ЕКОНОМІЧНІ НАУКИ

УДК 330.4

МОДЕЛЮВАННЯ ТА КЕРУВАННЯ ЕКОНОМІЧНОЮ ДІЯЛЬНІСТЮ ПІДПРИЄМСТВА

Березко Б.О.
Національний технічний університет України
«Київський політехнічний інститут імені Ігоря Сікорського»

Достатньо важко ефективно керувати економічною діяльністю підприємства. Це зумовлено різними факторами, зокрема обмеженістю ресурсами та наявністю обмеження ємності ринку. Також для ефективної реалізації ресурсів потрібно розглядати керування економічною діяльністю в динаміці а не в статиці. Дана робота містить в собі результати моделювання та керування економічною діяльністю підприємства, враховуючі певні фактори та особливості діяльності.
Ключові слова: маркетинг, економіка, підприємницька діяльність, економічне моделювання, математичні методи.

Постановка проблеми. У нас є підприємство, що займається продажами програмного забезпечення. Однак ринок продукції дещо обмежений, як і наші ресурси, тому потрібно реалізувати продукцію лише одного типу, що потенційно може принести найкращі результати ринку.

Аналіз останніх досліджень та публікацій. Оптимальне управління — вибір і здійснення найкращої програми дій для досягнення бажаного стану керованого об'єкта (виходячи з його певного початкового стану) впливом на параметри управління. Критерієм ОУ можуть бути різні технічні, економічні та інші показники функціонування об'єкта. ОУ має теоретичні, обчислювальні та прикладні аспекти. Поведінка об'єкта описується математично, рівняннями. Математична теорія ОУ розглядає некласичні варіаційні задачі. При розв'язанні задач ОУ застосовують ідеї динамічного програмування. Оптимальне управління можливе лише на основі взаємозв'язку економіко-математичних моделей та ітеративного людино-машинного процесу і їхньої узгодженості. ОУ сприяє успішному розв'язанню науково-технічних і господарських завдань на базі раціонального використання наявних ресурсів. Основою ОУ є оптимальне планування, головною умовою якого є порівняння очікуваних результатів і затрат при розподілі ресурсів на розв'язання найважливіших соціально-економічних проблем та при розподілі виробничих завдань і ресурсів між галузями. ОУ забезпечує випуск заданого обсягу продукції з найменшими затратами або максимізацію економічного результату, узгодженість економічних інтересів, наближення господарської діяльності до економічного оптимуму.

Для розв'язання задачі ОУ будується математична модель об'єкта або процесу, яким управляють, яка буде проводити опис його поведінки з плином часу під впливом управляючих факторів. Математична модель для задачі ОУ включає в себе: формулювання мети управління, що виражається через критерій якості; визначення диференціальних рівнянь, які описують усі можливі способи руху об'єкту управління; задання обмежень на ресурси, які можна використовувати, у вигляді нерівностей або рівнянь[1].

При ОУ ієрархічними багаторівневими системами, наприклад, великими хімічними виробництвами, металургійними та енергетичними комплексами, використовуються багатоцільові та багаторівневі ієрархічні системи ОУ. В математичну модель вводяться критерії якості управління для кожного рівня управління і для всієї системи в цілому, а також координація дій між рівнями управління [2].

Якщо об'єкт, що управляється, або процес є детермінованим, то для його опису використовуються диференціальні рівняння. Найбільш часто використовуються звичайні диференціальні рівняння виду {displaystyle {\dot {x}}(t)=a[x(t),u(t),t]}. У більш складних математичних моделях для опису об'єкта використовуються диференціальні рівняння з частинними похідними. Якщо управляємий об'єкт є стохастичним, то для його опису використовуються стохастичні диференціальні рівняння.

