

УДК 622.44.45

ПРИКЛАДНОЙ МЕТОД РАСЧЁТА УПЛОТНИТЕЛЬНОГО ЭЛЕМЕНТА СКВАЖИННОГО ПАКЕРА

Мамедов В.Т.

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности

Шахназаров М.А.

Азербайджанский государственный научно-исследовательский институт охраны труда и техники безопасности

В статье рассматривается оптимизация уплотнения скважинного пакера. С этой целью использован вариационный метод расчёта – метод Канторовича, основанный на принципе Лагранжа. В работе принята первая попытка исследовать деформации в скважинных уплотнителях (пакерах) при обжатии её на внутренней поверхности ствола эксплуатационной колонны скважины. Расчёт контактной задачи, приведённой и полученной асимптотическим для случая плоской деформации, при обжатии уплотнителя над поверхностью, до настоящего времени проводился лишь в первом приближении. В настоящей работе поставленная задача решена во втором приближении, что повышает точность её решения. Полученные результаты можно использовать при оптимальном проектировании и конструировании уплотнительной техники, а также для скважинного уплотнения.

Ключевые слова: скважинное уплотнение, уплотнительный элемент, вариационный метод, перемещение, напряжения, функционал потенциальной энергии.

Введение. Статическая и динамическая прочность уплотнительного элемента скважинного пакера ещё недостаточно изучена [1; 2; 3].

Постановка задачи. В большинстве опубликованных работ [4], в которых для решения задачи уплотнения несжимаемого материала использованы прямые методы вариационного исчисления. Координатные функции для перемещений выбраны так, что условие несжимаемости выполняется тождественно. При этом, в результате решения задачи определяются поле перемещений и выражающееся через перемещения касательные напряжения. Нормальные напряжения определяются только с точностью до гидростатического напряжения, которое для несжимаемого материала уплотнения не связано непосредственно с деформациями [5; 6]. В данной работе задачу деформирования уплотнения рассматриваем как задачу условного экстремума. Также в работах [2] этот метод использован по первым приближениям. Ошибка при этом достигала до 20%.

Решение задачи. В настоящей работе задача решена во втором приближении, что позволило оценить точность решения. Расчёт проведём методом Канторовича на основе вариационного принципа Лагранжа [2]:

$$\begin{cases} J = \iiint \sqrt{U_1 + S_0 \Delta h} dv + V \\ \delta J = 0 \end{cases} \quad (1)$$

где J – функционал системы;

δJ – вариация функционала;

U_1 – потенциальная энергия деформации;

Δ – относительные изменения объёма при малых деформациях уплотнительного элемента;

V – потенциал внешних сил;

S_0 – функция гидростатического напряжения,

$S_0 = \lambda \Delta$ (где $\lambda = \frac{2\mu G}{1-2\mu}$, G – модуль сдвига, μ – коэффициент Пуассона, λ – постоянная Ламе).

Для уравнения (1) зададим определённый закон распределения контактного давления. Сначала изучим деформацию уплотнительного элемента, т.е. плоскую деформацию полосы, изображённой на рис. 1.

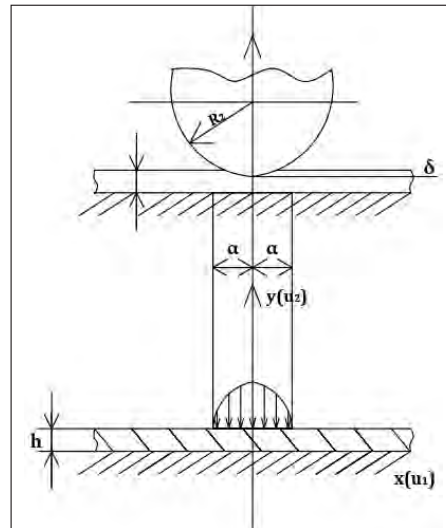


Рис. 1. Расчётная схема

Получим приближённое решение контактной задачи полосы контакта уплотнения поверхностей колонны, в которую вдавливается жёсткий упругий резиновый уплотнительный элемент.

Предполагаем распределение контактного давления следующим уравнением [4]:

$$P(\xi) = P_0 \cos \frac{\pi \xi}{2a'} \quad (2)$$

где P_0 – некоторая постоянная, определяемая в результате выполнения условий контакта полосы на уплотнительный элемент скважинного пакера в трёх точках (в центре и по границам контактной зоны); $|\xi| \leq a'$; $a' = \frac{a}{h}$ – безразмерная полудлина зоны контакта; $\xi = \frac{x}{h}$.

