УДК 519.21

О ПРИМЕНЕНИИ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В МАТЕРИАЛОВЕДЕНИИ

БОЛЬШАКОВ В. И.[1], *д. т. н., проф.,*
ВОЛЧУК В. Н.[2*], *д. т. н., доц.,*
ДУБРОВ Ю. И.[3], *д. т. н., проф.*

[1] Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473
[2*] Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786
[3] Кафедра материаловедения и обработки материалов, Государственное высшее учебное заведение «Приднепровская государственная академия строительства и архитектуры», ул. Чернышевского, 24-а, 49600, Днепропетровск, Украина, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Аннотация. Постановка проблемы. Важной частью статистического эксперимента является получение последовательности чисел с определенными характеристиками. Для моделирования любого заранее заданного случайного процесса необходимо уметь достаточно экономно строить последовательности случайных чисел, соответствующих некоторым фиксированным законам распределения. Для того, чтобы получить значение случайной величины с заданным законом распределения, обычно используют одно или несколько значений равномерно распределенных случайных чисел. Поэтому вопрос разработки методов получения равномерно распределенных случайных чисел на ЭВМ имеет особое значение, существенно влияющее на применение имитационного моделирования в практике решения задач с большим числом переменных. ***Цель работы.*** Определение сходимости модели с реальностью. ***Основная часть.*** Модель бильярдной задачи позволяет поставить эксперименты, направленные на исследование диссипативных систем с хаотическим слоем в промежуточной области, который может возникать при определенных условиях. При этом для придания «большей хаотичности» в условия опыта была включена возможность задания деформации бортов бильярда путем перманентного изменения их эллипсоидности и постоянного движения шаров-отражателей по заданной траектории. Модель, описывающая такие системы, обладает чувствительностью к начальным данным и имеет две близкие траектории, которые с течением времени будут удаляться друг от друга. Как сравнить в этом случае результаты теории с экспериментом? Малая неточность в определении начального состояния системы приводит к тому, что различие между траекторией, предсказанной теоретически, и экспериментальными данными будет расти. Причина этого явления − не недостатки модели, а природа изучаемых явлений. ***Выводы.*** Выходом из сложившейся ситуации является сравнение не траектории изображающей точки модели и объекта на одни и те же моменты времени, а некоторых более сложных характеристик, определяющих внутренние свойства изучаемых процессов.

Ключевые слова: имитационное моделирование, бильярдная задача, случайные числа, метод Монте-Карло, синергетика

ПРО ЗАСТОСУВАННЯ ІМІТАЦІЙНОГО МОДЕЛЮВАННЯ В МАТЕРІАЛОЗНАВСТВІ

БОЛЬШАКОВ В. І.[1], *д. т. н., проф.,*
ВОЛЧУК В. М.[2*], *д. т. н., доц.,*
ДУБРОВ Ю. І.[3], *д. т. н., проф.*

[1] Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473
[2*] Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@yandex.ua, ORCID ID: ORCID ID: 0000-0001-8717-6786
[3] Кафедра матеріалознавства та обробки матеріалів, Державний вищий навчальний заклад «Придніпровська державна академія будівництва та архітектури», вул. Чернишевського, 24-а, 49600, Дніпропетровськ, Україна, тел. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Анотація. Постановка проблеми. Важливою частиною статистичного експерименту є одержання послідовності чисел із певними характеристиками. Для моделювання будь-якого заздалегідь заданого випадкового процесу необхідно вміти достатньо економно будувати послідовності випадкових чисел, що відповідають деяким фіксованим законам розподілу. Для того, щоб одержати значення випадкової величини із заданим законом розподілу, звичайно використовують одне або декілька значень рівномірно розподілених випадкових чисел. Тому питання розроблення методів одержання рівномірно розподілених випадкових чисел на ЕОМ має особливе значення, що істотно впливає на застосування імітаційного моделювання в практиці розв'язання задач із більшим числом змінних. ***Мета роботи.*** Визначення збіжності моделі з реальністю. ***Основна частина.*** Модель більярдної задачі дозволяє поставити експерименти, спрямовані на дослідження дисипативних систем із хаотичним шаром у проміжній області, що може виникати за певних умов. При цьому для додання «більшої хаотичності» в умови досліду була включена можливість завдання деформації бортів більярда, шляхом перманентної зміни їх еліпсоїдності, і постійного руху куль-відбивачів по заданій траєкторії. Модель, що описує такі системи, має чутливість до початковим даних і дві близькі траєкторії, котрі із плином часу будуть віддалятися одна від одної. Як порівняти в цьому випадку результати теорії з експериментом? Мала неточність у визначенні початкового стану системи зумовлює те, що розходження між траєкторією, прогнозованою теоретично, і експериментальними даними буде зростати. Причина цього явища – не недоліки моделі, а природа досліджуваних явищ. ***Висновки.*** Виходом зі сформованої ситуації є порівняння не траєкторії точки зображеної моделі та об'єкта на ті самі моменти часу, а деяких більш складних характеристик, що визначають внутрішні властивості досліджуваних процесів.