Виділення не вирішених раніше частин загальної проблеми. У книзі Лагоша Б. А.дана загальна канонічна постановка задачі оптимального управління для безперервних і дискретних (багатокрокових) процесів, вводяться допоміжні математичні конструкції і доводяться теореми про достатні умови оптимальності:для безперервних процесів, коли оптимальне рішення існує в класі допустимих;

для дискретних (багатокрокових) процесів; узагальнена теорема для безперервних процесів, коли оптимальне рішення не існує, але знаходиться мінімізує послідовність допустимих траєкторій.

У наступних розділах книги з теореми про достатні умови оптимальності стосовно безперервним процесам виводяться необхідні умови Лагранжа-Понтрягіна; для багатокрокових завдань використовується метод Лагранжа. При виконанні додаткових вимог ті і інші приймають силу достатніх умов оптимальності (в тому числі і для лінійних систем). Реалізуються достатні умови Гамільтона-Якобі-Беллмана (динамічного програмування). Проводиться порівняльний аналіз методів Лагранжа-Понтрягіна і Гамільтона-Якобі-Беллмана. Техніка останнього методу виявляється більш складною, але отримане при цьому рішення дає більше інформації, за що, як відомо, потрібно платити складністю розрахунків [8].

Мета статті. Головною метою цієї роботи є розгляд економічної діяльності підприємства на ринку шляхом побудови математичної моделі з керуванням ресурсами.

Виклад основного матеріалу.

$$\dot{x}(t) = qy(t) - hx(t), \qquad (1)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{hx(t)}{y(t)(p+k)} - gy(t),$$

де параметри $g, q, h, p, k > 0$.

Розпишемо значення показників:

x(t) – дохід від реалізованої продукції

y(t) – обсяг продукції для продажу

p – затрати на базову продукцію

k – затрати на продукцію з додатковими можливостями

g – % продукції для іншої реалізації (збереження, франчайзинг тощо)

h – відсоток доходу, що йде на витрати на закупівлю нової продукції

q – вартість для продажу.

Поставимо задачу управління системою (1) з метою підтримання бажаної кількості продукції на ринку, тоді наша модель керування набуде вигляду [1]:

$$\dot{x}(t) = qy(t) - hx(t) - u(t), \qquad (2)$$

$$\dot{y}(t) = \frac{hx(t)}{y(t)(p+k)} - gy(t)$$

Для знаходження положень рівноваги прирівняємо праві частини рівнянь системи до нуля.

$$qy - hx = 0$$

$$\frac{hx}{y(p+k)} - gy = 0$$

Задаємо значення параметрів:

q=1,7

p=100

k=200

h=0,5

g=0,3

Система отримає вигляд:

$$1,7y - 0,5x = 0$$

$$\frac{0,5x}{300y} - 1,7y = 0.$$

Розв'язками рівнянь є точка: (0,002; 0,0033)

«Лінеаризація – один з найбільш поширених методів аналізу нелінійних систем. Ідея лінеаризації – використання лінійної системи для апроксимації поведінки рішень нелінійної системи в околиці точки рівноваги. Лінеаризація дозволяє виявити більшість якісних і особливо кількісних властивостей нелінійної системи» [1].

Лінеаризуємо систему обрану нелінійну динамічну економічну модель в точці (0,002; 0,0033).

Знайдемо частинні похідні першого рівняння в точці (0,002; 0,0033).

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -0,5\Big|_{(0,002;0,0033)} = -0,5;$$

$$\frac{\partial F}{\partial y} = 0,3_{(0,002;0,0033)} = 0,3;$$

Знайдемо частинні похідні другого рівняння (0,002; 0,0033).

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{0,5}{300y}\Bigg|_{(0,002;0,0033)} = 0,505;$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{0,5x}{300} * -\frac{1}{0,0033 \hat{} 2}\Bigg|_{(0,002;0,0033)} = -0,606;$$

Матриця А матиме вигляд:

$$A = \begin{bmatrix} -0,05 & 0,3 \\ 0,505 & -0,606 \end{bmatrix}.$$

Отже, можна записати лінеаризовану систему в точці (0,002;0,0033),

$$\dot{X} = AX + BU$$
$$Y = CX + BU$$

Де матриця

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Управління задамо у вигляді вектора В:

$$B = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Для перевірки моделі на стійкість знайдемо власні числа матриці А:

$$\begin{vmatrix} -0,05-\lambda & 0,3 \\ 0,505 & -0,606-\lambda \end{vmatrix} = (-0,05-\lambda)\cdot(-0,606-\lambda) - 0,3\cdot 0,505$$