Определим поля перемещений и напряжений в полосе при таком распределении поверхностной нагрузки.

Для полосы, заделанной по нижнему основанию, перемещения u_1 , u_2 (в направлении осей x и y соответственно) должны быть равны нулю при $y=0$. В качестве простейших координатных

функций $\phi_{1i}(y)$, $\phi_{2i}(y)$, обеспечивающих выполнение этих условий, принимаем функции η^i ($i = 1, 2, \dots$), где введено обозначение безразмерной координаты $\eta = \frac{y}{h}$ (h – высота полосы, т.е. высота контакта).

Так как функции должны быть связаны условием $\frac{d\phi_{2i}}{dy} = -\phi_{1i}$, которое при переходе к безразмерным координатам принимает вид:

$$\frac{d}{d\eta} \phi_{2i} = -\phi_{1i}, \tag{3}$$

то можно принять следующую последовательность этих функций:

i	1	2	3	4	...
ϕ_{1i}	η	η^2	η^3	η^4	...
ϕ_{2i}	$-\frac{1}{2}\eta$	$-\frac{1}{3}\eta^3$	$-\frac{1}{4}\eta^4$	$-\frac{1}{5}\eta^5$...

Последовательность функций ϕ_{2i} – это тоже степенные функции, но в соответствии с постоянной задачей, здесь, степени величины η начинаются с нулевого значения.

Итак, для перемещений и гидростатического напряжения применяем выражения [4]

$$\begin{aligned} u_i &= h \sum_{i=1}^{\infty} f_{1i}(\xi) \phi_{1i}(\eta) \\ u_i &= h \sum_{i=1}^{\infty} f_{2i}(\xi) \phi_{2i}(\eta) \\ S_0 &= h \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{1i}(\xi) \phi_{2i}(\eta) \end{aligned} \tag{4}$$

где $\xi = \frac{x}{h}$; $\phi_{1i}(\eta) = \eta^i$; $\phi_{2i}(\eta) = -\frac{1}{2+i} \eta^{i+1}$; $\phi_{2i} = \eta^{i-1}$;
 $f_{1i}(\xi)$, $f_{2i}(\xi)$, $\phi_{1i}(\xi)$ – искомые функции.

При этом функции f_{1i} и f_{2i} связаны дополнительно уравнениями несжимаемости.

$$f_{1i} - f_{2i} = 0 \tag{5}$$

Принятые выражения u_i , u_2 , S_0 подставляем в уравнение (1), которое для случая плоской деформации полосы преобразуем к виду

$$\delta \left\{ h^2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^1 (u_i + S_0 \Delta) d\eta d\xi \right\} + \delta V = 0 \tag{6}$$

где

$$u_i = G \left(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \frac{1}{2} \gamma_{xy}^2 \right); \Delta = \varepsilon_x + \varepsilon_y = 0; \varepsilon_x = \frac{\partial u_i}{\partial x};$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial u_2}{\partial y}; \gamma_{xy} = \frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x}; V = h \int_{-\infty}^{\infty} P(\xi) u_2(\xi, 1) d\xi.$$

Затем интегрируем по η выражения (6) и записываем для полученного вариационного уравнения дифференциальные уравнения Эйлера:

$$\begin{cases} \frac{\partial F}{\partial f_{1i}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'_{1i}} \right) = 0 \\ \frac{\partial F}{\partial f_{2i}} - \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial F}{\partial f'_{2i}} \right) = 0 \end{cases} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \tag{7}$$

и уравнение $\frac{d}{dx} \times f_{1i} = f_{2i}$

которые позволяют определить искомые функции f_{1i} , f_{2i} , ϕ_{1i} .

Именно таким образом проведено решение этой задачи для одного члена ряда (одночленное приближение) в принятых выражениях (4). Получим уточнённое решение задачи для полосы. С этой целью ограничиваемся в выражениях для перемещений и гидростатического напряжения (4) двумя членами в каждом из рядов:

$$\begin{cases} u_i = h [f_{11}(\xi) \phi_{11}(\eta) + f_{12}(\xi) \phi_{12}(\eta)] \\ u_2 = h [f_{21}(\xi) \phi_{21}(\eta) + f_{22}(\xi) \phi_{22}(\eta)] \\ S_0 = \phi_{11}(\xi) \phi_{21}(\eta) \phi_{12}(\xi) \phi_{22}(\eta) \end{cases} \tag{8}$$

где $\phi_{11} = \eta$; $\phi_{12} = \eta^2$; $\phi_{21} = -\frac{1}{2}\eta^2$; $\phi_{22} = -\frac{1}{3}\eta^3$; $\phi_{21} = 1$; $\phi_{22} = \eta$.

