qquad (11).$$

Рівняння (11) показує, що *еволютою гвинтової лінії є гвинтова лінія.*

За допомогою комп'ютерної візуалізації легко викласти геометричний сенс параметра t, поняття скруту, кривизни тощо [3; 5; 8]. Продемонструємо візуалізацію властивостей гвинтової лінії в середовищі *GeoGebra* (рис. 2).

Алгоритм побудови динамічного креслення:

1. Вибрати на панелі інструментів Вид – полотно 3D.
2. Задати за допомогою повзунків два параметри – a (радіус основи) і b (висоту) гвинтової лінії.
3. У рядку «Ввод» із списку команд вибираємо в розділі «Функції та Математичний аналіз» команду «Крива [<Вираз>, <Вираз>, <Вираз>, <Параметр>, <Початкове значення>, <Кінцеве значення>]». Задаємо значення параметра від -10 до 10, тобто «Крива [acos(t), asin(t), bt, -10, 10]», і маємо динамічну модель гвинтової кривої.
4. Будуємо точки $A = (0;0;10)$ та $B = (0;0;-10)$.
5. Будуємо циліндричну поверхню за допомогою команди «Циліндр [<точка>, <точка>, <радіус>]» із розділу 3D, ввівши точки A, B та радіус a.
6. Побудуємо точку на кривій, використавши інструмент «Точка на об'єкті».
7. Будуємо дотичну до кривої ввівши в рядок «Ввод» команду Дотична [<точка>, <крива>] із списку команд розділу «Геометрія».
8. Будуємо еволюту гвинтової лінії, додавши в рядок «Ввод» відповідне рівняння еволюти.
9. Знаходимо кривизну гвинтової лінії, задавши в рядок «Ввод» команду Кривизна [<Точка>, <Об'єкт>] із списку команд розділу «Функції і Математичний аналіз».

10) Набираємо в рядок «Ввод» формулу для обчислення скруту, яка виведена у вищезгаданій

