

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ

УДК 539.3

УСТАНОВИВШИЕСЯ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ ДВАЖДЫ УСЕЧЕННОГО УПРУГОГО КОНУСА

Мысов К.Д., Вайсфельд Н.Д.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Проблема определения поля смещений и напряжений упругого дважды усеченного конуса рассмотрена для случая установившихся крутильных колебаний. Для решения применяется интегральное преобразование Г.Я. Попова по угловой координате. Это позволяет свести исходную задачу к одномерной краевой задаче в пространстве трансформант, решение которой построено в точном виде. Получены дисперсионные уравнения для определения собственных частот. Исследована зависимость собственных частот от геометрических параметров конуса.

Ключевые слова: установившиеся крутильные колебания, дважды усеченный конус, интегральное преобразование Г.Я. Попова, точное решение, собственная частота.

Постановка проблемы. Важной задачей, имеющей широкое приложение в инженерной практике, является определение динамического напряженного состояния конуса под воздействием нестационарной нагрузки. Особенно важным моментом является возможность вычисления собственных частот необходимых для оценки устойчивости конструкции, работающих в нестационарных режимах. Это возможно сделать, используя аппарат начально краевых задач математической физики.

Анализ последних исследований и публикаций. Решение начально краевых задач математической физики для конусовидных упругих тел является актуальной проблемой, где остается по-прежнему много нерешенных вопросов. Так, например, в [1] экспериментально исследовано влияние распространения волн в упругом усеченном конусе. В [2] найдено точное решение задачи кручения упругого усеченного слоистого конуса в статической постановке. В [3] исследовано напряженное состояние неоднородного тонкого усеченного полого конуса. Ряд решений краевых задач для конусов при различных граничных условиях на их поверхностях приведены в [4-6].

Намного реже рассматриваются аналогичные задачи для дважды усеченных упругих конусов. Это объясняется математическими сложностями, вызванными геометрией задачи. В [7] исследовано напряженное состояние дважды усеченного конуса при равномерной нагрузке на большее основание и опирающегося о жесткую опору боковой поверхностью. Общее решение для осесимметричных граничных задач для дважды усеченного конуса выведено в [8]. Точное решение осесимметричной смешанной задачи теории упругости для дважды усеченного полого конуса с учетом его собственного веса приведено в [9].

Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы. Новизна предложенной постановки задачи заключается в том, что дважды усеченный конус подвергается динамическим крутиль-

ным колебаниям. Указанная модель имеет приложения как в различных областях строительной механики, так и в биомеханике. Авторами предложен подход, позволяющий получить точное решение динамической задачи теории упругости для дважды усеченного конуса.

Постановка задачи. Рассмотрим упругий дважды усеченный конус, описываемый в сферической системе координат соотношениями $a < r < b, -\psi \leq \theta \leq \psi, -\pi \leq \varphi < \pi$ (рис. 1).

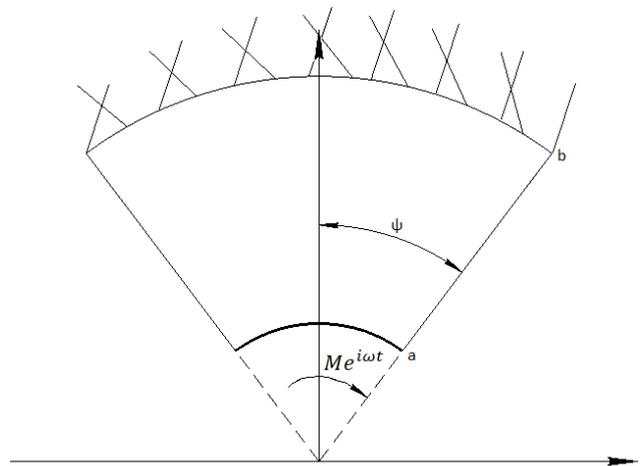


Рис. 1. Геометрия задачи

Источник: разработано авторами

Конус подвергается кручению через абсолютно жесткую накладку, сцепленную с нижним торцом. По верхнему торцу конус зашцементирован. В указанной осесимметричной постановке ненулевыми остаются смещения $u_\varphi(r, \theta, t)$ в дальнейшем обозначаемые $w(r, \theta, t)$ и касательные напряжения $\tau_{\theta\varphi}(r, \theta, t) = Gr^{-1}(w' - w \operatorname{ctg} \theta)$ и $\tau_{r\varphi}(r, \theta, t) = G(w' - r^{-1}w)$, где $w' = \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial r}, w^* = \frac{\partial w(r, \theta, t)}{\partial \theta}$. Поскольку задача ставится для случая установившихся коле-

баний то для всех механических характеристик имеет место представление $f(r, \theta, t) = e^{i\omega t} f(r, \theta)$, где ω – частота установившихся колебаний.