Подставив принятые выражения u_1 , u_2 , S_0 в уравнения (6) и выполнив интегрирование по η от нуля до единицы получим:

$$\delta \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi, f_{11}, f_{12}, f_{21}, f_{22}, f'_{11}, f'_{22}, \phi_{11}, \phi_{12}) d\xi = 0 \tag{9}$$

где

$$\begin{aligned} F &= Gh^2 \left\{ \sum_{i=1}^2 [b_{1i} f_{1i}^2 + b_{2i} f_{2i}^2 + b_{3i} f_{1i}'^2 + b_{4i} f_{2i}'^2 + b_{5i} f_{1i}' f_{2i}' + \right. \\ &+ b_{6i} f_{1i}' f_{1i}' f_{2i}' + b_{7i} f_{1i}' f_{2i}' + \frac{1}{G} \phi_{1i} (c_{1i} f_{1i}' + c_{2i} f_{12}' - c_{1i} f_{21}' - c_{2i} f_{22}') + \\ &\left. + \frac{P}{G} c_{3i} f_{2i}' \right\} b_{81} f_{21}' f_{12}' + b_{81} f_{22}' f_{11}' \end{aligned}$$

Компоненты $(b_{1i} \dots b_{8i})$, $(c_{1i} \dots c_{3i})$ при $(i = 1, 2)$ имеют следующие значения:

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{1}{3}; b_2 = \frac{1}{5}; b_{21} = \frac{1}{40}; b_{22} = \frac{1}{120}; b_{31} = \frac{1}{2}; b_{32} = \frac{2}{3}; \\ b_{41} &= \frac{1}{3}; b_{42} = \frac{1}{5}; b_{51} = \frac{1}{2}; b_{52} = \frac{1}{36}; b_{61} = 1; b_{62} = \frac{1}{2}; \\ b_{71} &= -\frac{1}{6}; b_{72} = -\frac{1}{15}; c_{81} = -\frac{1}{4}; b_{82} = -\frac{1}{12}; c_{12} = \frac{1}{3}; c_{21} = \frac{1}{3}; \\ c_{22} &= \frac{1}{4}; c_{31} = -\frac{1}{2}; c_{32} = -\frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Для вариационного уравнения (7) с учётом уравнений связи (6) приведём к следующему виду [1]:

$$\begin{cases} L_1[f_{11}] + L_3[f_{12}] = \frac{c_{31}}{G} P' \\ L_2[f_{12}] + L_3[f_{11}] = \frac{c_{31}}{G} P' \end{cases} \tag{10}$$

где L_1 , L_2 , L_3 – дифференциальные операторы 4-го порядка:

$$L_1[f_{11}] = 2b_{21} f_{11}'' + (2b_{71} - 4b_{41}) f_{11}'' + 2b_{31} f_{11}'';$$

$$L_2[f_{12}] = 2b_{22} f_{12}'' + (2b_{72} - 4b_{42}) f_{12}'' + 2b_{32} f_{12}'';$$

$$L_3[\dots] = b_{52} \frac{d^4[\dots]}{d\xi^4} + (b_{81} + b_{82} - 2b_{62}) \frac{d^2[\dots]}{d\xi^2} + b_{61}[\dots].$$

Таким образом, имеем систему двух линейных дифференциальных уравнений относительно функций f_{11} , f_{12} . Функции f_{21} , f_{22} , ϕ_{11} , ϕ_{12} определяем через f_{11} , f_{12} по формулам, которые являются следствием проведённых преобразований:

$$\begin{cases} f_{21} = f_{11}'; f_{22} = f_{12}' \\ \phi_{11} = G \frac{c_{21} P_2 - c_{22} P_1}{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}} \\ \phi_{12} = G \frac{c_{12} P_1 - c_{11} P_2}{c_{11} c_{22} - c_{12} c_{21}} \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} P_1 = 2b_{21} f_{11}'' + (b_{71} - 2b_{41}) f_{11}' - c_{31} \frac{P}{G} + b_{52} f_{12}'' + (b_{81} - 2b_{62}) f_{12}' \\ P_2 = 2b_{22} f_{12}'' + (b_{72} - 2b_{42}) f_{12}' - c_{32} \frac{P}{G} + b_{52} f_{11}'' + (b_{82} - 2b_{62}) f_{11}' \end{cases} \tag{12}$$