Запишемо характеристичне рівняння:

$$\lambda^2 + 1,106\lambda + 0,1515 = 0;$$

Отримаємо корені рівняння:

$$\lambda_1 = -0,5;$$
$$\lambda_2 = -27000,6;$$

$\lambda_1, \lambda_2 < 0$ – стійкий вузол

Спостережність – це оцінка того, чи дає наявний набір вимірювання адекватну інформацію про систему.

Керованість показує, чи достатньо параметрів системи, на котру можуть впливати виконуючі механізми для управління процесом необхідним чином. Система називається керованою, якщо можна підібрати такі значення U, щоб система досягла заданого значення X.

Критерій керованості Калмана. Для того щоб система була керованою, необхідно і достатньо, щоб матриця керованості $R = (B\, AB\, A^2B \ldots A^nB)$ мала повний ранг: rankR = n [2].

Теорема: нехай $rank(B\, AB\, A^2B \ldots A^nB) = n$, тобто система керована. Тоді задача про оптимальну стабілізацію має розв'язок і оптимальна функція Ляпунова V визначається однозначно шляхом розв'язку алгебраїчного рівняння Ріккаті:

$$CA + A^TC - \frac{1}{\beta}CBR^{-1}BC + Q = 0$$

Тоді $V = x^TCx$ та $u(x) = -\frac{1}{\beta}R^{-1}B^TCx$

Критерій спостережуваності Калмана [5]. Для того щоб система була спостережуваною необхідно і достатньо, щоб матриця спостережуваності

$$Q = \begin{pmatrix} C \\ CA \\ CA^2 \\ \dots \\ CA^n \end{pmatrix}$$ мала повний ранг: rankQ = n.

Критерій мінімальності. Для того щоб система була мінімальною, необхідно і достатньо, щоб обидві матриці R і Q мали повний ранг: rankR = n, rankQ = n.

Для того, щоб створити в MATLAB 17 об'єкт, заданий описом у просторі станів, використовується конструктор ss (від *State Space* – простір станів). його вхідними параметрами служать матриці A, B, C, D системи.

Для створення моделі, заданої у вигляді передавальної функції, використовується конструктор tf (від *Transfer Function*).

Формування матриць спостережуваності та керованості проводиться за допомогою команд ctrb і obsv (від *controlability* і *observability*). Їх синтаксис однаковий: R = ctrb (sys), Q = obsv (sys). В якості аргументів можна використовувати безпосередньо матриці A, B, C описаних в просторі станів, наприклад R = ctrb (A, B), Q = obsv (A, C) або R = ctrb (sys.a, sys.b), Q = obsv (sys.a, sys.c) [8].

Для обчислення рангу цих матриць використовується команда rank.

```
>>A=[-0,05 0,3; 0,505 -0,606];
>> B=[1;0];
>> C=[1 0; 0 1];
>> D=[0;0];
>> sys=ss(A,B,C,D);
>> sys1=tf(sys);
>> R=ctrb(A,B);
>> Q=obsv(A,C);
>> rank(A)
ans = 2
>> rank(R)
ans = 2
>> rank(Q)
ans = 2
```

Отже, система є стійкою, керованою та спостережною.

Створення реальних систем управління неминуче пов'язано з рішенням цілого комплексу різнопланових задач. Математичний аналіз системи керування вимагає перш за все створення математичної моделі. При цьому вимагається не тільки отримати рівняння руху (поведінки) системи, але і дати достатньо повний опис цілей управління і різних обмежень, пред'явлених до системи та її моделі.

Після того, як завершено математичний опис, необхідно дослідити керований процес з метою пошуку тої поведінки системи, яка задовольняє певним цілям та обмеженням [7].

