

УДК 622.245.44

ИЗУЧЕНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ УПЛОТНЕНИЯ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ, СОПРЯЖЕННОЙ С КОНИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКОЙ ПО КРАЮ, НАГРУЖЕННЫМ ВНЕШНИМ ДАВЛЕНИЕМ

Мамедов В.Т., Сулейманова А.Д.

Азербайджанский государственный университет нефти и промышленности

В статье рассматривается изучение напряженно-деформированного состояния уплотнения цилиндрической оболочки, сопряженной с конической оболочкой по краю нагруженным внешним давлением. С этой целью использована гипотеза Кирхгофа-Лява. Внешнее давление считается пластовой жидкостью (нефть) нефтяной скважины. Применен вариационный метод Власова-Кантаровича.

Ключевые слова: скважинное уплотнение составной оболочки, напряжение деформации, нормальная сила, прогиб.

Постановка вопроса. При нефтяной скважине для герметизации ствола скважины используются скважинные уплотнители (пакеры) с различными формами и размерами. Часто используется уплотнитель сопряжения с цилиндрическим участком [1]. Теория базируется на гипотезах Кирхгофа-Лява. Расположим оси координат так, как показано на рис. 1а.

Величины s и θ будем рассматривать как криволинейные координаты на срединной поверхности уплотнения-оболочки. Положительным напряжениям усилий, действующим на элемент уплотнения, соответствуют направления, показанные на рис. 1б.

Выражения для деформации среднего слоя конического участка уплотнения большого прогиба, запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{s} - \frac{\omega \operatorname{tg} \alpha}{2s^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \\ \gamma &= \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{v}{s} + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial s}; \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \chi_1 &= -\frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2}; \quad \chi_2 = -\frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} - \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s}; \\ \chi &= -\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta}; \end{aligned} \quad (2)$$

где u , v , ω – смещения точек срединной поверхности, соответственно, в направлении образующей вдоль координаты s , по окружности вдоль координатной оси θ по внутренней нормали к поверхности; ε_1 , ε_2 и γ – относительные удлинений и сдвиг срединной поверхности. Величины χ_1 , χ_2 и χ характеризуют изменения кривизны и кручения.

В соответствии с гипотезой прямых нормалей удлинения и сдвиг в некотором слое на расстоянии z от срединной поверхности имеет вид [2]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(z)} &= \varepsilon_1 + z \chi_1; \\ \varepsilon_2^{(z)} &= \varepsilon_2 + z \chi_2; \\ \gamma^{(z)} &= \gamma + z \chi. \end{aligned} \quad (3)$$

Связь между напряжениями и деформациями представим в виде:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1^{(z)} &= \frac{1}{E}(\sigma_1 - \mu\sigma_2); \\ \varepsilon_2^{(z)} &= \frac{1}{E}(\sigma_2 - \mu\sigma_1); \\ \gamma^{(z)} &= 2 \frac{(1 + \mu)}{E} \tau_1. \end{aligned} \quad (4)$$

где E – модуль упругости первого рода; μ – коэффициент Пуассона и σ_1 , σ_2 и γ – компоненты напряженного состояния уплотнения.

Из выражений (4) следует:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{E}{(1 - \mu^2)} [\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2 + z(\chi_1 + \mu\chi_2)]; \\ \sigma_2 &= \frac{E}{(1 - \mu^2)} [\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1 + z(\chi_2 + \mu\chi_1)]; \\ \tau &= \frac{E}{2(1 - \mu)} (\gamma + 2z\chi). \end{aligned} \quad (5)$$

Нормальные и касательные погонные усилия – N_1 , N_2 , T действующие в срединной поверхности, запишутся так:

$$\begin{aligned} N_1 &= B(\varepsilon_1 + \mu\varepsilon_2); \quad N_2 = B(\varepsilon_2 + \mu\varepsilon_1); \\ T &= \frac{1}{2} B(1 - \mu)\gamma, \end{aligned} \quad (6)$$

где $B = \frac{E\delta}{1 - \mu^2}$.

