

DOI: <https://doi.org/10.32839/2304-5809/2019-1-65-66>

УДК 528.236.4

Фис М.М., Перій С.С., Согор А.Р., Согор М.А.
Національний університет «Львівська політехніка»**ВИЗНАЧЕННЯ НАЙКОРОТШОЇ ВІДСТАНІ ТА КУТА МІЖ НОРМАЛЯМИ
ДО ЕЛІПСОЇДА ОБЕРТАННЯ ЗА КООРДИНАТАМИ ПУНКТІВ GNSS-СПОСТЕРЕЖЕНЬ**

Анотація. У даній роботі представлено методику визначення найкоротшої відстані та прямокутних координат уявної точки перетину мимобіжних прямих, а також кута між нормаллями до еліпсоїда обертання. Одержано результати обчислень прямокутних координат уявної точки перетину нормалей до еліпсоїда обертання у системі WGS-84 за даними GNSS-спостережень. Також отримано величину кута між нормаллями до референц-еліпсоїда за просторовими вимірюваннями GNSS. Слід зауважити, що практична реалізація одержання прямокутних координат уявної точки перетину мимобіжних прямих можлива завдяки методам знаходження екстремуму функції багатьох змінних. Задача обчислення кута між нормаллями до еліпсоїда обертання може бути практично реалізована методами лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Ключові слова: мимобіжні прямі, нормалі, еліпсоїд обертання, референц-еліпсоїд, система WGS-84, GNSS-спостереження, канонічні рівняння, параметричні рівняння, метод Крамера.

Fys Mykhailo, Perii Serhii, Sohor Andrii, Sohor Markiian
Lviv Polytechnic National University**DETERMINATION OF THE SHORTEST DISTANCE
AND ANGLE BETWEEN THE NORMAL TO THE ELLIPSOID
OF ROTATION BY COORDINATES OF POINTS GNSS OBSERVATIONS**

Summary. This paper presents a method for determining the shortest distance and rectangular coordinates of the imaginary point of the intersection of the adjoining lines, as well as the angle between the normal to the ellipsoid of rotation. The results of calculations of the rectangular coordinates of the imaginary point of intersection of the normal to the ellipsoid of rotation in the system WGS-84 according to GNSS observations are obtained. Also obtained is the magnitude of the angle between the normal to the reference ellipsoid for spatial measurements of GNSS. It should be noted that the practical realization of obtaining rectangular coordinates of the imaginary crossing point of the adjoining lines is possible due to the methods of finding the extremum of the function of many variables. The problem of calculating the angle between the normal to the ellipsoid of rotation can be practically realized by methods of linear algebra and analytic geometry.

Keywords: adjoining lines, normal, ellipsoid of rotation, reference ellipsoid, WGS-84 system, GNSS observations, canonical equations, parametric equations, Cramer method.

Постановка проблеми. Відомо, що основні формули геометричного та тригонометричного нівелювання отримують в площині нормального перерізу, яка проходить через точки, перевищення між якими визначається [3]. Як правило нормалі до еліпсоїда обертання, що проведені із двох пунктів спостережень не перетинаються, за винятком, якщо ці пункти розташовані на одному меридіані [2]. Кут між нормаллями до еліпсоїда обертання можна отримати, спроектувавши їх на площину нормального перерізу, який проходить через ці дві точки [7]. Оскільки прямокутні координати уявної точки перетину цих нормалей класичними методами лінійної алгебри та аналітичної геометрії знайти неможливо (даються тільки формули обчислення найкоротшої відстані між ними [1; 4; 5; 6]), то постає питання створення інших інструментів для вирішення цієї проблеми. Одним з таких підходів може бути одержання прямокутних координат уявної точки перетину мимобіжних прямих завдяки методам знаходження екстремуму функції багатьох змінних [8].

Аналіз останніх досліджень і публікацій. В останні роки поряд з традиційними способами визначення координат точок земної поверхні все частіше використовуються і сучасні супутникові GNSS-технології. Але просторові вимірюван-

ня GNSS на відповідних станціях спостережень здійснюються в різних площинах, що призводить до неминучих похибок при їх математичному опрацюванні. Один із підходів вирішення даної проблеми полягає у потребі побудови такої нормальної площини, на якій можна здійснювати всі обчислення результатів спостережень, отриманих з різних пунктів GNSS [7]. Інший підхід вирішення даної проблеми полягає у побудові такої площини, яка проходить через два пункти GNSS та деяку точку, розташовану посередині найкоротшої відстані між нормаллями до еліпсоїда обертання в цих пунктах GNSS. Оскільки нормалі до еліпсоїда обертання в пунктах GNSS можна вважати мимобіжними прямими, то перед нами постає проблема знаходження найкоротшої відстані між мимобіжними прямими та прямокутних координат точки, яка ділить даний відрізок на дві рівні частини. Але, на відміну від добре вивчених питань визначення найкоротшої відстані між мимобіжними прямими [1; 4; 5; 6], обчислення прямокутних координат уявної точки перетину мимобіжних прямих пов'язане з рядом складнощів. Насамперед, не існує загального підходу для одержання таких побудов.