Ключові слова: імітаційне моделювання, більярдна задача, випадкові числа, метод Монте-Карло, синергетика

THE APPLICATION SIMULATED MODELLING IN MATERIALS SCIENCE

BOL'SHAKOV V. I.[1], Dr. Sc. (Tech.), Prof.,
VOLCHUK V. M. [2], Dr. Sc. (Tech.), Prof.,*
DUBROV Yu. I.[3], Dr. Sc. (Tech.), Prof.

[1] Department of Materials Science, State Higher Education Establishment Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture, 24-a, Chernishevskogo str., Dnipropetrovsk 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: bolshakov@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0003-0790-6473
[2*] Department of Materials Science, State Higher Education Establishment "Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernishevskogo str., Dnipropetrovsk 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: volchuky@yandex.ua, ORCID ID: 0000-0001-8717-6786
[3] Department of Materials Science, State Higher Education Establishment "Pridneprovsk State Academy of Civil Engineering and Architecture", 24-a, Chernishevskogo str., Dnipropetrovsk 49600, Ukraine, tel. +38 (0562) 47-39-56, e-mail: mom@mail.pgasa.dp.ua, ORCID ID: 0000-0002-3213-4893

Abstract. Formulation of the problem. An important part of the experiment is to obtain a random number sequence with specific characteristics. To simulate any predetermined random process must be able to build enough economical sequence of random numbers corresponding to certain fixed laws of distribution. To obtain the value of the random variable with given distribution, typically use one or more values are uniformly distributed random numbers. Therefore the question of the development of methods for obtaining a uniformly distributed random numbers on a computer has a special meaning, a significant effect on the use of simulation in the practice of solving problems with a large number of variables. ***Objective.*** The definition of convergence model with reality. ***Main part.*** Model billiard problem allows an experiment aimed at the study of dissipative systems with chaotic layer in the intermediate region, which may occur under certain conditions. At the same time, to give the "most chaotic", in terms of experience has enabled the possibility of job strain sides of billiards by permanent changes in their ellipsoidal, and the constant movement of the balls-reflectors along a predetermined path. The model describing such systems is sensitive to the initial data, and the two close paths over time, which will be removed from each other. As compared to this case, the results of theory and experiment? Small inaccuracies in the determination of the initial state of the system leads to the fact that the difference between the trajectory predicted by theory and experimental data will increase. The reason for this phenomenon is not disadvantages of the model and the nature of the phenomena studied. ***Conclusions.*** The way out of this situation is not a comparison of the trajectory of the image point of the object model and at the same times, and some of the more complex characteristics that determine the intrinsic properties of the processes under study.

Keywords: simulated, billiard challenge, random numbers, Monte Carlo, synergetics

Постановка проблемы

Всякое случайное событие имеет вполне определенную причину. Эта причина является следствием какой-то иной причины и т. д. Если цепь причин и следствий поддаётся осмыслению, то событие можно считать детерминированным, т. е. таким, в котором части, из которых состоит система, однозначно взаимодействуют точно определенным образом. Поведение такой системы можно с полной уверенностью предсказать в любой момент [1]. Случайными (вероятностными) будем называть системы, части которых находятся под влиянием относительно большого числа воздействий, так, что взаимодействие всех частей не может быть точно описано. Предсказуемость случайных событий может трактоваться как выделение интересующего нас сигнала на фоне помех [2], где помехи могут моделироваться последовательностью случайных чисел.

До настоящего времени существовало три основных метода получения случайных чисел:

– физический метод, который используется при составлении таблиц случайных чисел;

– физико-технический метод, характеризующийся применением дополнительного оборудования;

– программный метод, с помощью которого получают последовательности псевдослучайных чисел на основе рекуррентных соотношений.

Важные моменты, связанные с представлением о случайности, отмечались многими учеными, подытожив которые, Старфорд Бир [3] отметил, что если имеется последовательность чисел, то она, просто в силу своего существования, не может быть случайной. При этом он же указывает, что возможны два выхода из сложившегося положения. Первый − это придание представлению о случайности относительного смысла. Второй выход – это замена представления о случайности каким-нибудь другим подходящим представлением, для которого можно придумать метод измерения. На этом пути возникла алгоритмическая теория сложности, идея которой принадлежит А. Н. Колмогорову [4]. Данная теория сводится к тому, что случайными являются лишь те последовательности, описать которые нельзя иначе (и короче), чем просто переписыванием их самих. Такой подход приводит, как показано в [5], к критериям случайности, бракующим практически все известные генераторы случайных чисел (ГСЧ).