В общем случае касательные усилия T_{12} и T_{21} оказываются различными. Однако, учитывая, что рассматриваются такие оболочки, т.е. $z \ll R$, принимаем $T_{12} = T_{21} = T$.

Выражения для изгибающих крутящих моментов таковы [3]:

$$\begin{aligned} M_1 &= D(\chi_1 + \mu\chi_2); \quad M_2 = D(\chi_2 + \mu\chi_1); \\ H &= D(1 - \mu)\chi, \end{aligned} \quad (7)$$

где $D = \frac{E\delta^3}{12(1 - \mu^2)}$ – цилиндрические жесткости.

Здесь приближенно принято, что $H_{12} = H_{21} = H$. Запишем равновесия в проекциях на касательные к линиям s и θ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} N_1 + \frac{\partial N_1}{\partial s} + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} - \frac{1}{s} N_2 &= 0; \\ \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial N_2}{\partial \theta} + 2 \frac{T}{s} + \frac{\partial T}{\partial s} Q_2 &= 0 \end{aligned} \quad (8)$$

Третье уравнение, представляющее собой сумму проекций сил на нормаль к поверхности, напишем с учетом изменения кривизны поверхности в процессе деформации:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s \cos \alpha} Q_1 + \frac{\partial Q_1}{\partial s} + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial Q_2}{\partial \theta} - N_1 \chi_1 - \\ - N_2 \left(\chi_2 - \frac{tg \alpha}{s} \right) - 2T\chi + q = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

Уравнения моментов относительно касательных к линиям s и θ :

$$\begin{aligned} \frac{2}{s} H + \frac{\partial H}{\partial s} + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial \theta} - Q_2 &= 0; \\ \frac{1}{s} M_1 + \frac{\partial M_1}{\partial s} + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{1}{s} M_2 - Q_1 &= 0 \end{aligned} \quad (10)$$

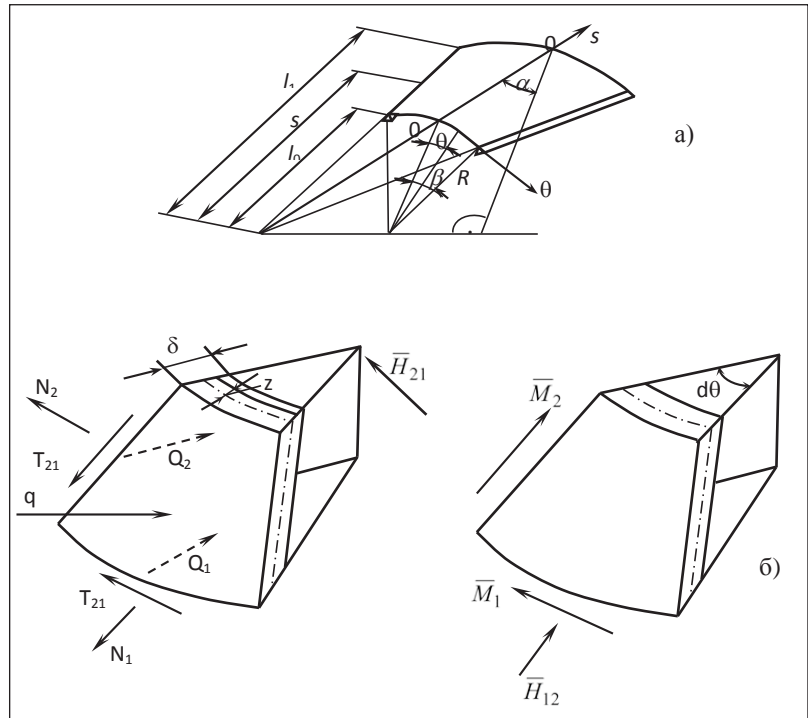


Рис. 1. а) Оси системы координат базирующей на гипотезах Кирхгова-Лява; б) Положительные направления усилий, действующих на элемент уплотнения