Підсумком такого дослідження зазвичай являється отримання керування у вигляді $u = u[t, x(t)]$. Таким чином, основна задача математичної теорії управління полягає в математичному дослідженні специфічних задач, пов'язаних зі створенням та експлуатацією систем керування. Оптимальна стабілізація лінійних систем має наступний вигляд:

$$B[V(t,x), t, x, u(t,x)] = 0;$$

$$B[V(t,x), t, x, u] > 0,$$

То рівняння u=u(t,x) є оптимальним. При цьому виконується умова

$$^{\infty}\omega(t, x(t(, u(t, x(t)))\,dt = \min_u \int_0^{\infty} \omega(t, x(t), u)\,dt = V(0, x(0)).$$

Використаємо дану теорему для розв'язку поставленої задачі:

$$\dot{x} = A(t)x + B(t)u,$$

Де критерій якості матиме вигляд:

$$I[u]] = \int_0^{\infty} [x^* Q(t)x + \beta u^* R(t)u]\,dt,$$

Для розв'язку задачі потрібно буде також використати функцію Ляпунова, що має вигляд:

$$V(t,x) = x^* C(t)x = \sum_{i,k=1}^{n} c_{ik} x_i x_k, \quad (4)$$

З умови мінімума виходить, що:

$$u(t,x) = -\frac{1}{2\beta} R^{-1}(t) B^*(t) \frac{\partial V}{\partial x}, \quad (5)$$

І відповідно до функції Ляпунова матиме вигляд:

$$u(t,x) = -\frac{1}{\beta} R^{-1} B^*(t) C(t) x. \quad (6)$$

Для того щоб знайти критерій керування, потрібно знайти матрицю C, а її можна знайти з матричного рівняння Ріккаті:

$$\frac{dC}{dt} = CA + AC + Q - \frac{1}{\beta} C^* B R^{-1} B^* C = 0, \quad (7)$$

Поставимо задачу управління системою (1) з метою підтримання бажаної кількості продукції на ринку, тоді наша модель керування набуде вигляду [1]:

$$\dot{x}(t) = -0{,}5x(t) + 0{,}3y(t) - u(t), \quad \dot{y}(t) = 0{,}505x(t) - 0{,}606y(t),$$

з початковими умовами

$$x(t_0) = x^0,$$
$$y(t_0) = y^0.$$

де x_0, y_0 – задані вектори.

Тобто

$$x(0) = 30,$$
$$y(0) = 40.$$

Вигляд критерію якості:

$$I = \int_0^T \left(x^2 + y^2 + u^2\right) dt$$

Із вигляду критерію якості маємо

Q=

1	0
0	1

b

1

R=

0,5	0
0	0,5

З лінеаризованої системи маємо:

B=

-1
0

A=

-0,5	0,3
0,505	-0,606

Для того, щоб знайти керування u, спочатку треба розв'язати матричне рівняння Ріккаті:

$$\frac{dC}{dt} = CA + AC + Q - \frac{1}{\beta} C^{*} B R^{-1} B^{*} C = 0,$$

Допомогою надбудови Miscrosoft Excel «Пошук рішення» розв'яжемо наведене вище матричне рівняння Ріккаті. Маємо:

C

0,46036	-0,06808
0,195793	0,66412

Далі, знайшовши матрицю C, підставимо її в формулу:

$$u(t,x) = -\frac{1}{\beta} R^{-1} B^{*}(t) C(t) x.$$

$$-\frac{1}{\beta} R^{-1} BC = (1,311,19)$$

Тому

$$u = 1,31x + 1,19$$

Окреслення можливостей побудованого регулятора

Запишемо нелінійну модель без урахування керування:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = -0,5x(t) + 0,3y(t) \\ \dot{y}(t) = 0,505x(t) - 0,606y(t) \end{cases}$$