Виділення невирішених раніше частин загальної проблеми. В статті приводиться практична реалізація одержання прямокутних

координат уявної точки перетину мимобіжних прямих, яка стала можливою завдяки методам знаходження екстремуму функції багатьох змінних. А також розглядається задача обчислення кута між нормальними до еліпсоїда обертання, яка може бути практично реалізована методами лінійної алгебри та аналітичної геометрії.

Постановка завдання. За даними GNSS-спостережень одержати результати обчислень найкоротшої відстані та прямокутних координат уявної точки перетину нормалей, а також кута між нормальними до еліпсоїда обертання WGS-84.

Виклад основного матеріалу. Розглянемо рис. 1, на якому зображено дві точки спостереження з відповідними геоцентричними координатами $A(x_A, y_A, z_A)$ та $B(x_B, y_B, z_B)$, які приведені до центрів знаків на поверхні Землі.

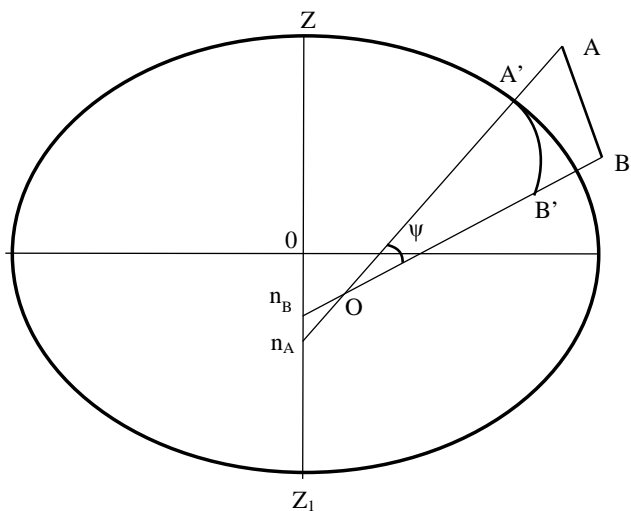


Рис. 1. Побудова нормалей на референц-еліпсоїді для визначення кута між ними

Задавши параметрами еліпсоїда (WGS-84), проведемо нормалі до нього з точок A і B . Проекція точок на поверхню еліпсоїда по нормалях буде у відповідних точках A' та B' , а самі нормалі перетнуть вісь Z у точках n_A і n_B .

Точка початку геоцентричних координат суміщена з центром мас Землі і центром референц-еліпсоїда. Координати точок перетину нормалей із віссю Z можна визначити, розрахувавши від-

далі On_A та On_B від початку координат до точок перетину [2]

$$On_A = \frac{ae^2 \sin B_A}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_A}} = -z_{0nA}, \quad (1)$$

$$On_B = \frac{ae^2 \sin B_B}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 B_B}} = -z_{0nB}, \quad (2)$$

де B_A і B_B – широти точок A і B .

Відповідно, що координати точок на осі Z будуть мати значення $n_A(0, 0, z_{0nA})$ і $n_B(0, 0, z_{0nB})$. Тому, напишемо рівняння нормалей у вигляді канонічних рівнянь [3]

$$\frac{x}{x_A} = \frac{y}{y_A} = \frac{z - z_{0nA}}{z_A - z_{0nA}}, \quad (3)$$

$$\frac{x}{x_B} = \frac{y}{y_B} = \frac{z - z_{0nB}}{z_B - z_{0nB}}. \quad (4)$$

Оскільки ці нормалі ніде не перетинаються, їх можна розглядати як мимобіжні прямі [4]. Тоді можна знайти найкоротшу відстань між ними (яку позначимо d) та координати точки P , яку назвемо уявною точкою перетину цих прямих, а також кут між мимобіжними прямими (який позначимо ψ).

Нехай прямим s_1 та s_2 відповідно належать точки $P_1(x_{p1}, y_{p1}, z_{p1})$ та $P_2(x_{p2}, y_{p2}, z_{p2})$.