Определяя из уравнений (10) поперечные усилия Q_1 и Q_2 и, подставляя их в выражение (9), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 M_2}{\partial s^2} + \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 M^2}{\partial \theta^2} + \frac{2}{3} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial M_1}{\partial s} - \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial M_2}{\partial s} + \\ + \frac{2}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial s \partial \theta} + \frac{2}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} - N_1 \chi_1 - \\ - \left(\chi_2 - \frac{tg \alpha}{s} \right) - 2T\chi + q = 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Используя соотношения (1), (6), (7), запишем разрешающие уравнения (8) и (11) в перемещениях ω , v , u :

$$\begin{aligned} D \left[\frac{\partial^4 \omega}{\partial s^4} + \frac{2}{s} \frac{\partial^3 \omega}{\partial s^3} - \frac{1}{s^2} + \frac{1}{s^3} \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{2}{s \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial s^2 \partial \theta^2} - \frac{2}{s^3 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^3 \omega}{\partial s \partial \theta^2} + \right. \\ \left. + \frac{4}{s^4 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s^4 \cos^4 \alpha} \cdot \frac{\partial^4 \omega}{\partial \theta^4} \right] + B \left[\left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2 \right) \right] + \\ + \mu \left(\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{s} - \frac{u}{s} - \frac{u tg \alpha}{s} + \frac{1}{2s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} + \\ + \left[\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{s} - \frac{u tg \alpha}{s} + \frac{1}{2s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2 \right) \right] \times \\ \times \left(\frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{tg \alpha}{s} \right) + (1 - \mu) \left(\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{s} + \right. \\ \left. + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) + \left(\frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial \theta} - \frac{1}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - q = 0; \\ \frac{1}{s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} + \frac{(1 - \mu)}{2} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial s^2} + \frac{(1 - \mu)}{2s} \cdot \frac{\partial v}{\partial s} - \frac{(1 - \mu)}{2s^2} \cdot v + \\ + \frac{(3 - \mu)}{2s^3 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial \theta} + \frac{(1 + \mu)}{2s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial s} - \frac{tg \alpha}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \\ + \frac{tg \alpha}{s} \cdot \frac{D}{B} \left(\frac{1}{s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial \theta} + \frac{1}{s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^3 \omega}{\partial s^2 \partial \theta} \right) + \end{aligned} \quad (12)$$

(13)

$$\begin{aligned}
 & + \frac{(1-\mu)}{2s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{1}{s^3 \cos^3 \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \\
 & + \frac{(1+\mu)}{2s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial \theta} + \frac{(1-\mu)}{2s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = 0; \\
 & \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{1}{s} \cdot \frac{\partial u}{\partial s} - \frac{u}{s^2} + \frac{(1-\mu)}{2s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{(3-\mu)}{2s^2 \cos \alpha} \cdot \frac{\partial v}{\partial \theta} + \\
 & + \frac{(1+\mu)}{2s \cos \alpha} \cdot \frac{\partial^2 v}{\partial s \partial \theta} + \frac{\omega t g \alpha}{s^2} - \mu \frac{t g \alpha}{s} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial s} + \frac{(1+\mu)}{2s} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial s} \right)^2 - (14) \\
 & - \frac{(1+\mu)}{2s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(1+\mu)}{2s^2 \cos^2 \alpha} \cdot \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial s \partial \theta^2} + \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial^2 \omega}{\partial s^2} = 0;
 \end{aligned}$$

Для приведенных (12), (13), (14) к безразмерному виду введем следующие обозначения:

$$\bar{\omega} = \frac{\omega}{\delta}; \quad \bar{v} = \frac{v}{\delta}; \quad \bar{u} = \frac{u}{\delta}; \quad \lambda = \frac{s}{l_1}; \quad (15)$$

где l_1 – длина образующей от вершины до большего основания, l_0 – расстояние по образующей от вершины до меньшего основания и δ – толщина оболочки.

