

УДК 519.6

## ПЛОСКОЕ ДВИЖЕНИЕ МАЯТНИКА С ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТЬЮ

Рачинская А.Л., Купчак А.И.

Одесский национальный университет имени И.И. Мечникова

Исследовано плоское движение системы, состоящей из маятника с полостью целиком заполненной жидкостью большой вязкости. Построено численное решение закона движения системы относительно неподвижной точки подвеса маятника. Проведен анализ влияния начальных параметров задачи на характер движения системы. Численно исследовано влияние момента сил вязкой жидкости в полости. Решение получено в безразмерном виде, что позволяет в дальнейшем полученные результаты использовать для компьютерного моделирования движения маятника с полостью.

**Ключевые слова:** маятник, полость, вязкая жидкость, закон движения, полная энергия.

**Постановка проблемы.** Задачи динамики тел с полостями, содержащими жидкость, относятся к классическим задачам механики. Интерес к таким задачам снова возник в наше время в связи с развитием компьютерного моделирования механических процессов. Используя компьютерное моделирование можно заменить дорогостоящий эксперимент численным исследованием с возможностью трехмерной компьютерной визуализации. Для проведения такого исследования необходимо построение математических моделей, которые будут соответствовать целям поставленной задачи.

Численное исследование и компьютерная визуализация механических процессов подразумевает: наличие функциональных возможностей численного расчета, требуемой точности, согласно входящим параметрам задачи; встроенного аппарата анализа полученных результатов; получение набора данных, описывающего механический процесс, с помощью которого происходит непосредственно сам процесс визуализации.

**Анализ последних исследований и публикаций.** Задачи динамики тел с полостями исследовались на протяжении многих лет в связи

с развитием космической техники. Строились различные математические модели тел с полостями, заполненными идеальной [1] или вязкой жидкостью [2]. Проводились исследования для различных видов движения системы – вращение, управляемое движение, колебания на орбите и т.д. Получен целый ряд аналитических решений, выраженных через специальные функции. Проведен ряд исследований движения систем с полостями с использованием асимптотических методов [3–4], методов усреднения [3–4] и компьютерного моделирования характеристик движения системы [5].

**Выделение нерешенных ранее частей общей проблемы.** Компьютерная визуализация механического процесса подразумевает обязательного наличия набора данных для однозначного определения положения всех составляющих системы. Использование аналитических решений, построенных через специальные функции [2], вызывает сложности численного расчета и существенно увеличивает его ресурсные затраты. Все это требует построение других математических моделей механического процесса, которые должны быть согласованы с результатами, имеющимися в литературе.

**Цель статьи.** Построение математической модели плоского движения тела с полостью, заполненной несжимаемой вязкой жидкостью, которая позволит получить результаты исследования в виде набора данных для дальнейшего компьютерного моделирования механического процесса с использованием трехмерной графики.

**Изложение основного материала.** Рассмотрим плоское движение тела с полостью, полностью заполненной несжимаемой вязкой жидкостью плотности  $\rho$  и кинематической вязкости  $\nu$ , вокруг неподвижной оси. Введем две правые прямоугольные декартовы системы координат  $Ox_1x_2x_3$  и  $O_1y_1y_2y_3$ . В качестве точки  $O_1$  удобно брать неподвижную точку системы. Пусть ось  $O_1y_3$  – ось неподвижной системы координат  $O_1y_1y_2y_3$ , вокруг которой вращается тело. Систему  $Ox_1x_2x_3$ , жестко связанную с телом, выберем так, чтобы ось  $Ox_3$  была параллельна оси вращения  $O_1y_3$  и точка  $O$  совпадала с центром инерции системы.

Уравнения движения тела с полостью запишем в виде [2]

$$\mathbf{J} \cdot \boldsymbol{\mu} + \dot{\mathbf{E}} \times (\mathbf{J} \cdot \dot{\mathbf{E}}) = \mathbf{M} + \mathbf{m}, \quad (1)$$

где  $\mathbf{J}$  – тензор инерции системы относительно точки  $O_1$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  – угловая скорость тела в системе  $O_1y_1y_2y_3$ ,  $\boldsymbol{\mu}$  – угловое ускорение тела в системе  $O_1y_1y_2y_3$ ,  $\mathbf{M}$  – главный момент относительно точ-

ки  $O_1$  всех внешних сил, действующих на тело с жидкостью в системе  $O_1y_1y_2y_3$ ,  $\mathbf{m}$  – малый возмущающий момент, обусловленный наличием в теле полости с жидкостью большой вязкости.