Знайдемо відстань d між точками P_1 та P_2 , яка буде найменшою, тобто

$$d = \sqrt{(x_{p2} - x_{p1})^2 + (y_{p2} - y_{p1})^2 + (z_{p2} - z_{p1})^2} \rightarrow \min. \quad (5)$$

Перейдемо від канонічних рівнянь прямих s_1 та s_2 до параметричних

$$\begin{cases} x_{p1} = x_1 + m_1 \cdot t_1; \\ y_{p1} = y_1 + n_1 \cdot t_1; \\ z_{p1} = z_1 + p_1 \cdot t_1 \end{cases} \quad (6)$$

та

$$\begin{cases} x_{p2} = x_2 + m_2 \cdot t_2; \\ y_{p2} = y_2 + n_2 \cdot t_2; \\ z_{p2} = z_2 + p_2 \cdot t_2, \end{cases} \quad (7)$$

де $m_1 = x_A$, $n_1 = y_A$, $p_1 = z_A - z_{0nA}$, $m_2 = x_B$, $n_2 = y_B$, $p_2 = z_B - z_{0nB}$.

Підставимо рівняння (6) та (7) у рівність (5). Одержимо

$$d = \sqrt{(\Delta x + m_2 t_2 - m_1 t_1)^2 + (\Delta y + n_2 t_2 - n_1 t_1)^2 + (\Delta z + p_2 t_2 - p_1 t_1)^2} \rightarrow \min. \quad (8)$$

Відстань d буде функцією параметрів t_1 та t_2 .

Необхідною умовою мінімуму функції d буде рівність нулевій її часткових похідних, тобто

$$\begin{cases} \frac{\partial d}{\partial t_1} = -\frac{2}{2d} [(\Delta x + m_2 t_2 - m_1 t_1) \cdot m_1 + (\Delta y + n_2 t_2 - n_1 t_1) \cdot n_1 + (\Delta z + p_2 t_2 - p_1 t_1) \cdot p_1] = 0; \\ \frac{\partial d}{\partial t_2} = \frac{2}{2d} [(\Delta x + m_2 t_2 - m_1 t_1) \cdot m_2 + (\Delta y + n_2 t_2 - n_1 t_1) \cdot n_2 + (\Delta z + p_2 t_2 - p_1 t_1) \cdot p_2] = 0. \end{cases}$$

Після скорочень одержимо систему лінійних рівнянь

$$\begin{cases} + (m_1^2 + n_1^2 + p_1^2) \cdot t_1 - (m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2) \cdot t_2 - (m_1 \Delta x + n_1 \Delta y + p_1 \Delta z) = 0; \\ - (m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2) \cdot t_1 + (m_2^2 + n_2^2 + p_2^2) \cdot t_2 + (m_2 \Delta x + n_2 \Delta y + p_2 \Delta z) = 0. \end{cases} \quad (9)$$

В матричній формі система лінійних рівнянь (9) прийме вигляд

$$AT - L = 0, \quad (10)$$

де

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, T = \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}, L = \begin{pmatrix} l_1 \\ l_2 \end{pmatrix}.$$

Елементи матриць A та L , згідно системи рівнянь (9), одержимо з формул

$$\begin{cases} a_{11} = m_1^2 + n_1^2 + p_1^2; \\ a_{12} = a_{21} = -(m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2); \\ a_{22} = m_2^2 + n_2^2 + p_2^2; \\ l_1 = m_1 \Delta x + n_1 \Delta y + p_1 \Delta z; \\ l_2 = -(m_2 \Delta x + n_2 \Delta y + p_2 \Delta z). \end{cases} \quad (11)$$

Розв'яжемо матричне рівняння (10), наприклад, методом Крамера [1]. Тобто

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}; \\ \Delta_1 &= \begin{vmatrix} l_1 & a_{12} \\ l_2 & a_{22} \end{vmatrix} = a_{22} \cdot l_1 - a_{12} \cdot l_2; \\ \Delta_2 &= \begin{vmatrix} a_{11} & l_1 \\ a_{21} & l_2 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot l_2 - a_{21} \cdot l_1. \end{aligned}$$

Звідки елементи невідомої матриці T отримаємо з формул [1]

$$\begin{cases} t_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \\ t_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}. \end{cases} \quad (12)$$

Тоді значення параметрів t_1 і t_2 підставимо у рівняння (6) та (7) відповідно і одержимо координати точок $P_1(x_{p1}, y_{p1}, z_{p1})$ та $P_2(x_{p2}, y_{p2}, z_{p2})$ на прямих s_1 та s_2 .

Відстань d між знайденими точками буде мінімальною. Вона і буде найкоротшою відстанню між мимобіжними прямими, яка обчислюється за формулою (5).

