УДК 517.5

ІНТЕРФЕРЕНЦІЯ В ПРОСТОРАХ $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ ПРИ НАБЛИЖЕННІ СУМОВНИХ ФУНКЦІЙ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Сілін Є.С.
Державний вищий навчальний заклад
«Донбаський державний педагогічний університет»

Робота присвячена дослідженню питань наближення сум вигляду $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x+\delta_i)$ за допомогою операторів Валле Пуссена, які належать до множини цілих функцій експоненціального типу. Функції f є локально інтегровними на дійсній осі. Розглянуто випадок, коли класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ складаються з функцій, що не можуть спадати до нуля повільніше деякої від'ємної степені. Одержано оцінки зверху вказаних лінійних комбінацій.

Ключові слова: ψ-похідна, локально інтегровні функції, ряди Фур'є, оператор Валле Пуссена, інтерференція функцій, лінійні комбінації.

Постановка проблеми. Природним апаратом наближення 2π-періодичних функцій є лінійні методи підсумовування рядів Фур'є, серед яких слід виділити такі, що визначаються числовими матрицями (суми Фур'є, Фейєра, Валле Пуссена, Зигмунда, Рогозинського, Стєклова, Рісса, Фавара та ін.) і такі, що визначаються множиною функцій (методи наближення гармонійними та бігармонійними інтегралами Пуассона, інтегралами Вейєрштрасса тощо). Напрямок досліджень, пов'язаних з вивченням апроксимативних властивостей лінійних методів підсумовування рядів Фур'є на різних класах періодичних функцій в різноманітних метриках виник і активно розвивався упродовж всього XX століття завдяки працям А.М. Колмогорова, С.М. Нікольського, Б. Надя, І.П. Натансона, С.Б. Стєчкіна, С.О. Теляковського, О.В. Єфімова, В.К. Дзядика, М.П. Корнєйчука, О.П. Тімана, М.П. Тімана, О.І. Степанця, В.П. Моторного та інших вчених.

Для наближення функцій, заданих на дійсній осі, природним апаратом наближення є цілі функції експоненціального типу. Напрямок, пов'язаний з вивченням наближень цілими функціями виник і одержав свій розвиток в роботах М.Г. Крейна, С.Н. Бернштейна, Н.І. Ахієзера, С.М. Нікольського, О.П. Тімана, М.П. Тімана, П. Бутцера, Дж.Р. Несселя та ін. Ідея побудови теорії наближення функцій, заданих на дійсній осі, яка б охоплювала теорію наближення періодичних функцій, належить С.Н. Бернштейну. Ця ідея виявилась дуже корисною для обох теорій – протягом останніх десятиріч вони успішно розвиваються і взаємно доповнюють одна одну в роботах багатьох математиків.

Незважаючи на значний інтерес з боку багатьох дослідників, задача про дослідження апроксимативних властивостей сум і операторів Валле Пуссена не втратила своєї актуальності і розглядається в даній роботі.

До початку 80-х років найбільш загальними класами функцій, на яких розглядалася низка задач теорії наближення, були класи, що визначалися похідними в сенсі Вейля-Надя. У 1983 році О.І. Степанець запропонував новий підхід до класифікації періодичних функцій, що базувався на понятті (ψ,β)-похідної, внаслідок чого було введено класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$. Це дозволило класифікувати широкий спектр періодичних функцій і дало потужний поштовх новим дослідженням у різних напрямках, зокрема, у вивченні наближень на введених класах різними лінійними методами підсумовування рядів Фур'є.

У 1988 році О.І. Степанець ввів класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ локально сумовних функцій, визначених на всій дійсній осі, які в загальному випадку не є періодичними і містять, як частинний випадок, класи $L^{\psi}_{\beta}\mathfrak{N}$ періодичних функцій. За відносно невеликий проміжок часу для класів $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ було отримано розв'язки цілого ряду екстремальних задач теорії наближення функцій, зокрема, було знайдено асимптотичні формули верхніх меж відхилень на цих класах операторів Фур'є, Фейєра, Валле Пуссена, Зигмунда, Рогозинського, Стєклова, Рісса, Фавара, Вейерштрасса та ін. В той же час актуальними залишаються питання про дослідження на класах $\hat{L}^{\bar{\psi}}\mathfrak{N}$ задач наближення за допомогою операторів Валле Пуссена, які до того часу були відомі для класів (ψ,β)-диференційовних періодичних функцій на більш широкі класи функцій, що задані на всій дійсній осі.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. С.Н. Бернштейн [1, с. 446-467] встановив, що для цілих функцій скінченної степені лінійні комбінації $f(x+x_0)\pm f(x-x_0)$ можуть бути обмеженими на дійсній осі для деяких необмежених функцій $f(x)$:

$$\frac{1}{2}\left|f(x-\frac{\pi}{2\sigma})+f(x+\frac{\pi}{2\sigma})\right|\le\frac{4}{\pi}\sup_k\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right| \qquad (k\in\mathbb{Z}).$$

Подібне явище було названо ним інтерференцією.

В подальшому ці питання досліджували О.П. Тіман [2; 3, с. 201-208], R.P. Boas [4], В.В. Дрозд [5] та інші. Зокрема, А.Ф. Тіман встановив нерівність

$$\frac{1}{2}\left|f(x-\frac{m\pi}{2\sigma})+f(x+\frac{m\pi}{2\sigma})\right|\le\frac{4M}{\pi m}+\frac{8mM}{\pi}\sum_{i=1}^{\frac{m-1}{2}}\frac{1}{m^2-4i^2},$$

де m – довільне непарне число, $M=\sup_k\left|f\left(\frac{k\pi}{\sigma}\right)\right|$, $k\in\mathbb{Z}$.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. Нехай $\hat{L}_p$, $1\le p<\infty$, – простір сумовних у p-му степені функцій f, які визначені на дійсній осі й мають скінченну норму

$$\|f\|_{\hat{p}}=\sup_{a\in\mathbb{R}}\left(\int_a^{a+2\pi}|f(t)|^p dt\right)^{1/p},$$

$$p\in[1,\infty),\ \|f\|_{\hat{\infty}}\overset{df}{=}\operatorname{ess\,sup}_{t\in\mathbb{R}}|f(t)|.$$

Нехай $\mathfrak{A}$ – множина неперервних при $t\ge0$ функцій $\psi(t)$, які задовольняють наступні умови: 1) $\psi(t)\ge0$, $\psi(0)=0$, $\psi(t)$ зростає на $[0,1)$; 2) $\psi(t)$ опукла донизу на $[1,\infty)$ і $\lim_{t\to\infty}\psi(t)=0$; 3) похідна $\psi'(t)=\psi'(t+0)$ має обмежену варіацію на множині $[0,\infty)$. Далі, через $\mathfrak{A}'$ позначимо підмножину функцій $\psi(t)\in\mathfrak{A}$, для яких

$$\int_1^{\infty}\frac{\psi(t)}{t}\,dt<\infty.$$

Множина $\mathfrak{M}$ складається з функцій $\psi(t)$, що задовольняють лише умову 2).

Нехай далі для кожної пари функцій $\psi_1,\psi_2\in\mathfrak{A}$ $\bar{\psi}$ – функція вигляду $\bar{\psi}\overset{df}{=}\psi_{1+}+i\psi_{2-}$, де ψ_{1+} та ψ_{2-} – парне і непарне продовження функцій ψ_1, ψ_2 відповідно.

О.І. Степанець [6] ввів поняття $\bar{\psi}$-похідної і визначив класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ наступним чином. Якщо функцію $f\in\hat{L}_p$ майже для всіх дійсних x можна подати у вигляді наступної рівності:

$$f(x)=A+\int_{\mathbb{R}}\varphi(x+t)\hat{\hat{\bar{\psi}}}(t)\,dt\overset{df}{=}A+\varphi*\hat{\hat{\bar{\psi}}}(x), \qquad (1)$$

де $A=const$, інтеграл розуміється як границя інтегралів по симетричних проміжках, що розширюються: $\int_R=\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{a}$, $\varphi\in\hat{L}_p$, $\hat{\hat{\bar{\psi}}}(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}}\bar{\psi}(x)e^{-ixt}dx$, то функцію $\varphi(\cdot)$ в зображенні (1) називають $\bar{\psi}$-похідною функції $f(\cdot)$ і позначають як $f^{\bar{\psi}}(\cdot)$.