Пусть система находится в однородном поле тяжести, т.е. представляет собой физический маятник с вязкой жидкостью, причем  $\varphi$  – угол отклонения маятника от нижнего положения равновесия, тогда  $\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2}$  и  $\omega = \frac{d\varphi}{dt}$ .

Проекция главного момента внешних сил определяется равенством

$$M = -Gl_0 \sin \varphi, \quad (2)$$

где  $G$  – вес системы;  $l_0$  – расстояние от оси подвеса до центра инерции системы.

Проекция момента сил вязкой жидкости определяется равенством

$$m = \frac{\rho P}{\nu J} \left( \frac{\partial M}{\partial \omega} \frac{M}{J} + \frac{\partial M}{\partial \varphi} \omega \right), \quad (3)$$

где  $J$  – момент инерции тела с жидкостью вокруг оси вращения  $O_1y_3$ ,  $P = P_{33} > 0$  – компонента тензора  $\mathbf{P}$ , в системе координат  $Ox_1x_2x_3$ . Тензор  $\mathbf{P}$  зависит лишь от формы полости и характеризует диссипативный момент вязкой жидкости в полости.

Уравнения движения тела (1) примет вид

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{Gl_0}{J} \sin \varphi = -\frac{d\varphi}{dt} \frac{\rho P Gl_0}{\nu J^2} \cos \varphi. \quad (4)$$

Для обезразмеривания уравнения движения (4) введем характерный масштаб времени

$$T = \sqrt{\frac{l_0}{g}}, \quad (5)$$

где  $g$  – ускорение свободного падения.

Уравнение (4) примет вид:

$$\ddot{\varphi} + \sin \varphi = -\alpha \cos \varphi \dot{\varphi}, \quad (6)$$

здесь точками обозначены производные по безразмерному времени  $\tau = t/T$ , безразмерный коэффициент  $\alpha$  задается соотношением характерных параметров задачи

$$\alpha = \frac{\rho P Gl_0 T}{\nu J^2}. \quad (7)$$

Проведем численное исследование в случае невозмущенного движения маятника, т.е. движение системы при условии затвердения жидкости (при  $\nu = \infty$  и  $\alpha = 0$ ). На рис. 1 представлен график изменения угла отклонения маятника без начальной угловой скорости: кривая 1 соответ-

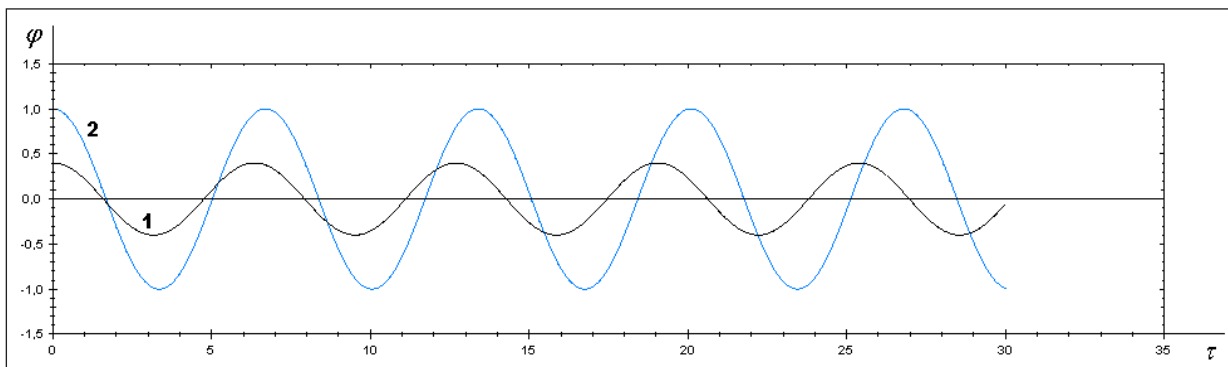


Рис. 1.