Считая, что контактное давление распределено так же, как и при решении задачи с первым приближением по косинусу (2) представим решение системы (10):

а) в области контакта $0 \leq \xi \leq a^*$, $\left(a^* = \frac{a}{h} \right)$

$$\left\{ \begin{aligned} f_{11}^- &= A_1 Shk_1 \xi + A_2 Shk_2 \xi + A_3 Sh\alpha \xi \cos \beta \xi + \\ &A_4 cha \xi \sin \beta \xi + B_1^{(r)} \sin \frac{\pi \xi}{2a^*}; \\ f_{12}^- &= A_1 \mathcal{H}_1 Shk_1 \xi + A_2 \mathcal{H}_2 Shk_2 \xi + (mA_3 + nA_4) Sh\alpha \xi \cos \beta \xi + \\ &(mA_4 - nA_3) cha \xi \sin \beta \xi + B_1^{(r)} \sin \frac{\pi \xi}{2a^*}. \end{aligned} \right. \quad (13)$$

б) вне области контакта $\xi \geq a^*$

$$\left\{ \begin{aligned} f_{11}^+ &= A_5 e^{-k_1 \xi} + A_6 e^{-k_2 \xi} + A_7 e^{-\alpha \xi} \cos \beta \xi + A_8 e^{-\alpha \xi} \sin \beta \xi \\ f_{12}^+ &= A_5 \mathcal{H}_1 e^{-k_1 \xi} + A_6 \mathcal{H}_2 e^{-k_2 \xi} + \\ &+ (mA_7 - nA_8) e^{-\alpha \xi} + (mA_8 + nA_7) e^{-\alpha \xi} \sin \beta \xi \end{aligned} \right. \quad (14)$$

де $k_1 = 15,963$; $k_2 = 0,7397$; $\alpha = 2,4823$; $\beta = 2,0617$;

$m = -0,8345$; $n = 0,0948$; $\mathcal{H}_1 = -1,2846$; $\mathcal{H}_2 = -0,2463$;

$$B_1 = \frac{P_0}{G} \cdot \frac{\pi c_{31}}{2a^*} \cdot \frac{(N_3 - N_2)}{(N_1 N_2 - N_3^2)}; \quad B_2^{(r)} = \frac{P_0}{G} \cdot \frac{\pi c_{32}}{2a^*} \cdot \frac{(N_1 - N_3)}{(N_1 N_2 - N_3^2)};$$

$$N_1 = 2b_{21} \left(\frac{\pi}{2a^*} \right)^4 + (2b_{71} - 4b_{41}) \left(\frac{\pi}{2a^*} \right)^2 + 2b_{31};$$

$$N_2 = 2b_{22} \left(\frac{\pi}{2a^*} \right)^4 + (2b_{72} - 4b_{42}) \left(\frac{\pi}{2a^*} \right)^2 + 2b_{32};$$

$$N_3 = b_{32} \left(\frac{\pi}{2a^*} \right)^4 + (b_{81} + b_{82} - 2b_{62}) \left(\frac{\pi}{2a^*} \right)^2 + b_{61}.$$

При записи решения системы (11) учтено, что перемещение u_1 кососимметрично относительно выбранного начала координат и при $|\xi| \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Постоянные интегрирования $A_1 \div A_8$ определяем из условий

$$\left\{ \begin{aligned} f_{1i}^-(a^*) &= f_{1i}^+(a^*); \\ \frac{d}{d\xi} f_{1i}^-(a^*) &= \frac{d}{d\xi} f_{1i}^+(a^*); \quad (i=1,2) \\ \frac{d^2}{d\xi^2} f_{1i}^-(a^*) &= \frac{d^2}{d\xi^2} f_{1i}^+(a^*); \quad \frac{d^3}{d\xi^3} f_{1i}^-(a^*) = \frac{d^3}{d\xi^3} f_{1i}^+(a^*) \end{aligned} \right.$$