Якщо $f\in\hat{L}_p$ і, крім того, $f^{\bar{\psi}}\in\hat{L}_p$, то кажуть, що функція f належить класу $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$.

Зауважимо, що за умов $\psi_1\in\mathfrak{A}$, $\psi_2\in\mathfrak{A}'$ перетворення $\hat{\hat{\bar{\psi}}}(t)$ сумовне на дійсній осі.

Наслідуючи О.І. Степанця (див., наприклад, [7, с. 160]), кожній функції $\psi\in\mathfrak{M}$ поставимо у відповідність характеристики

$$\eta(t)=\eta(\psi,t)=\psi^{-1}\left(\frac{\psi(t)}{2}\right),$$
$$\mu(\psi)=\mu(\psi,t)=\frac{t}{\eta(t)-t},\quad t\ge1,$$

де ψ^{-1} – обернена до ψ функція і покладемо

$$\mathfrak{M}_C=\{\psi\in\mathfrak{M}:0<K_1\le\mu(t)\le K_2\},$$

$$\mathfrak{M}^+_{\infty}=\{\psi\in\mathfrak{M}:\mu(t)\uparrow\infty\},\ \overline{F}=\{\psi\in\mathfrak{A}:\eta'(t)\le K_3\},$$

$$\mathfrak{A}_C=\mathfrak{M}_C\bigcap\mathfrak{A},\ \mathfrak{A}^+_{\infty}=\mathfrak{M}^+_{\infty}\bigcap\mathfrak{A},$$

де K_j, $j=\overline{1,3}$ – деякі сталі, які, можливо, залежать від функції $\psi(t)$. Відмітимо, що $\mathfrak{A}_C\cup\mathfrak{A}^+_{\infty}\subset\overline{F}\subset\mathfrak{A}'\subset\mathfrak{A}$.

Функції $f\in\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ поставимо у відповідність оператор Валле Пуссена $V_{\sigma,c}(f;x)$ (аналоги відомих сум Валле Пуссена)

$$V_{\sigma,c}(f;x)=A+\int_{\mathbb{R}}f^{\bar{\psi}}(x+t)\cdot\widehat{\lambda_{\sigma,c}\bar{\psi}}(t)\,dt,$$

де

$$\lambda_{\sigma,c}(t)=\begin{cases}1, & 0\le|t|\le c,\\ \dfrac{\sigma-|t|}{\sigma-c}, & c\le|t|\le\sigma,\\ 0, & \sigma\le|t|,\quad \sigma>c\ge1.\end{cases}$$

Оператори $V_{\sigma,c}(f;x)$ належать до множини ε_{σ} цілих функцій експоненціального типу $\le\sigma$.

Предметом нашого дослідження будуть суми

$$\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i\left(f(x+\delta_i)-V_{\sigma,\sigma-h}(f;x+\delta_i)\right),$$

де $\alpha_i = \alpha_i(\sigma)$, $\delta_i = \delta_i(\sigma)$ – величини, які рівномірно обмежені щодо σ. У випадку $h = \sigma - 1$,

$$\lambda^*_{\sigma,1}(t) = \begin{cases} 1, & 0 \le t \le \sigma - 1, \\ 1 - \dfrac{(t-\sigma+1)\psi(\sigma)}{\psi(t)}, & \sigma - 1 \le t \le \sigma, \\ 0, & t \ge \sigma \end{cases}$$

та $\psi_1(\sigma) = \psi(\sigma)\cos\frac{\beta\pi}{2}$, $\psi_2(\sigma) = \psi(\sigma)\sin\frac{\beta\pi}{2}$, $\beta \in \mathbb{R}$ (наближення операторами Фур'є) у роботі В.В. Дрозда [5] суми $\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,\sigma-1,m}(f;x)$ розглянуто для випадку класів неперервних функцій, визначених за допомогою (ψ,β)-похідної.

Постановка завдання. Метою роботи є знаходження оцінок зверху для величин $\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)$ на класах локально інтегровних функцій $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. Об'єктом дослідження є класи $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$. Предметом дослідження є апроксимативні характеристики операторів Валле Пуссена на згаданих класах.