ствує початковому куту відхилення  $\varphi_0 = 0.4 \text{ рад}$ , а крива 2 –  $\varphi_0 = 1.0 \text{ рад}$ . Из рисунка видно, що збільшення початкового кута відхилення маятника призводить до збільшення амплітуди коливання і періода коливання. Для кривої 1 безрозмірний період коливання становить 6.35, а для кривої 2 – 6.79. Во всіх розрахункових випадках коливання відбуваються навколо положення нижнього рівноважя маятника, що відповідає  $\varphi = 0 \text{ рад}$ .

На рис. 2 представлено графік зміни кута відхилення маятника без початкової кулової швидкості: крива 1 відповідає початковому куту відхилення  $\varphi_0 = 3.4 \text{ рад}$ , а крива 2 –  $\varphi_0 = 4.3 \text{ рад}$ . Из рисунка видно, що збільшення початкового кута відхилення маятника призводить до зменшення амплітуди коливання і періода коливання. Для кривої 1 безрозмірний період коливання становить 20.68, амплітуда дорівнює 2.88, а для кривої 2 – період 12.46, а амплітуда 1.98. При цьому видно, що коливання відбуваються відносно значення кута  $\varphi \neq 0 \text{ рад}$ . Отримані чисельні результати відповідають реальному фізичному процесу, для якого однозначно центром коливань є нижнє положення рівноважя маятника. Якщо значення початкового кута відхилення  $\pi < \varphi_0 < 2\pi$ , то це призводить до коливання системи відносно значення кута  $\varphi = 2\pi \text{ рад}$ , а амплітуда визначається величиною  $2\pi - \varphi_0$ , що призводить до зменшення амплітуди коливання при збільшенні значення  $\varphi_0$ .

Вплив початкової кулової швидкості маятника на характер руху системи представлено на рис. 3. Розрахункові криві рис. 3 чисельно отримані при нульовому кутовому відхиленні маятника: крива 1 відповідає початковій безрозмірній куловій швидкості  $\omega_0 = 0.2$ , крива 2 –  $\omega_0 = 1.0$ , крива 3 –  $\omega_0 = 1.5$ . Аналіз руху

показує, що амплітуда коливань зростає з збільшенням  $\omega_0$  від величини 0.2 до 1.7, безрозмірний період коливань збільшується від 9.45 до 11.46.

Повна енергія незворушеної системи

$$H(\varphi) = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 + \Pi(\varphi),$$

де  $\Pi(\varphi)$  – потенціальна енергія. Вибіримо довільну постійну в енергії так, щоб  $\Pi(\pi) = 0$  в верхньому положенні рівноважя маятника. При русі системи в однорідному полі тяжкості

$$H = \frac{1}{2} I \dot{\varphi}^2 - (1 + \cos \varphi), \quad (8)$$

де безрозмірна енергія  $H = H(\varphi)/Gl_0$ ,  $I = J/Gl_0 T$ .

Проведений чисельний експеримент дозволяє зробити висновок, що незворушена система виконує коливання при  $0 < H < -2$ , рівність  $H = -2$  відповідає нижньому положенню рівноважя [1]. При виконанні нерівності  $H > 0$  маятник виконує вращальні рухи (рис. 4 крива 4), а  $H = 0$  відповідає аперіодическому русі маятника (рис. 4 криві 1, 2, 3).

Крива 4 рис. 4 отримана для  $\varphi_0 = 2.7 \text{ рад}$  і  $\omega_0 = 0.5$ , що відповідає  $H = 0.029$ .

Незворушена система є консервативною, тому можна отримати співвідношення початкових параметрів задачі відповідних аперіодическому русі маятника

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2(1 + \cos \varphi_0)}{I}}. \quad (9)$$

Розрахункові випадки 1, 2, 3 рисунка 4 відповідають початковим значенням параметра  $\varphi_0 = 0, 0.4, 2.7$  відповідно.