Требуется определить смещения точек конуса, удовлетворяющие уравнению кручения [10]

$$(r^2 w')' + \frac{(\sin \theta w'')}{\sin \theta} - \frac{w}{\sin^2 \theta} = -r^2 q^2 w \quad (1)$$

и краевым условиям

$$(w' - w \operatorname{ctg} \theta)|_{\theta=\psi} = 0 \quad (2)$$

$$w|_{r=b} = 0 \quad (3)$$

$$w(a, \theta) = \alpha l \sin \theta \cos \theta, l = b - a, \quad (4)$$

где $q = \frac{\omega}{c}$ – волновое число и $c = \sqrt{\frac{G}{\rho}}$, – скорость поперечных волн, ρ – плотность, а G – модуль сдвига и α – неизвестный угол поворота, который найден в дальнейшем из уравнения движения накладки, как абсолютно жесткого тела

$$2\pi a^3 \int_0^\psi \sin^2 \theta \tau_{r\varphi}(a, \theta) d\theta + M + \omega^2 \alpha J = 0, \quad (5)$$

где M – крутящий момент, приложенный к накладке, J – известный момент инерции накладки. Необходимо определить волновое поле конуса.

Изложение основного материала исследования. К полученной задаче (1)-(4) применяется интегральное преобразование Г.Я. Попова [11].

$$w_k(r) = \int_0^\psi \sin \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) w(r, \theta) d\theta \quad (6)$$

с формулой обратного преобразования

$$w(r, \theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{v_k}^1(\cos \theta) w_k(r)}{\|P_{v_k}^1(\cos \theta)\|^2}, \quad (7)$$

где $P_{v_k}^1(\cos \theta)$ – присоединенные функции Лежандра первого рода, v_k – корни трансцендентного уравнения

$$\frac{\partial P_{v_k}^1(\cos \theta)}{\partial \theta} \Big|_{\theta=\psi} - \operatorname{ctg} \theta P_{v_k}^1(\cos \psi) = 0 \quad (8)$$

Применив преобразование (6) к (1) получим

$$(r^2 w_{sk}')' - v_k(v_k + 1)w_{sk} + r^2 q^2 w_{sk} = 0 \quad (9)$$

Граничные условия (3), (4) примут вид

$$w_k|_{r=b} = 0 \quad (10)$$

$$w_k(a, \theta) = \alpha l \gamma_k, \quad \gamma_k = \int_0^\psi \cos \theta \sin^2 \theta P_{v_k}^1(\cos \theta) d\theta \quad (11)$$

Окончательно в пространстве трансформант, получена одномерная краевая задача:

$$(r^2 \tilde{w}_k')' - v_k(v_k + 1)\tilde{w}_k - r^2 q^2 \tilde{w}_k = 0 \quad (12)$$

$$\tilde{w}_k|_{r=b} = 0$$

$$w_k|_{r=a} = \alpha l \gamma_k, \quad \gamma_k = \frac{\sin^3 \psi P_{v_k}^1(\cos \psi)}{(v_k - 2)(v_k + 3)}$$

Для решения дифференциального уравнения (9) найдена фундаментальная система решений. Для этого в уравнении (9) проведена замена вида $\tilde{w}_k(r) = r^{-2} w_k(r)$, что привело его к уравнению Бесселя

$$r(r \tilde{w}_k')' + \left(r^2 q^2 - \left(v_k + \frac{1}{2} \right)^2 \right) \tilde{w}_k = 0 \quad (13)$$

Учитывая произведенную замену, фундаментальными решениями уравнения (9) будут функции

$$w_{0k}(r) = r^{-\frac{1}{2}} J_{\tilde{v}_k}(qr) w_{1k}(r) = r^{-\frac{1}{2}} Y_{\tilde{v}_k}(qr), \quad (14)$$

где $\tilde{v}_k = v_k + \frac{1}{2}$, $J_{\tilde{v}_k}(r)$ и $Y_{\tilde{v}_k}(r)$ функции Бесселя первого и второго рода соответственно.

Решение краевой задачи (12) строиться в форме [12]

$$w_k(r) = \Psi_{0k}(r) \alpha l \gamma_k, \quad (15)$$

где $\{\Psi_{0k}(r), \Psi_{1k}(r)\}$ – это базисная система решений, под которой понимается система функций удовлетворяющая краевой задаче

$$(r^2 \Psi_{jk}')' - v_k(v_k + 1)\Psi_{jk} + r^2 q^2 \Psi_{jk} = 0, \quad j = 0, 1, i = 0, 1, \quad (16)$$

$$U_i(\Psi_{jk}) = \delta_{ij}$$

где δ_{ij} – символ Кронекера, $U_i(\Psi_{jk})$ – граничные функционалы краевой задачи (12).