Виклад основного матеріалу дослідження. Введемо у розгляд такі множини:

$$W^2_\sigma = \left\{\varphi \in \varepsilon_\sigma : \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\varphi^2(t)|}{(1+|t|)^2}\,dt < \infty\right\},$$

$$E_\sigma(f) = \inf_{g \in W^2_\sigma} \| f(x) - g(x) \|_{\hat{p}}.$$

Надалі вважатимемо, що $c = \sigma - h$, $h = h(\sigma)$. Основний результат нашої роботи міститься в такому твердженні.

Теорема. *Нехай $\psi_i \in \overline{F}$, $i = 1,2$ та існують константи K_1 і K_2 для яких виконується умова*

$$0 < K_1 \le \frac{\eta(\psi_1;\sigma) - \sigma}{\eta(\psi_2;\sigma) - \sigma} \le K_2 < \infty, \quad \sigma \ge 1; \qquad (2)$$

числа α_i, δ_i – рівномірно обмежені щодо σ. Тоді, якщо $(\eta(\psi;\sigma) - \sigma)^{-1} > \frac{\pi}{h}$, то $\forall f \in \hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ при $\sigma \to \infty$ має місце нерівність

$$\|\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)\|_{\hat{p}} \le E_{\sigma-h}(f^{\bar{\psi}})\left(\frac{4|\bar{\psi}(\sigma)|}{\pi^2} R_m \left|\ln \frac{\eta(\sigma)-\sigma}{h}\right|\right) + O(1)|\bar{\psi}(\sigma-h)|, \qquad (3)$$

де $R_m = \sqrt{A_m^2 + B_m^2}$, $A_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \cos(\sigma\delta_i + \gamma)$, $\gamma = \frac{\psi_2(\sigma)}{\psi_1(\sigma)}$, $B_m = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sin(\sigma\delta_i + \gamma)$, $\eta(\sigma)$ є $\eta(\psi_1;\sigma)$ або $\eta(\psi_2;\sigma)$, $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.

Якщо ж $(\eta(\psi;\sigma) - \sigma)^{-1} < \frac{\pi}{h}$, то нерівність (3) має місце за умови, що $\delta_i = O((\eta(\psi;\sigma) - \sigma)^{-1})$, $i = \overline{1,m}$.

Висновки з даного дослідження і перспективи подальшого розвитку в цьому напрямку. Дослідимо можливість виконання рівності $R_m = 0$. Нехай спочатку $m = 2$. Тоді

$$R_m = R_m(\alpha,\delta) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 \cos(\sigma\delta_1 + \gamma) + \alpha_2 \cos(\sigma\delta_2 + \gamma) = 0, \\ \alpha_1 \sin(\sigma\delta_1 + \gamma) + \alpha_2 \sin(\sigma\delta_2 + \gamma) = 0, \end{cases}$$

що еквівалентно системі

$$\begin{cases} \delta_1 + \delta_2 = (\pi k)/\sigma, \\ \alpha_1 = (-1)^{k+1}\alpha_2, \end{cases} \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (4)$$

Таким чином, у випадку $m = 2$ справджується нерівність

$$\| f(x) + (-1)^{k+1} f(x + \pi k/\sigma) - V_{\sigma,\sigma-h} \cdot \left(f(x) + (-1)^{k+1} f(x + \pi k/\sigma)\right)\|_{\hat{p}} \le K|\bar{\psi}(\sigma - h)|.$$

Зауваження. Якщо $\psi_j \in \overline{F} \setminus (\mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}^+_\infty)$, $j = 1,2$, то (4) не має місця, оскільки в цьому випадку не виконується умова $\frac{\pi k}{\sigma} = o\left(\frac{1}{(\eta(\psi;\sigma)-\sigma)}\right)$.

Враховуючи це, для випадку $m \ge 3$, одержимо наступне твердження.

Наслідок. *Нехай $\psi_j \in \mathfrak{A}_C \cup \mathfrak{A}^+_\infty$, $j = 1,2$ і такі що, виконана умова (2). Тоді при $\sigma > h \ge 1$ й $\sigma \to \infty$, $m = 2$ та числах α_1, α_2 й δ_1, δ_2 обраних згідно до співвідношення (4)*

$$\|\Sigma^{\alpha,\delta}_{\sigma,h,m}(f;x)\|_{\hat{p}} \le O(1)|\bar{\psi}(\sigma - h)|, \qquad (5)$$

де $O(1)$ – величина, рівномірно обмежена щодо σ, h.