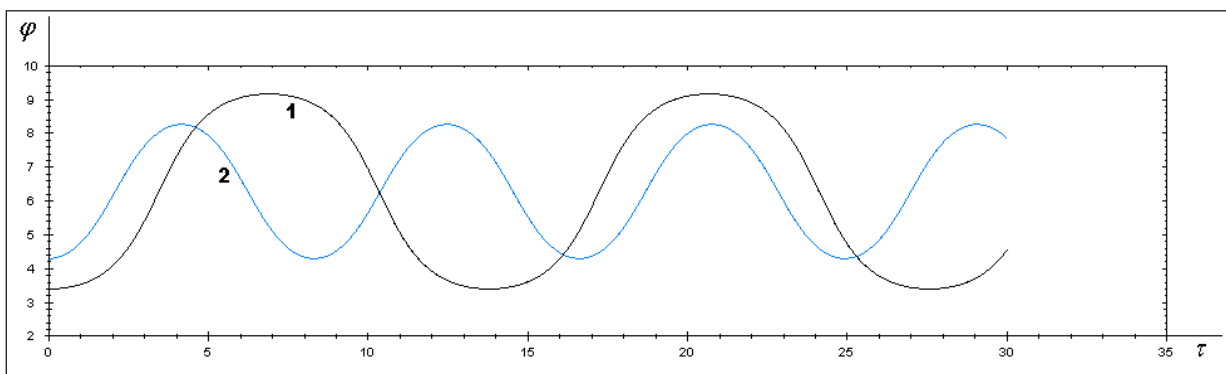


Рис. 2.

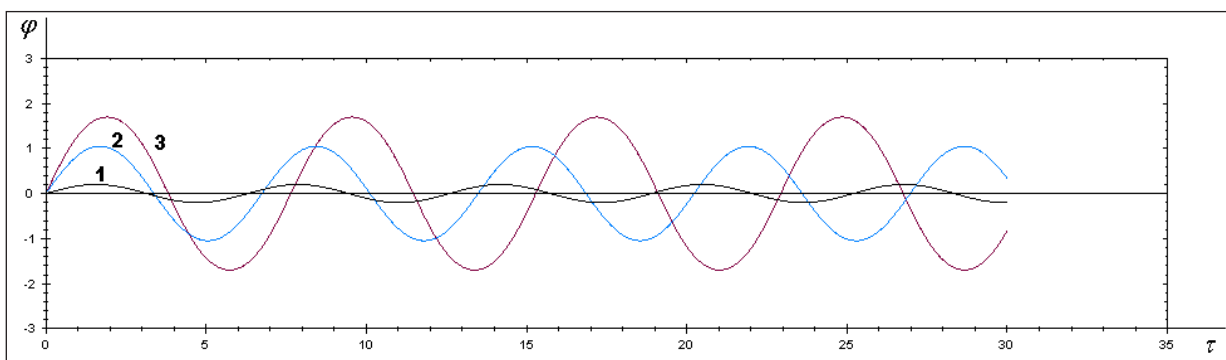


Рис. 3.

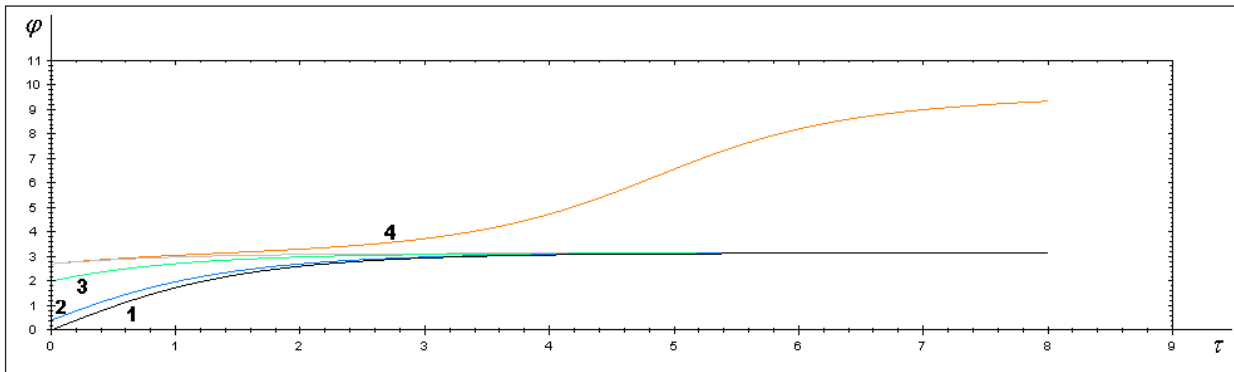


Рис. 4.