Розв'яжемо систему у чисельному вигляді та побудуємо графіки попиту та пропозиції у Maple 13:

with(DEtools) : with(plots) :

$$sys1 := \left[\frac{d}{dt} x(t) = (0.3 \cdot y(t) - 0.5 \cdot x(t)), \frac{d}{dt} y(t) = \left(\frac{0.5 \cdot x(t)}{300 \cdot y(t)} - 0.3 \cdot y(t) \right), x(0) = 30, y(0) = 40 \right];$$

$$\left[\frac{d}{dt} x(t) = 0.3\, y(t) - 0.5\, x(t), \frac{d}{dt} y(t) = \frac{0.001666666667\, x(t)}{y(t)} - 0.3\, y(t), x(0) = 30, y(0) = 40 \right]$$

dsn1 := dsolve(sys1, numeric) :
odeplot(dsn1, [[t, x(t)], [t, y(t)]], 0 ..15, view = [0 ..15, 0 ..100]);

$$sys2 := \left[\frac{d}{dt} x(t) = (0.3 \cdot y(t) - 0.5 \cdot x(t) - 1.31 \cdot x(t) - 1.19 \cdot y(t)), \frac{d}{dt} y(t) = \left(\frac{0.5 \cdot x(t)}{300 \cdot y(t)} - 0.3 \cdot y(t) \right), x(0) = 30, y(0) = 40 \right];$$

$$\left[\frac{d}{dt} x(t) = -0.89\, y(t) - 1.81\, x(t), \frac{d}{dt} y(t) = \frac{0.1666666667\, x(t)}{y(t)} - 0.3\, y(t), x(0) = 30, y(0) = 40 \right]$$

dsn2 := dsolve(sys2, numeric) :
odeplot(dsn2, [[t, x(t)], [t, y(t)]], 0 ..15, view = [0 ..15, 0 ..100]);