Якщо при $m \ge 3$ координати α_i довільного вектора $(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ задовольняють одній з умов:

1) $\sum_{i=1}^{m}(-1)^{k_i}\alpha_i = 0$, якщо сума $\delta_s + \delta_l = \frac{\pi n}{\sigma}$, $n \in \mathbb{N}$, для всіх $l,s \le m$, при цьому k_i – ціле число, яке визначається з рівності $\delta_i = \delta_0 + \pi k_i/\sigma$, де δ_0 – деяке фіксоване число;

2) $\alpha_l = \sin^{-1}(\delta_s + \delta_l)\sigma \sum_{i \ne l,s} \alpha_i \sin(\delta_i + \delta_s)\sigma$,

$\alpha_s = \sin^{-1}(\delta_s + \delta_l)\sigma \sum_{i \ne l,s} \alpha_i \sin(\delta_i + \delta_l)\sigma$, якщо при деяких l та s $\delta_s + \delta_l \ne \pi n/\sigma$, $n \in \mathbb{N}$, то при $\sigma \to \infty$ має місце оцінка (5).

Список літератури:

1. Бернштейн С.Н. Собрание сочинений: В 3 т. – М.: Изд-во АН СССР, 1954. – Т. 2. – 626 с.
2. Тиман А.Ф. О явлении интерференции в поведении целых функций конечной степени // Докл. АН СССР. – 1953. – 89. – С. 17-21.
3. Тиман А.Ф. Теория приближения функций действительного переменного. – М.: Физматгиз, 1960. – 624 с.
4. R.P. Boas, Jr., Interference phenomena for entire functions // Michigan Math J. – 1955. – 3. – P. 17-34.
5. Дрозд В.В. Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье в среднем // Одновременное приближение функций и их производных операторами Фурье. – Киев, 1989. – С. 46-58. – (Препр. / АН Украины. Ин-т математики; 89.17).
6. Stepanets A.I., Wang Kunyang, Zhang Xirong. Approximation of locally integrable function on the real line // Укр. мат. журн. – 1999. – № 11. – С. 1549-1561.
7. Степанец А.И. Методы теории приближений: В 2 ч. Ч. I. – Київ, 2002. – 427 с. – (Праці Ін-ту математики НАН України; Т. 40).

Силин Е.С.
Государственное высшее учебное заведение
«Донбасский государственный педагогический университет»

ИНТЕРФЕРЕНЦИЯ В ПРОСТРАНСТВАХ $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ В СЛУЧАЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ ОПЕРАТОРАМИ ВАЛЛЕ ПУССЕНА

Аннотация
Работа посвящена исследованию вопросов приближения сумм вида $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x+\delta_i)$ с помощью операторов Валле Пуссена, принадлежащих множеству целых функций экспоненциального типа. Функции f являются локально интегрируемыми на действительной оси. Рассмотрен случай, когда классы $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ состоят из функций, которые не могут убывать к нулю медленнее некоторой отрицательной степени. Найдено оценку сверху указанных линейных комбинаций.
Ключевые слова: ψ-производная, локально интегрируемые функции, оператор Валле Пуссена, ряди Фурmt, интерференция функций, линейные комбинации.

Silin E.S.
State Higher Educational Institution
"Donbass State Teacher's Training University"

INTERFERENCE IN SPACES $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ IN THE CASE OF APPROXIMATION OF THE SUMMABLE FUNCTIONS BY VALLE POUSSIN'S OPERATORS

Summary
The article presents the problems of of approximation of the sums $\sum_{i=1}^{m}\alpha_i f(x+\delta_i)$ by Valle Poussin's operator. These operators belong to the set of entire functions of exponential type. Functions f are locally integrable on the real axis. The case where classes $\hat{L}^{\bar{\psi}}\hat{L}_p$ consist of functions which cannot decrease to zero more slowly than some negative degree is considered. Found upper bound for the indicated linear combinations.
Keywords: ψ-derivatives, locally integrable functions, Valle Poussin's operator, interference of functions, linear combinations.

ФІЗИКО-МАТЕМАТИЧНІ НАУКИ