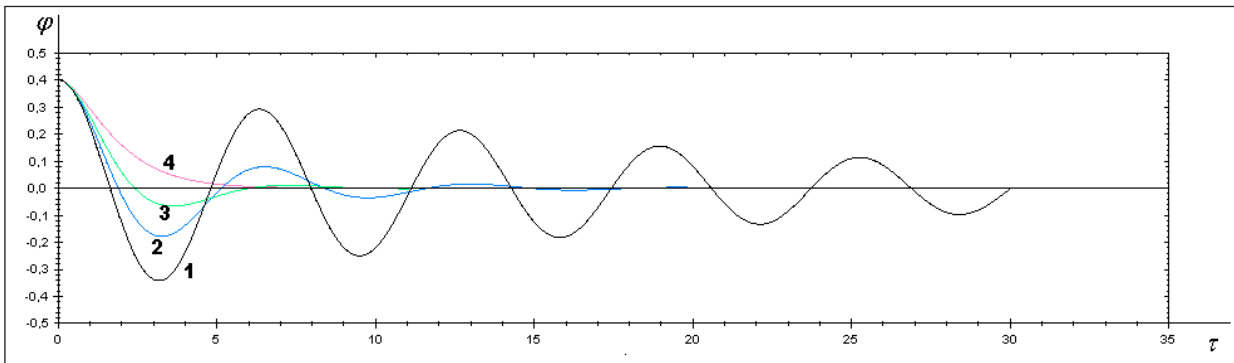


Рис. 5.

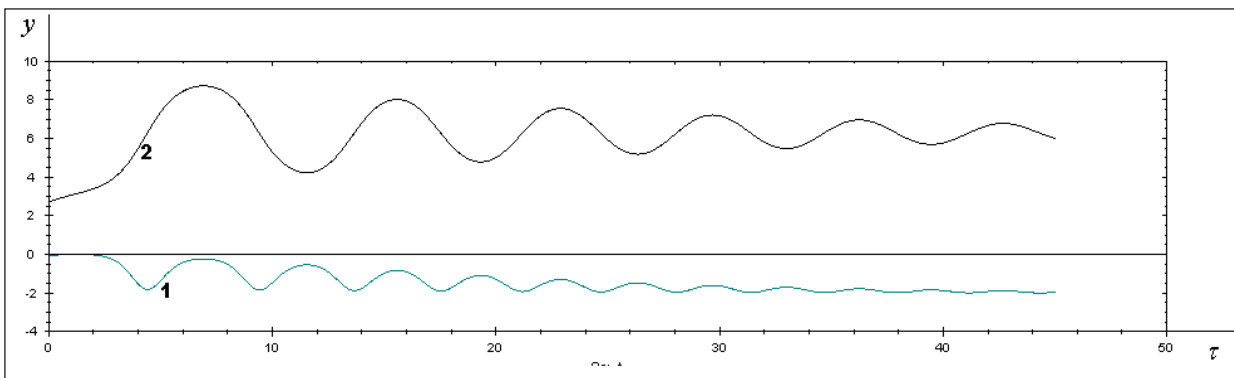


Рис. 6.

Численное исследование уравнения движения маятника с полостью (6) проводилось при различных значениях безразмерного коэффициента (7). Результаты численного интегрирования при  $\omega_0 = 0$  и  $\varphi_0 = 0.4 \text{ rad}$  представлены на рис. 5: кривая 1 соответствует значению  $\alpha = 0.1$ , кривая 2 –  $\alpha = 0.5$ , кривая 3 –  $\alpha = 1$ , кривая 4 –  $\alpha = 2$ . Видно, что наличие возмущающего момента, который является диссипативным приводит, к затуханию колебаний маятника. При этом увеличение безразмерного коэффициента возмущающего момента приводит к более быстрому затуханию. Необходимо отметить, что во всех расчетных случаях величина энергии системы  $H < 0$  и стремится к значению  $-2$ , которое соответствует нижнему положению равновесия.