Это равенство обусловлено тем, что функция $P'(\xi)$, стоящая в правой части разрешающей системы уравнений (11) имеет разрыв первого рода в точке $(\xi = a^*)$. Так как порядок каждого дифференциального уравнения системы равен четырём, то в точке $\xi = a^*$ должны быть непрерывны сами функции (f_{11}, f_{18}) и их производные до третьей включительно. Полученные постоянные интегрирования и компоненты перемещения u_1, u_2 находятся в прямой зависимости от постоянной P_0 , считая известными радиус R_2 , внедряемого к поверхностям эксплуатационной колонны уплотнительного элемента резиновой полосы, и длину контакта $2a(a^* = a/h)$. Учитывая, что рассматриваются малые перемещения точек полосы, аппроксимируем профиль внедряемого уплотнителя в зоне контакта в виде квадратной параболы. При этом вертикальные перемещения точек верхней границы полосы в зоне контакта $(-a \leq x \leq a)$ определяем по формуле

$$v(x) = -\delta + \frac{x^2}{2R_2}, \quad (15)$$

где δ – максимальное смещение уплотнителя. Поскольку распределение контактного давления задано приближённо выражением (2), то перемещение $u_2(x, h)$ отличается от $v(x)$. Необходимо, чтобы функция $v(x)$ совпадала с верти-

кальным смещением $u(x, h)$ на верхней границе полосы в точках $x = 0, x = \pm a$. Выполнив это условие, получим постоянную P_0 и максимальное смещение уплотнителя δ для заданных значений h, R_2 и a .

$$\left\{ \begin{aligned} P_0 &= N \frac{Gh}{R_2} \\ \delta &= tN \frac{h^2}{R} \end{aligned} \right. \quad (16)$$

где $N = \frac{(a^*)^2}{2[f^-(a^*) - f_2^-(0) + f_{22}^-(a^*) - f_{22}^-(0)]}$; $t = f_{21}^-(0) + f_{22}^-(0)$;

$$f_{2i}^- = \frac{G}{P_0} f_{2i}^- i = 1, 2.$$

При этом усилии, действующее на уплотнитель, определяем по формуле

$$P = \int_{-a}^a P(x) dx = \frac{4Na^*}{\pi} \cdot \frac{h^2 G}{R_2} \quad (17)$$

На рис. 2, 3, 4, 5 построены графики распределения перемещений и напряжений по длине полосы. Кривые 1, 2 относятся к первому и второму приближениям соответственно, пунктирная линия 3 – точному решению.



Рис. 2. График распределения с переменной по длинам полосы

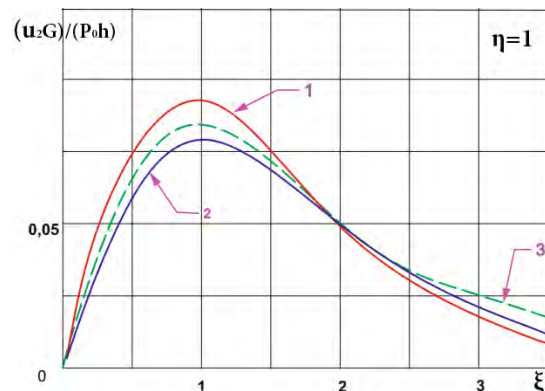


Рис. 3. Зависимость безразмерного перемещения уплотнителя от безразмерной половины контактной зоны