В дальнейшем черточки над безразмерными параметрами опустим равновесия (12), (13), (14) примут вид:

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial \lambda^4} + \frac{2}{\lambda} \frac{\partial^3 \bar{\omega}}{\partial \lambda^3} - \frac{1}{\lambda^2} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda^3} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \lambda} + \frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial \lambda^2 \partial \theta^2} - \\
 & - \frac{2}{\lambda^3 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^3 \bar{\omega}}{\partial \lambda \partial \theta^2} + \frac{4}{\lambda^4 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\lambda^4 \cos^4 \alpha} \frac{\partial^4 \bar{\omega}}{\partial \theta^4} - \\
 & - 12\Pi \left\{ \left[\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{2\Pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right)^2 + \mu \left(\frac{1}{\lambda \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{\lambda} - \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. - \frac{\omega t g \alpha}{\lambda} + \frac{1}{2\Pi \lambda^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 \right] \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \lambda^2} + \left[\frac{1}{\lambda \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \right. \right. \\
 & \left. \left. \left. + \frac{u}{\lambda} - \frac{\omega t g \alpha}{\lambda} + \frac{1}{2\Pi \lambda^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial \lambda} + \frac{1}{2\Pi} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right)^2 \right) \right] \times \right. \\
 & \left. \times \left(\frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \lambda} + \Pi \frac{t g \alpha}{\lambda} \right) + (1-\mu) \left(\frac{1}{\lambda \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\partial v}{\partial \lambda} + \frac{v}{\lambda} + \frac{1}{2\Pi \lambda \cos \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) \left(\frac{1}{\lambda \cos \alpha} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \lambda \partial \theta} - \frac{1}{\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \right) \right\} - 12q = 0 \\
 & \frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \theta^2} + \frac{(1-\mu)}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial \lambda} + \frac{(1-\mu)}{2\lambda} \frac{\partial \bar{v}}{\partial \lambda} - \\
 & - \frac{(1-\mu)}{2\lambda^2} \bar{v} + \frac{(3-\mu)}{2\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{(1+\mu)}{2\lambda \cos \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta \partial \lambda} - \\
 & - \frac{t g \alpha}{\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{t g \alpha}{12\Pi \lambda^2} \left(\frac{1}{\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \lambda \partial \theta} + \frac{1}{\lambda \cos \alpha} \times \right. \\
 & \left. \times \frac{\partial^3 \bar{\omega}}{\partial \lambda^2 \partial \theta} + \frac{1}{\lambda^3 \cos^3 \alpha} \frac{\partial^3 \bar{\omega}}{\partial \theta^3} \right) + \\
 & + \frac{1}{\Pi} \left[\frac{(1-\mu)}{2\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} + \frac{1}{\lambda^3 \cos^3 \alpha} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \theta \partial \theta^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{(1+\mu)}{2\lambda \cos \alpha} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \theta \partial \lambda} + \frac{(1-\mu)}{2\lambda \cos \alpha} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \frac{\partial \bar{\omega}}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \bar{\omega}}{\partial \lambda^2} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{u}{\lambda^2} + \frac{(1-\mu)}{2\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{(3-\mu)}{2\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \\
 & + \frac{(1+\mu)}{2\lambda \cos \alpha} \frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial \lambda} + \frac{\omega t g \alpha}{\lambda^2} - \mu \frac{t g \alpha}{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} + \\
 & + \frac{1}{\Pi} \left[\frac{(1-\mu)}{2\lambda} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right)^2 - \frac{(1+\mu)}{2\lambda^2 \cos^2 \alpha} \left(\frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right)^2 + \frac{(1+\mu)}{2\lambda^2 \cos^2 \alpha} \right. \\
 & \left. \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta \partial \lambda} + \frac{(1+\mu)}{2\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} + \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda^2} \right] = 0
 \end{aligned} \quad (17)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial \lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial u}{\partial \lambda} - \frac{u}{\lambda^2} + \frac{(1-\mu)}{2\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} - \frac{(3-\mu)}{2\lambda^2 \cos \alpha} \frac{\partial v}{\partial \theta} \right) + \dots = 0 \quad (18)$$

Используя вариационный метод Канторовича, приводим исходные уравнения (16), (17) и (18) к обыкновенным.