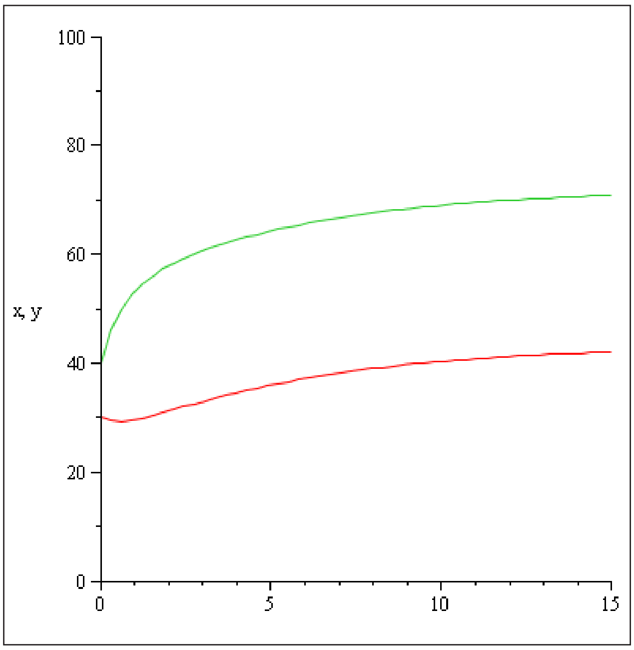

Рис. 1. Результати моделювання без керування

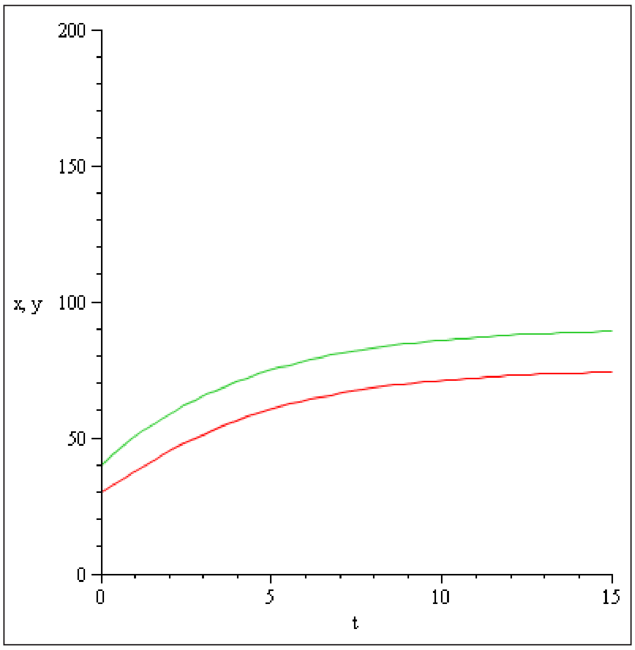

Рис. 2. Результати моделювання з керуванням

Висновки і пропозиції. Порівнявши знайдені чисельні розв'язки нелінійної моделі з урахуванням та без урахування керування, бачимо, що без керування як кількість виробленої так і рівень доходу від реалізованої продукції не сильно збільшуються, а % реалізованої продукції відносно виробленої досить низький. В моделі з урахуванням керування ми спостерігаємо більш позитивну тенденції до розвитку даних показників а також більшу частку реалізованої продукції.

Список літератури:

1. Колесников А.А. Синергетическая теория управления. – Таганрог: ТРТУ, М.: Энерго-атомиздат, 1994. – 344 с.
2. Егоров А.И. Основы теории управления. – М.: Физматлит, 2004. – 504 с. – ISBN 5-9221-0643-4.
3. Автоматическое управление. Ротейнберг Я.Н., Изд-во «Наука», главная редакция физико-математической литературы. М., 1971, 396 с.
4. Х. Квакернаак, Р. Сиван. Линиейные оптимальные системы управления. – Москва: Изд-во «Мир», 1977, 653 с.
   а. (для студентов специальности 6.040205 «Статистика» / сост. А.Л. Зуев. Донецк: ДонНУ, 2012, 78 с.
5. Никульчев Е.В. Практикум по теории управления в среде MATLAB: Учебное пособие. – М.: МГАПИ, 2002. – 88 с.
6. Пантелеев А.В. Теория управления в примерах и задачах: Учеб. пособие / А.В. Пантелеев, А.С. Бортаковский. – М.: Высш. шк., 2003. – 583 с.
7. Базыкин А.Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003, 368 с.
8. Лагоша Б.А. Оптимальное управление в экономике: Учебное пособие / Московский государственный университет экономики, статистики и інформатики. – М., 2004. – 133 с.
9. Болтянский В.Г. Математические методы оптимального управления: Учеб. пособие / В.Г. Болтянский. – М.: Высш. шк., 1968. – 408 с.

Берёзко Б.А.
Национальный технический университет Украины
«Киевский политехнический институт имени Игоря Сикорского»

МОДЕЛИРОВАНИЕ И УПРАВЛЕНИЕ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬЮ ПРЕДПРИЯТИЯ

Аннотация
Достаточно сложно ефективно управлять економической деятельностью предприятия. Это обусловлено различными факторами, в частности ограниченностью ресурсами и наличием ограничений объема рынка. Также для эфективной реализации ресурсов не обходимо рассматривать управление экономической деятельностью в динамике а не в статике. Данная работа содержит в себе результаты моделирования и управления экономической деятельности предприятия, учитывая определенные факторы и особености.
Ключевые слова: маркетинг, экономика, предпринимательская деятельность, экономическое моделирование, математические методы.

Berezko B.O.
National Technical University of Ukraine
"Igor Sikorsky Kyiv Polytechnic Institute"

MODELING AND MANAGING THE ECONOMIC ACTIVITY OF THE ENTERPRISE

Summary
It is difficult to effectively manage the economic activity of an enterprise. This is due to various factors, including resource constraints and the presence of market capacity constraints. Also, for the effective realization of resources it is necessary to consider management of economic activity in dynamics and not in statics. This work includes the results of modeling and managing the economic activity of the enterprise, taking into account certain factors and peculiarities of activity.
Keywords: marketing, economy, enterprise activity, economic modeling, mathematical methods.