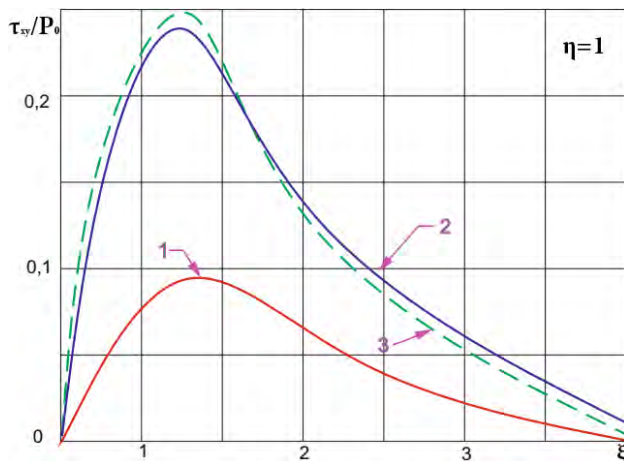


Рис. 4. Распределение касательного напряжения по длине полосы

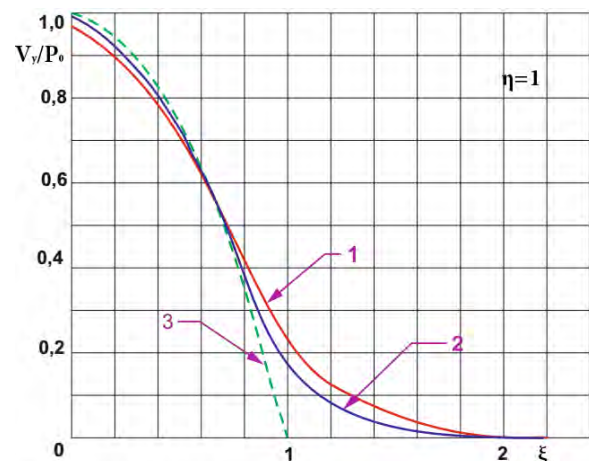


Рис. 5. Распределение напряжения по длине полосы

Выводы

1. Установлено, что для оптимизации уплотнения скважинных пакеров, при решении задачи распределения перемещений и напряжений

эффективно использовать метод Канторовича на основе принципа Лагранжа.

2. Решение задачи во втором приближении позволило оценить его точность.

Список литературы:

1. Babanly M.B., Mamedov G.A., Mammadov V.T., Aslanov J.N. Features of the Calculations while Nonstationary Dynamic Loadings for the Downhole Packer Sealing // Science and Education, July 1st-2nd 2016, с. 42–54.
2. Мамедов В.Т. Исследование напряжённо-деформированного состояния уплотнителей нефтепромышленного оборудования методом вариации (Neft-mədən avadanlıqlarının kipləndiricilərinin variasiya metodu ilə gərginlikli – deformasiya vəziyyətinin təhqiqi) // Отчёты Азербайджанской Академии Наук (Azərbaycan Elmlər Akademiyasının məruzələri), Баку, Наука (Elm), 1999, выпуск № 5–6, с. 20–25.
3. Mammadov V.T., Qurbanov S.R. The impact of the relatively low compression rubber to functions sealing elements of well bore packers // ICSCCW-2015, Eighth International Conference on Soft Computing, Computing with Words and Perceptions in System Analysis, Decision and Control // Edited by R.A. Aliev, I.B. Turksen, J. Kacprzyk. Dedicated to Professor Lotfi Zadeh, Antalya, Turkey, September 3-4, 2015, p. 397–399.
4. Mammadov V.T., Aslanov J.N., Gəjiyeva L.S., Bəgirova M.N. Impact of Thermoelastic Deformation on Work of Rotating Preventers Sealing // Science and Education, July 1st-2nd 2016, с. 95–102.
5. Мамедов В.Т. Влияние геометрии уплотнителя нефтепромыслового оборудования на самоуплотнение // Friction and Wear. July-August, 1999, vol. 20, № 4, p. 371–377.
6. Мамедов В.Т. Исследование режима нагружения скважинных уплотнителей (пакеров) // Нефтяное хозяйство, № 9, 1999, с. 52–53.
7. Мамедов В.Т., Шахназаров М.А. Исследование контактного напряжения при проведении работ по пакерованию стволов глубоких скважин // Научно-технический журнал «Теоретическая и прикладная механика». – Баку, 2016. – № 2. – С. 41–44.
8. Мамедов В.Т., Мамедов Г.В., Шахназаров М.А. Расчёт усилий, возникающих в трубах в процессе проведения мероприятий по пакерованию // Научно-технический журнал «Учёные записки». – Баку, 2016. – № 1. – С. 91–96.

Mammadov V.T.

Azerbaijan State Oil and Industry University

Shahnazarov M.A.

Azerbaijan State Scientific-Research Institute
for Labour Protection and Safety Measures

APPLIED METHOD OF CALCULATION OF THE BOREHOLE PACKER'S SEALING ELEMENT

Summary

The paper considers the optimization of the borehole packer's sealing. For this purpose, a variation calculation method was used—the Kantorovich method, based on the Lagrange principle. In the work the first attempt was made to research the deformations in borehole seals (packers) when it is compressed on the inner surface of the wellbore. The calculation of the contact problem obtained asymptotically for the case of plane deformation, when compressing the sealant above the surface, to the present days has been carried out only in the first approximation. In this paper, the problem is solved in the second approximation, which increases the accuracy of its solution. The results obtained can be used for optimal design and construction of sealing equipment, as well as for borehole sealing.

Keywords: Borehole sealing, sealing element, variation method, displacement, stress, potential energy functional.