Решение ищется в форме:

$$\begin{aligned}
 \omega &= \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n(\lambda) \cos(2n-1) \frac{\pi \theta}{2\beta}; \quad v = \sum_{n=1}^{\infty} v_n(\lambda) \sin 2n \frac{\pi \theta}{2\beta}; \\
 u &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(\lambda) \cos(2n-1) \frac{\pi \theta}{2\beta}; \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (19)
 \end{aligned}$$

Функции смещений (19) удовлетворяют граничным условиям на прямолинейном контуре уплотнительного элемента. Т.е. выполняются условия при $\theta = \pm\beta$:

$$\omega = v = u = 0$$

$$M_2 = D \frac{\delta}{l_1^2} \left(-\frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} - \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} - \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda^2} \right) = 0 \quad (20)$$

Принятым функциям смещений соответствует симметричная форма напряженно-деформированного состояния элемента относительно оси 0-0 (см. рис. 1).

С помощью выражений (19), используя метод Канторовича, получим:

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^4 \omega}{d\lambda^4} + \frac{1}{\lambda} \frac{d^3 \omega_n}{d\lambda^3} - \left[\frac{1}{\lambda^2} + \frac{2(2n-1)^2}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \right] \frac{d^2 \omega_n}{d\lambda^2} + \\
 & + \left[\frac{1}{\lambda^3} + \frac{2(2n-1)^2 t^2}{\lambda^3 \cos^2 \alpha} \right] \frac{d\omega_n}{d\lambda} + \left[-\frac{4(2n-1)^2 t^2}{\lambda^4 \cos^2 \alpha} + \right. \\
 & \left. + \frac{(2n-1)^4 t^4}{\lambda^4 \cos^4 \alpha} \right] \omega_n - 12\Pi \frac{1}{\beta} \left[\frac{d\omega_n}{d\lambda} a_1 + \frac{1}{2\Pi} \left(\frac{d\omega_n}{d\lambda} \right)^2 a_2 + \right. \\
 & \left. + \mu \left[\left(\frac{u_n}{\lambda} - \frac{\omega_n t g \alpha}{\lambda} \right) a_1 + \frac{(2n-1)^2 t^2}{2\Pi \lambda^2 \cos^2 \alpha} \omega_n^2 a_4 \right] \frac{d^2 \omega_n}{d\lambda^2} + \right. \\
 & \left. + \left[\frac{2nt}{\lambda \cos \alpha} v_n a_5 + \left(\frac{u_n}{\lambda} - \frac{\omega_n t g \alpha}{\lambda} \right) \beta + \frac{(2n-1)^2 t^2}{2\Pi \lambda^2 \cos^2 \alpha} \omega_n^2 a_6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \mu \left(\frac{du_n}{d\lambda} \beta + \frac{1}{2\Pi} \left(\frac{d\omega_n}{d\lambda} \right)^2 a_1 \right) \frac{\Pi t g \alpha}{\lambda} + \left(\frac{u_n}{\lambda} - \frac{t g \alpha}{\lambda} \omega_n \right) a_1 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(2n-1)^2 t^2}{2\Pi \lambda^2 \cos^2 \alpha} \omega_n^2 a_4 + \mu \left(\frac{du_n}{d\lambda} a_1 + \frac{1}{2\Pi} \left(\frac{d\omega_n}{d\lambda} \right)^2 a_2 \right) \right] \times \right. \\