Базисная система решений имеет вид:

$$\Psi_{0k}(r) = a^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} (J_{\tilde{v}_k}(qr) Y_{\tilde{v}_k}(qb) - J_{\tilde{v}_k}(qb) Y_{\tilde{v}_k}(qr)) \Delta^{-1} \quad (17)$$

$$\Psi_{1k}(r) = -b^{\frac{1}{2}} r^{-\frac{1}{2}} (J_{\tilde{v}_k}(qr) Y_{\tilde{v}_k}(qa) - J_{\tilde{v}_k}(qa) Y_{\tilde{v}_k}(qr)) \Delta^{-1} \quad (18)$$

$$\Delta = J_{\tilde{v}_k}(qa) Y_{\tilde{v}_k}(qb) - J_{\tilde{v}_k}(qb) Y_{\tilde{v}_k}(qa) \quad (19)$$

Применив к (15) обратное преобразование Попова (7), получим решение исходной задачи

$$w(r, \theta) = \left(\frac{a}{r} \right)^{\frac{1}{2}} \alpha l \sin^3 \psi \sum_{k=0}^{\infty} \frac{P_{v_k}^1(\cos \theta) P_{v_k}^1(\cos \psi)}{(v_k - 2)(v_k + 3) P_{v_k}^1(\cos \theta)^2} * \frac{J_{\tilde{v}_k}(qr) Y_{\tilde{v}_k}(qb) - J_{\tilde{v}_k}(qb) Y_{\tilde{v}_k}(qr)}{J_{\tilde{v}_k}(qa) Y_{\tilde{v}_k}(qb) - J_{\tilde{v}_k}(qb) Y_{\tilde{v}_k}(qa)} \quad (20)$$

Формула (20) определит смещения конуса, если будет известен угол поворота α . Величину угла найдем из формулы (5), которую предварительно переформулируем в терминах смещений. Получим

$$\alpha = -\frac{M}{\omega^2 J}. \quad (21)$$

Таким образом, с учетом (21) получено точное решение задачи (1-4) в виде формулы (20).

Наиболее важным с точки зрения механических приложений является нахождение собственных частот. Для этого требуется решить следующее трансцендентное уравнение:

$$D(\omega) = \prod_{k=0}^N \left(J_{\tilde{v}_k} \left(\frac{a}{c} \omega \right) Y_{\tilde{v}_k} \left(\frac{b}{c} \omega \right) - J_{\tilde{v}_k} \left(\frac{b}{c} \omega \right) Y_{\tilde{v}_k} \left(\frac{a}{c} \omega \right) \right) \quad (22)$$

Для расчета выбирались следующие входные параметры $N = 5$, $G = 80 * 10^{10}$ г/см², $\rho = 7.86$ г/см³,

$$a = 10 \text{ см}, \quad b = 2a, \quad l = b - a, \quad c = \sqrt{\frac{G}{\rho}} = 3.19 * 10^5 \text{ см/с},$$

$$V = 0.1 \text{ см}^3, \quad m = \rho V = 0.786 \text{ г}, \quad J = \frac{m(a \sin \psi)^2}{2} = 39.3 \text{ г} \cdot \text{см}^2,$$

$$M = 150 * 10^{10} \text{ г} \cdot \text{см}^2 / \text{с}^2.$$

Для трех разных углов раствора конуса $\psi = \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{5}$ определим первые собственные частоты Таблица 1.

Теперь зафиксируем $\psi = \frac{\pi}{4}$ и изменяя размеры конуса проследим как изменится первая собственная частота Таблица 2.

Выводы и перспективы. В работе получены точные формулы для определения смещений и напряжений, вызванных крутильными

Таблица 1

Первые пять собственных частот для разных углов раствора конуса

ψ	$\Omega_i = \frac{2\omega_i l}{\pi c}, i = 1, \dots, 5$				
$\frac{\pi}{3}$	2.214223106	3.002914323	4.005326720	4.117770759	4.630818064
$\frac{\pi}{4}$	2.373872414 π	3.576436869	4.211826292	4.967030581	5.073032348
$\frac{\pi}{5}$	2.563024897	4.179108656	4.329921212	5.589767714	5.929545648

Источник: разработано авторами

Таблица 2

Зависимость собственных частот от угла раствора

b	$1.5a$	$2a$	$3a$	$10a$
Ω_1	2.139135321	2.373872414	2.786775063	3.655727562

Источник: разработано авторами

ми колебаниями дважды усеченного конуса. Была исследована зависимость резонансных частот от угла раствора и линейного размера конуса.

Для расчета в угловых точках конуса следует провести дополнительные исследования порядка особенности напряжений, аналогичное проделан-

ному в работах [13; 14], но для динамического случая.