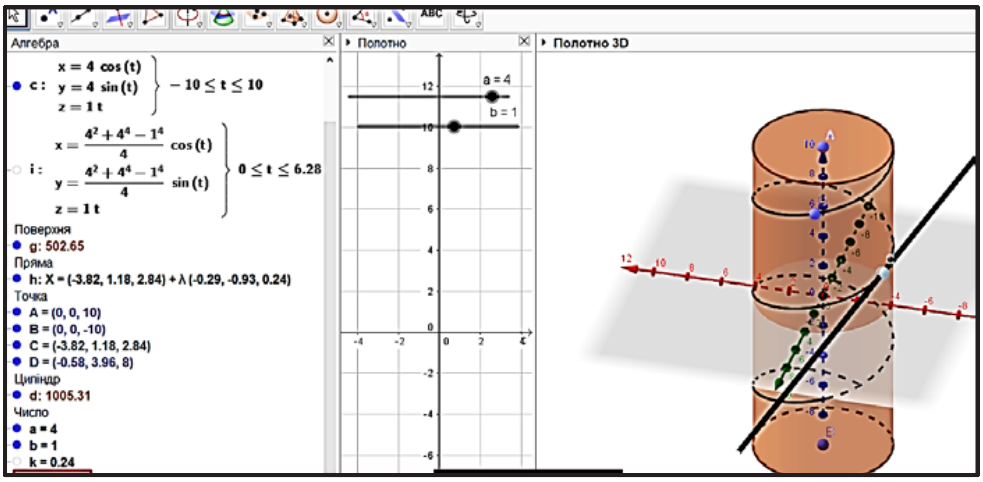

Рис. 2. Динамічна модель циліндричної гвинтової лінії

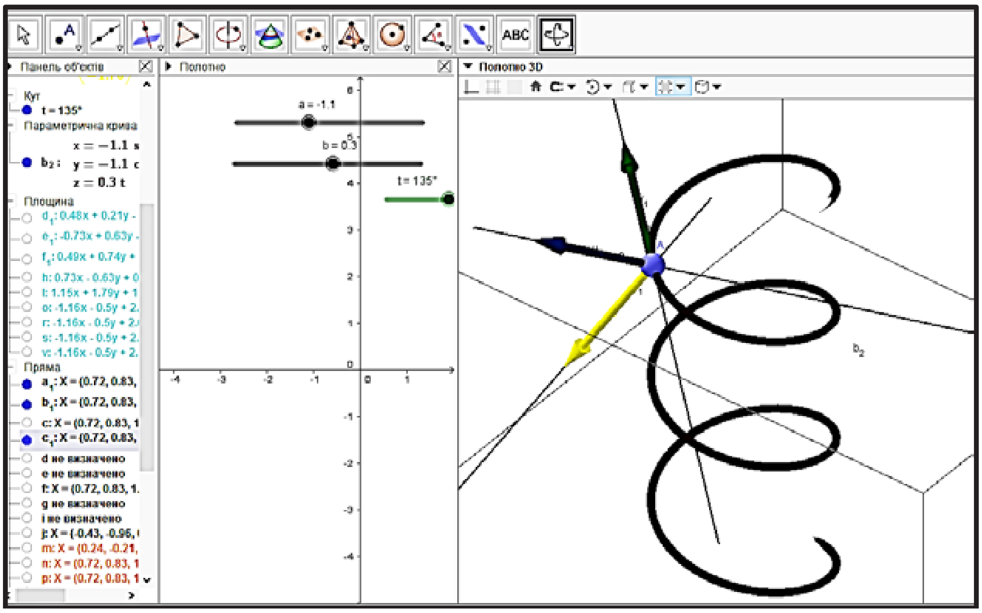

Рис. 3. Триедр циліндричної гвинтової лінії

задачі, і отримуємо на панелі об'єктів його числове значення.

При вивченні кривих довільної форми доцільно побудувати тригранник Френе, використовуючи комп'ютерну візуалізацію по частинах (дотична, головна нормаль, бінормаль) (рис. 3). Показуючи на екрані рух тригранника Френе, можна простежити за зміною дотичної і бінормалі щодо кривої і вектора кутової швидкості тригранника. Так, наприклад, при зображенні плоских кривих показати, що всі бінормалі між собою паралельні і властивість кривої можна визначити тільки за допомогою кривизни. Інтерпретацію цього поняття пояснити на малюнку, у якому вказати швидкість обертання дотичної. Це дасть змогу, повернувшись до розгляду просторової кривої, увести визначення поняття скруту як швидкості обертання одиничного вектора бінормалі.

Використання СКМ GeoGebra при вивченні кривих не зводиться виключно до створення ілюстрацій та анімацій, а й дає змогу обчислювати похідні та інтеграли, довжину дуги лінії, її кривизни та скруту, побудови кривої, заданої у різних формах, побудови дотичної прямої, нормалі, бінормалі, одиничних векторів триедра тощо [3]. Можливість інтерактивної зміни параметрів при обчисленнях і демонстрації об'єктів підвищує самостійність і розвиває пізнавальні здібності студентів. Представлені анімаційні креслення можна використовувати як дидактичний наочний матеріал. При цьому, студент зможе не лише використовувати вже створені динамічні креслення, а і в міру зацікавленості все більше проявляти самостійність у розробленні власного дидактичного матеріалу, виготовляючи живі зображення в середовищі GeoGebra.

Висновки і пропозиції. Отже, у статті розглянуто авторські підходи комп'ютерної візуалізації циліндричної гвинтової лінії. Вищевикладене дає підстави зробити висновок, що наочне навчання забезпечує різнобічне й повне формування математичних знань, підтримує інтерес до навчання і його мотивацію, сприяє підвищення рівня розвитку математичного мислення. Застосування системи динамічної геометрії, зокрема Geogebra, у процесі вивчення геометричних об'єктів дає змогу студентам розуміти теоретичний матеріал і свідомо застосувати його на практиці. Можливість інтерактивної зміни параметрів при обчисленнях і демонстрації об'єктів підвищує самостійність і розвиває пізнавальні здібності студентів.