 & \left. \left[-\frac{(2n-1)^2 t^2}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \omega_n + \frac{1}{\beta} \frac{d\omega_n}{d\lambda} \right] + (1-\mu) \left[\frac{(2n-1)t}{\lambda \cos \alpha} u_n a_6 + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{(2n-1)^2 t^2}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \omega_n \right] \right\} - 12q \frac{a_8}{\beta} = 0; \\
 & \frac{1}{2} (1-\mu) \cdot \frac{d^2 v_n}{d\lambda^2} + \frac{(1-\mu)^2}{2\lambda} \frac{dv_n}{d\lambda} - \\
 & - \left[\frac{4n^2 t^2}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} + \frac{(1-\mu)}{2\lambda^2} \right] v_n + \frac{a_9}{\beta} \times \\
 & \times \left[-\frac{(3-\mu)(2n-1)t}{2\lambda^2 \cos \alpha} u_n - \frac{(1+\mu)(2n-1)t}{2\lambda \cos \alpha} \right. \\
 & \times \frac{du_n}{d\lambda} + \frac{t g \alpha (2n-1)t}{\lambda^2 \cos \alpha} \omega_n \left. \right] + \frac{a_9 t g \alpha (2n-1)t}{12\Pi^2 \lambda \beta} \times \\
 & \times \left[-\frac{1}{\lambda^2 \cos \alpha} \frac{d\omega_n}{d\lambda} - \frac{1}{\lambda \cos \alpha} \frac{d^2 \omega_n}{d\lambda^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{(2n-1)^2 t^2}{\lambda^3 \cos^3 \alpha} \omega_n \right] = 0;
 \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned}
 & \frac{d^2 u_n}{d\lambda^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{du_n}{d\lambda} - \frac{u_n}{\lambda^2} - \frac{(1-\mu)(2n-1)^2 t^2}{2\lambda^2 \cos^2 \alpha} u_n - \\
 & - \frac{tg\alpha (1-\mu)n_5}{\lambda \beta \lambda^2 \cos^2 \alpha} v_n + \frac{(1+\mu)nta_5}{\beta \lambda \cos \alpha} \frac{dv_n}{d\lambda} + \frac{\omega_n tg\alpha}{\lambda^2} - \\
 & - \mu \frac{tg\alpha}{\lambda} \frac{d\omega_n}{d\lambda} + \frac{(1-\mu)a_1}{2\pi\beta\lambda} \left(\frac{d\omega_n}{d\lambda} \right)^2 - \\
 & - \frac{(1+\mu)(2n-1)^2 t^2 a_6}{2\pi\beta\lambda^2 \cos^2 \alpha} \omega_n^2 + \frac{(1+\mu)(2n-1)^2 t^2 a_6}{2\pi\beta\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{d\omega_n}{d\lambda} \omega_n + \\
 & + \frac{a_1}{\pi\beta} \frac{d^2 \omega_n}{d\lambda^2} - \frac{(1-\mu)(2n-1)^2 t^2 a_1}{2\pi\beta\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{d\omega_n}{d\lambda} \omega_n = 0
 \end{aligned} \tag{23}$$