Предложенный подход может быть использован для проблемы определения динамических напряжений и смещений дважды усеченного конуса в случае, когда нагрузка приложена к конической поверхности.

Список литературы:

1. Kenner V. Elastic waves in truncated cone. / V. Kenner, W. Goldsmith // *Experimental Mechanics*. – 1967. – В. N 10. – P. 442-449.
2. Popov G.Ya. Torsion of a Truncated Conically Layered Elastic Cone / G.Ya. Popov, N.D. Vaisfel'd // *Journal of Mathematical Sciences*. – V. 203, No. 1. – 2014. – P. 135-148.
3. Akhmedov N.K. Analysis of a three-dimensional problem of the theory of elasticity for an inhomogeneous truncated hollow cone / N.K. Akhmedov, M.F. Mekhtiyev // *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. – V. 57, iss. 5. – 1993. – P. 871-877.
4. Thompson T.R. End effects in a truncated semi-infinite cone // *Quart. J. Mech. Appl. Math.* – V. 23, iss. 2. – 1970. – P. 185-196.
5. Kamran Asemi. Elastic solution of a two dimensional functionally graded thick truncated cone with finite length under hydrostatic combined loads // *Acta Mechanica*. – V. 217, iss. 1-2. – 2011. – P. 119-134.
6. Khomsuridze N.G. The thermoelastic equilibrium of the conical bodies // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. – 2003. – V. 67, iss. 3. – P. 124-133 (in Russian).
7. Savchenko V.I. Study of the stress-strain state of truncated elastic cones / V.I. Savchenko, S.G. Shokot'ko, A.A. Uspenskii // *Strength of Materials*. – 1977. – V. 9, iss. 7. – P. 817-821.
8. Popov G.Ya. On the axisymmetrical problems of elasticity for the truncated hollow cone // *Prikladnaya matematika i mekhanika*. – 2005. – V. 69, iss. 3. – P. 458-468 (in Russian).
9. Вайсфельд Н.Д. Осесимметричная смешанная задача теории упругости для полого дважды усеченного конуса / Н.Д. Вайсфельд, А.В. Реут // *Вестник Киевского национального университета*. – 2013. – № 3. – С. 93-97.
10. Новацкий В. Теория упругости. – Москва: Мир, 1975. – 872 с.
11. Попов Г.Я. О новых преобразованиях разрешающих уравнений теории упругости и новых интегральных преобразованиях и об их применении к краевым задачам механики // *Прикл. механика*. – 2003. – № 12. – С. 12-46.
12. Попов Г.Я. Функции и матрицы Грина одномерных краевых задач / Г.Я. Попов, С.А. Абдымапанов, В.В. Ефимов. – Алматы: Изд-во Рауан, 1999. – 113 с.
13. Уфлянд Я.С. Интегральные преобразования в задачах теории упругости. – Ленинград: Изд-во Наука, 1967. – 403 с.
14. Партон В.З. Методы математической теории упругости: Учебное пособие / В.З. Партон, П.И. Перилл. – М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1981. – 688 с.

Мисов К.Д., Вайсфельд Н.Д.

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

УСТАЛЕНІ КРУТИЛЬНІ КОЛИВАННЯ ДВІЧІ ЗРІЗАНОГО ПРУЖНОГО КОНУСА

Анотація

Проблему визначення поля переміщень та напружень пружного двічі зрізаного конуса розглянуто для випадку сталих крутильних коливань. Для розв'язання застосовується інтегральне перетворення Г.Я. Попова по кутовій координаті. Це дозволяє звести вихідну задачу до одновимірної крайової задачі в просторі трансформант, розв'язок якої побудовано в точному вигляді. Отримано дисперсійні рівняння для визначення власних частот. Досліджено залежність власних частот від геометричних параметрів конуса.

Ключові слова: сталі крутильні коливання, двічі зрізаний конус, інтегральне перетворення Г.Я. Попова, точний розв'язок, власна частота.

Mysov K.D., Vaysfeld N.D.

Odesa I.I. Mechnikov National University

STEADY STATE TORSION OF TWICE TRUNCATED ELASTIC CONE

Summary

The problem of determining the displacements and stress fields of an elastic twice truncated cone is considered in case of steady state torsional oscillations. To get the solution, the G.Ya. Popov integral transformation with regard to the angular coordinate is applied. It allows to reduce the original problem to a one-dimensional boundary value problem in the domain of transformations, the solution of which is constructed in an explicit form. Dispersion equations for determining the eigen frequencies are obtained. The dependence of the eigen frequencies on the geometric parameters of the cone is investigated.

Keywords: steady state torsional oscillations, twice truncated cone, G.Ya. Popov integral transformation, exact solution, eigen frequency.