Характер движения системы существенно зависит и от начальных условий задачи. На рисунке 6 представлен расчетный случай для  $\omega_0 = 0.5$  и  $\varphi_0 = 2.7 \text{ rad}$  при  $\alpha = 0.1$ . Кривая 2 ( $y = \varphi$ ) показывает закон изменения угла отклонения маятника от нижнего положения равновесия,

а кривая 1 ( $y = H$ ) – закон изменения полной энергии системы. Кривая 1 показывает, что пока энергия  $H > 0$  тело совершает вращательное движение, проходя положение нижнего равновесия ( $\varphi = 2\pi \text{ rad}$ ), при этом энергия системы убывает и система меняет характер движения на периодическое затухающее колебание.

Проведенное численное исследование показывает, что при любых значениях параметров задачи маятник с вязкой жидкостью останавливается в положении равновесия с течением времени, а энергия системы стремится к значению  $-2$ .

**Выводы и предложения.** Построенная математическая модель позволяет в безразмерном виде по входящим параметрам задачи определить закон движения системы в табличном виде с заданной точностью. Результаты данной модели совпадают с результатами исследований, имеющимися в литературе [2], что позволяет их в дальнейшем использовать для компьютерного моделирования движения маятника с полостью с помощью трехмерной графики.

**Список литературы:**

1. Жуковский Н.Е. О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородною каплею жидкостью / Н.Е. Жуковский // Избранные сочинения. Т. I. – М. – Л.: Гостехиздат, 1948. – С. 31–152.
2. Черноусько Ф.Л. Движение твердого тела с полостями, содержащими вязкую жидкость / Ф.Л. Черноусько // М.: Изд-во ВЦ АН СССР, 1968. – 230 с.
3. Акуленко Л.Д. Вращения спутника с полостью, заполненной вязкой жидкостью под действием момента сил светового давления / Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко, А.Л. Рачинская // Механика твердого тела. – 2008. – Вып. 38. – С. 95–110.
4. Черноусько Ф.Л. Эволюция движений твердого тела относительно центра масс / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Д.Д. Лещенко // М. – Ижевск: Ижевский институт компьютерных исследований, 2015. – 308 с.
5. Рачинская А.Л. Движение твердого тела с полостью, заполненной вязкой жидкостью / А.Л. Рачинская // Космические исследования. – 2015. – Т. 53. – № 6. – С. 516–520.

**Рачинська А.Л., Купчак О.І.**

Одеський національний університет імені І.І. Мечникова

### **ПЛОСКИЙ РУХ МАЯТНИКА З В'ЯЗКОЮ РІДИНОЮ**

**Анотація**

Досліджено плоский рух системи, яка складається з маятника з порожниною, що цілком заповнена рідиною великої в'язкості. Побудовано чисельний розв'язок закону руху системи відносно нерухої точки підвісу маятника. Проведено аналіз впливу початкових параметрів задачі на характер руху системи. Чисельно досліджено вплив моменту сил в'язкої рідини в порожнині. Розв'язок отримано у безрозмірному вигляді, що дозволяє у подальшому отриманні результати використовувати для комп'ютерного моделювання руху маятника з порожниною.

**Ключові слова:** маятник, порожнина, в'язка рідина, закон руху, повна енергія.

**Rachinskaya A.L., Kupchak O.I.**

Odessa I.I. Mechnikov National University

### **PLANAR MOTION OF A PENDULUM WITH A VISCOUS FLUID**

**Summary**

A planar motion of a system consisting of a pendulum with a cavity entirely filled with a high-viscosity liquid has been studied. A numerical solution of the system's law of motion regarding the fixed point of suspension of the pendulum has been constructed. The influence of the initial parameters of the problem on the nature of the motion of the system has been analyzed. The influence of the moment of the forces of a viscous fluid in the cavity has been numerically investigated. The solution has been obtained in a dimensionless form, which allows using the obtained results later for computer simulations of the pendulum motion with a cavity.

**Keywords:** pendulum, cavity, viscous fluid, motion law, total energy.