где

$$\begin{aligned}
 t &= \frac{\pi}{2\beta}; \quad a_1 = \frac{4}{3(2n-1)} (-1)^{n+1}; \\
 a_2 &= \frac{3}{4}\beta; \quad a_4 = \frac{1}{4}\beta; \quad a_5 = \frac{4N-2}{(4n-1)}; \\
 a_6 &= \frac{2}{3(2n-1)t} (-1)^{n+1}; \quad a_7 = \frac{1}{2}\beta \\
 a_8 &= \frac{2}{(2n-1)t} (-1)^{n+1}; \quad a_9 = \frac{4N}{-(4n+1)t}
 \end{aligned} \tag{24}$$

Для реализации последующих ограничимся первым приближением, положив $n=1$. Полученные обыкновенные нелинейные дифференциальные уравнения методом конечных разностей (с использованием центральных операторов первого приближения) преобразуем в систему нелинейных алгебраических уравнений, которая решается с использованием метода Ньютона-Канторовича [4].

На криволинейных кромках конической части уплотнительного элемента рассматривались следующие граничные условия:

– неподвижный шарнир:

$$s = l_0; \quad s = l; \quad \omega = v = u = 0;$$

$$M_1 = -D \frac{\delta}{l_1^2} \left[\frac{\partial^2 \omega}{\partial \lambda^2} + \mu \right] \left(\frac{1}{\lambda^2 \cos^2 \alpha} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + \frac{1}{\lambda} \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} \right) = 0 \tag{25}$$

– неподвижное защемление

$$s = l_0; \quad s = l_1; \quad \omega = v = u = 0; \quad \frac{\partial \omega}{\partial \lambda} = 0.$$

Численная реализация результата. Для проведения численного счета был составлен алгоритм решения на ЭВМ.

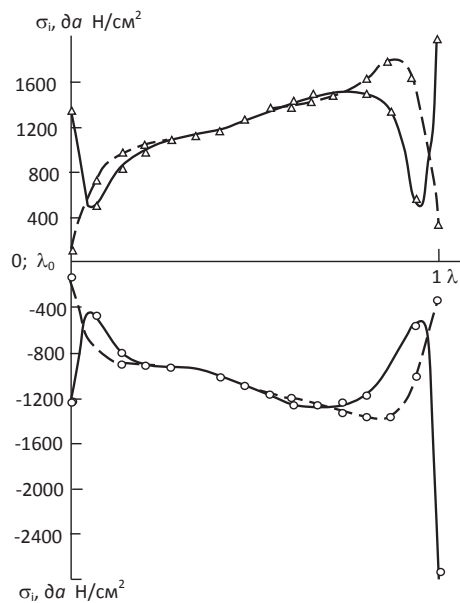
Численное решение проводилось для резины (уплотнителя) $E = 2\text{МПа}$, 4МПа , 6МПа , коэффициент Пуассона $\mu = 0,47 \div 0,485$ при различных вариантах геометрических параметров конической части уплотнительного элемента: $\alpha, \beta, \lambda_0, \Pi$.

Расчетные данные, приведенные на рисунках, соответствуют изменению напряжений и перемещений в точках, расположенных на оси 0-0 (рис. 1). Кривые, сплошными линиями, соответствуют случаю неподвижного защемления на криволинейных контурах уплотнительного элемента, а пунктирной – случаю неподвижного шарнира.

Получены изменения, характеризующие изменение изгибных напряжений в панели вдоль прямолинейной образующей – $\sigma_u^{(1)}$ в окружном напряжении – $\sigma_u^{(2)}$. На значения и характер изменения напряжений, как видно из графиков, оказывает существенное влияние вид закрепления на криволинейных кромках.

Далее можно отметить, что изгибные напряжения имеют наибольшие значения около криволинейных кромок уплотнительного элемента. При воздействии внешнего давления в уплотнительном элементе возникают от нормальных сил N_1 и N_2 нормальные напряжения $\sigma_N^{(1)}$ и $\sigma_N^{(2)}$. Расчетные данные кривые показывают, что на значения $\sigma_N^{(1)}$ почти не влияет тип закрепления, вид кривой свидетельствует о достаточном изменении $\sigma_N^{(1)}$ вдоль образующей. Напряжения $\sigma_N^{(2)}$ в большей степени подвержены влиянию краевого эффекта, а сами величины $\sigma_N^{(2)}$ существенно больше, чем $\sigma_N^{(1)}$. При некотором удалении от краев (порядка $12-20^\circ$ от длины образующей коническую часть уплотнительного элемента) влияние краевого эффекта значительно уменьшается. Изменение граничных условий оказывает меньшее влияние на $\sigma_N^{(1)}$ и $\sigma_N^{(2)}$ по сравнению с изгибными напряжениями.

Для оценки опасности напряженного состояния уплотнительного элемента определялись интенсивности напряжений σ_i в расчетных точках. Значения σ_i подсчитывались как для внешней поверхности элемента, так и для внутренней. Кривые величин σ_i показаны на рис. 2. Анализируя кривые σ_i , можно сделать следующие выводы.



$$\begin{aligned}
 \lambda_0 &= 0,47; \quad \beta = 0,821; \quad \alpha = 1,049; \\
 q &= 25,5 \text{ да Н/см}^2, \quad \Pi = 100;
 \end{aligned}$$

○ значение σ_i на внутренней поверхности панели;
 ▲ значение σ_i на внешней поверхности панели.