Дослідження гвинтової лінії за допомогою програмного математичного пакету в процесі навчання в поєднанні із класичними методиками сприяє якісній реалізації основних принципів дидактики: науковості, звязку теорії з практикою, систематичності і послідовності, міжпредметних звязків, неперервності; системності; міцності знань; свідомості й активності; доступності; наочності; поєднання абстрактності мислення з наочністю в навчанні; єдності освітньої, виховної і розвивальної функцій навчання.

Список літератури:

1. Борисенко О.А. Диференціальна геометрія і топологія: Навч. посібник для студ. / О.А. Борисенко. – Харків: Основа, 1995. – 304 с.
2. Гильберт Д., Кон-Фосс С. Наглядная геометрия / Давид Гильберт, Стефан Кон-Фос / Пер. с нем. С.А. Каменецкого. – М.-Л., ОНТИ, 1936. – 304 с.
3. Довбня П.І. СКМ «Geogebra» як засіб інтеграції математичних знань / П.І. Довбня // Актуальні питання сучасної інформатики: Тези доповідей Всеукраїнської науково-практичної конференції з міжнародною участю – Сучасні інформаційні технології в освіті та науці (10-11 листопада 2016 р.). – Житомир: Вид-во ЖДУ ім. І. Франка, 2016. – Вип. 3. – С. 112-116.
4. Салес Ж. Таинственные кривые. Эллипсы, гиперболы и другие математические чудеса / Жузеп Салес, Франсеск Баньюле / Пер. с исп. – М.: Де Агостини, 2014. – 160 с.
5. Тарасенкова Н.А. Використання знаково-символічних засобів у навчанні математики / Н.А. Тарасенкова. – Черкаси: Відлуння-Плюс 2002. – 400 с.
6. Habib Z. Spiral transition curves and their applications / Z. Habib, M. Sakai. // Scientiae Mathematicae Japonicae. – 2005. – № 61. – С. 195-206.
7. Lockwood E.H. A book of curves / E.H. Lockwood // Cambridge university press. – 1961. – С. 110-117.
8. Yoshida N. Interactive aesthetic curve segments / N. Yoshida, T. Saito // The Visual Computer. – 2006. – № 22. – С. 896-955.

Довбня П.И., Сонько В.И.
Переяслав-Хмельницкий государственный педагогический университет
имени Григория Сковороды

ЦИЛИНДРИЧЕСКАЯ ВИНТОВАЯ ЛИНИЯ: СВОЙСТВА, ПРИМЕНЕНИЕ, ВИЗУАЛИЗАЦИЯ

Аннотация
В статье систематизированы знания о свойствах цилиндрической винтовой линии, показаны области её использования, изложен авторский подход в применении компьютерной визуализации винтовой линии, представлены методические рекомендации качественного исследования кривой и усвоения её свойств.
Ключевые слова: дифференциальная геометрия, механическая кривая, цилиндрическая винтовая линия, компьютерная визуализация, принцип обучения, Geogebra.

Dovbnia P.I., Sonko V.I.
Pereyaslav-Khmelnitsky State Pedagogical University
named after Grygory Skovoroda

CYLINDRICAL SPIRAL: PROPERTIES, SCOPE, VISUALIZATION

Summary
This article systematizes the knowledge about the properties of a cylindrical spiral, displays its scope, describes the author's approach to use computer visualization spiral, gives methodical recommendations for research of a curve and for learning of its properties.
Keywords: differential geometry, mechanical curve, cylindrical spiral, computer visualization, the principle of learning, Geogebra.