Тоді уявна точка P перетину мимобіжних прямих s_1 та s_2 буде мати координати

$$\begin{cases} x_p = \frac{x_{p1} + x_{p2}}{2}; \\ y_p = \frac{y_{p1} + y_{p2}}{2}; \\ z_p = \frac{z_{p1} + z_{p2}}{2}. \end{cases} \quad (13)$$

Кут ψ між мимобіжними прямими знайдемо із формули скалярного добутку двох векторів \vec{s}_1 та \vec{s}_2 [4]

$$\cos \psi = \frac{(\vec{s}_1, \vec{s}_2)}{|\vec{s}_1| \cdot |\vec{s}_2|}, \quad (14)$$

де

$$(\vec{s}_1, \vec{s}_2) = m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 \quad (15)$$

– скалярний добуток векторів \vec{s}_1 та \vec{s}_2 ;

$$|\vec{s}_1| = \sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2}, \quad (16)$$

$$|\vec{s}_2| = \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2} \quad (17)$$

– довжини векторів \vec{s}_1 та \vec{s}_2 відповідно.

Підставивши рівності (15) – (17) у формулу (14), одержимо

$$\cos \psi = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_2^2}}. \quad (18)$$

Або, із врахуванням позначень на рис. 1, кут ψ між двома прямими (нормаліями) у просторі знайдемо за формулою [3]

$$\cos \psi = \frac{x_A x_B + y_A y_B + (z_A - z_{0nA})(z_B - z_{0nB})}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2 + (z_A - z_{0nA})^2} \cdot \sqrt{x_B^2 + y_B^2 + (z_B - z_{0nB})^2}}. \quad (19)$$

Величина кута ψ залежить від відстані між пунктами спостереження і несе в собі інформацію про кривину Землі та заміняє значення середнього радіусу кривини Землі у тригонометричному нівелюванні. Але для визначення цього кута необхідно знати геоцентричні координати пунктів. Такі визначення можна виконати за допомогою GNSS-спостережень.

Результати обчислень найкоротшої відстані та кута між нормаліями до еліпсоїда обертання WGS-84 за координатами пунктів GNSS-спостережень наведемо у таблиці 1.

Висновки з даного дослідження та перспективи. Представлено методику визначення найкоротшої відстані між мимобіжними прямими методами математичного аналізу (методами знаходження екстремуму функції багатьох змінних). Вище описана методика дає можливість знаходити координати уявної точки перетину цих мимобіжних прямих.

За даними GNSS-спостережень одержано результати обчислень найкоротшої відстані та прямокутних координат уявної точки перетину нормалей, а також кута між нормаліями до еліпсоїда обертання WGS-84.

Таблиця 1

Найкоротша відстань та кут між нормаліями до еліпсоїда обертання за координатами пунктів GNSS-спостережень

Пункти GNSS-спостережень		Координати уявної точки перетину нормалей (м)			Відстань (м)	Кут (°)
		X_p	Y_p	Z_p		
STVR	OGZ-2-1A	1463.1245	760.8979	-30179.7600	1.0014	32.372
GZ-10	GZ-11A	5335.3108	2774.4857	-25245.0340	0.0833	1.825
GZ-10	GZ-11B	5340.2482	2777.0377	-25238.7710	0.1232	2.698
GZ-10	GZ-12	5309.9583	2761.2544	-25277.4380	0.2047	4.486
GZ-11A	GZ-11B	5408.9056	2812.7079	-25151.3250	0.0398	0.873
GZ-11A	GZ-12	5301.3790	2756.7606	-25288.4360	0.1214	2.661
GZ-11B	GZ-12	5279.6284	2745.4347	-25316.1880	0.0815	1.787

Список літератури:

1. Беклемишев Д.В. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры. – Москва: Издательство «Наука», 1984. – 320 с.
2. Закатов П.С. Курс высшей геодезии. – Москва: Издательство «Недра», 1976. – 511 с.
3. Марченко О.М. Референсні системи в геодезії: навчальний посібник / О.М. Марченко, К.Р. Третяк, Н.П. Ярема. – Львів: Видавництво Львівської політехніки, 2013. – 216 с.
4. Привалов И.И. Аналитическая геометрия. Учебник для высших технических учебных заведений. – Москва: Издательство «Наука», 1966. – 272 с.
5. Рудавський Ю.К., Костробій П.П., Уханська Д.В. Збірник задач з лінійної алгебри та аналітичної геометрії. – Львів: Видавництво «Бескид Біт», 2002. – 256 с.
6. М.І. Шкіль, Т.В. Колеснік, В.М. Котлова. Вища математика. Книга 1. – К.: "Либідь", 1994. – 279 с.
7. Перій С.С., Фис М.М., Согор А.Р., Согор М.А. Побудова площини нормального перерізу для виконання тригонометричного нівелювання за просторовими вимірюваннями GNSS // Сучасні досягнення геодезичної науки та виробництва: збірник наукових праць Західного геодезичного товариства УТГК. – 2018. – Вип. 2(36). – С. 32-35.
8. М.О. Давидов. Курс математичного аналізу. Ч. 1-3. К.: Вища школа, 1990–1991–1992.