Рис. 2. Кривые интенсивности напряжений в расчетных точках в зависимости от параметра уплотняющего элемента

На вид графика σ_i оказывает значительное влияние тип закрепления на краях. Положение опасной точки может быть как на внутренней поверхности панели (неподвижное защемление), так и на внешней (неподвижный шарнир) – около большого криволинейного контура. В каждом конкретном случае расположение опасной области зависит от граничных условий на большом криволинейном контуре и от соотношения геометрических параметров уплотнительного элемента: $\alpha, \beta, \lambda, \Pi$.

Построились также кривые перемещений ω, v, u . Можно отметить, что величины перемещений v и u примерно на порядок меньше перемещения ω . Координаты положения максимального смещения ω меняются в зависимости от величины нагрузки, геометрических параметров уплотнительного элемента, граничных условий и лежит в пределах 7-30% величины прямолинейной образующей от большого криволинейного контура. Координаты максимумов перемещений ω, v, u и в общем случае не совпадают. Вид закрепления криволинейного контура оказывает слабое влияние на изменение величины смещения ω, v, u .

Выводы

1. Зависимость значений нагрузки от величины максимального прогиба ω показана на рис. Из рисунков видно, что на положение кривых существенное влияние оказывает параметр Π . Причем с увеличением Π податливость уплотнительного элемента возрастает, т.е. при одной и той же нагрузке величина максимального прогиба значительно увеличивается.

2. При $W > 0,6$ заметно выявляется нелинейная зависимость между ω и q . далее отметим фактическое совпадение кривых для уплотнительного элемента 1 и 2 и затем 3 и 4.

Анализ результатов. Для оценки точности полученных результатов были проведены расчеты при различных значениях M , т.е. $M = 10$, $M = 15$, $M = 20$ где M – число точек разбиения прямолинейной образующей уплотнительного элемента. Сопоставляя полученные значения перемещений при $M = 10$, $M = 15$ и $M = 20$ было отмечено, что расхождения в значениях перемещений ω находится в пределах точности реализации циклов программы. При сопоставлении расчетных значений напряжений σ_i оказалось, что для внутренних точек разбиения разброс в значениях напряжений лежит также в пределах точности реализации циклов программы. Для краевых точек расхождение в величинах напряжений оказалось порядка 12% при $M = 15$ и $M = 20$ на малом криволинейном контуре (на большом контуре разброс получился меньше) и на 48% для $M = 10$ и $M = 15$ (на большом контуре разброс также оказался меньше).

Список литературы:

1. Babanlı M.B., Mamedov G.A., Mammadov V.T., Aslanov J.N. Features of the calculation while nonstationary dynamic loadings for the downhole packer sealing. Science Innovators. International Conference on European Science and Technology. Materials of the XII International Research and Practice Conference. 42-54. Munich, Germany, July 1st-2nd, 2016.
2. Мамедов В.Т., Сулейманова А.Д. Исследование динамического эффекта сжатия ударом резинового пакерующего элемента при нелинейной деформации. Научно-технический журнал «Строительство нефтяных и газовых скважин на суше и на море», № 3, ОАО «ВНИИОЭНГ», Март 2017, с. 34-37.

Mammadov V.T., Suleymanova A.J.

Azerbaijan State Oil and Industry University

STUDY OF STRESS-DEFORMED CONDITION SEALS OF THE CYLINDRICAL SHELL CO-CONJUGATED WITH A BONDED SHELL ON THE EDGE OF LOADED EXTERNAL PRESSURE

Summary

The article deals with the study of the stress-strain state of compaction of a cylindrical shell, conjugated to a conical shell along the edge loaded by external pressure. To this end, the Kirchhoff-Lyava hypothesis was used. External pressure is considered a formation fluid (oil) of an oil well. The Vlasov-Kantarovich variational method is applied.

Keywords: borehole seal of the composite shell, strain stress, normal force, deflection.