Важной частью статистического эксперимента является получение последовательности чисел с определенными характеристиками. Для моделирования любого заранее заданного случайного процесса необходимо уметь достаточно экономно строить последовательности случайных чисел, соответствующих некоторым фиксированным законам распределения. Для того, чтобы получить значение случайной величины с заданным законом распределения, обычно используют одно или несколько значений равномерно распределенных случайных чисел. Поэтому вопрос разработки методов получения равномерно распределенных случайных чисел на ЭВМ имеет особое значение, существенно влияющее на применение имитационного моделирования в практике решения задач с большим числом переменных. Особенно широко начали использовать случайные числа с момента применения так называемого метода Монте-Карло при решении численных задач [6; 7].

Поясним суть метода Монте-Карло на практической задаче – вычислении площади сложной фигуры [8].

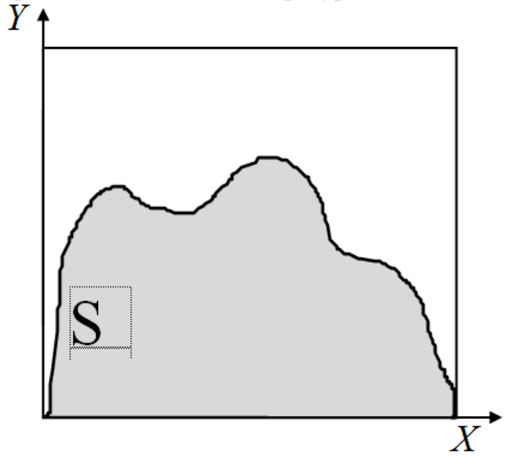

Рис. 1. Пример вычисления площади фигуры методом Монте-Карло / Fig. 1. Example of calculating the area of the figure Monte Carlo

На квадрат, в котором расположена фигура (рис. 1), площадь которой следует определить, набрасывают случайные точки $A_1, A_2, ..., A_n$. Каждая точка характеризуется координатами X и Y, т. е. $A_1 = (x_1, y_1)$, $A_2 = (x_2, y_2), ...$.

Если случайные числа X и Y будут равномерными в интервале [0,1), то и точки $A_1, A_2, ..., A_n$ равномерно покроют поверхность квадрата.

Пусть N_1 – общее число точек, а N_2 – число точек, попавших на фигуру S. Очевидно, что N_1 – пропорционально площади квадрата, а N_2 – пропорционально площади фигуры. Поэтому площадь фигуры можно оценить по формуле:

$$S = S_1 \frac{N_2}{N_1},$$

где S_1 – площадь квадрата.

Следует отметить, что в рамках случайного поиска метод Монте-Карло оказался всего лишь частным случаем, поскольку соответствует так называемому ненаправленному случайному поиску. Для этого выделяется некоторая замкнутая область фазового пространства, которая с течением времени непрерывно деформируется. При этом типичными оказываются две ситуации.

1. Выделенная область сохраняет свой объем, хотя сложным образом может изгибаться и растягиваться. Сохранение фазового объема связано с тем, что в таких системах сохраняется энергия.

2. Фазовый объем непрерывно уменьшается. Другими словами, число состояний, в которых может находиться система, становится меньше.

Это свойство является признаком самоорганизации, и его называют диссипативностью.

Модели процессов экологии, химических реакций, развития экономики, материаловедения (например, процессы кристаллизации металлов, происходящие при неравновесных термодинамических условиях, которые отражаются на величине дендритов, растущих из центров кристаллизации), а также сотен других процессов и явлений приводит к диссипативным системам.

В последнее время в синергетике стали активно изучать еще одно явление – перемешивающий слой (например, плавление металла, когда одновременно существуют твердое и жидкое состояния). Этот слой играет очень важную роль в процессе генерации ценной информации. Речь идет о диссипативных системах, имеющих несколько простых устойчивых стационарных состояний. Однако заранее предсказать, в какое устойчивое состояние попадет система, практически невозможно (при кристаллизации в железо добавляют, например, тугоплавкие соединения – вольфрам, что изменяет время кристаллизации и характер протекания процессов). В промежуточной области имеется хаотический слой. Строго говоря, он не является аттрактором (областью притяжения), поскольку траектории с одной стороны в него входят, а с другой – выходят.

Однако свойство «странности», т. е. непредсказуемости, в нем имеется. К таким системам относятся также и процессы кристаллизации металлов, игры и т. д. Вероятно, популярность азартных игр заключается в том, что они имитируют процесс генерации ценной информации, т. е. процесс, к которому каждый человек прибегает в реальной жизни. В данном контексте под ценной информацией понимается предсказание хода событий.

Цель работы. Определение сходимости модели с реальностью.

Основная часть

Модель бильярдной задачи [9–13] позволяет поставить эксперименты, направленные на исследование диссипативных систем с хаотическим слоем в промежуточной области, который может возникать при определенных условиях.

При этом, для придания «большей хаотичности», в условия опыта была включена возможность задания кривизны бортов бильярда, путем перманентного изменения их эллипсоидности, и постоянного движения шаров-отражателей по заданной траектории (на рис. 2 эти траектории указаны пунктиром).

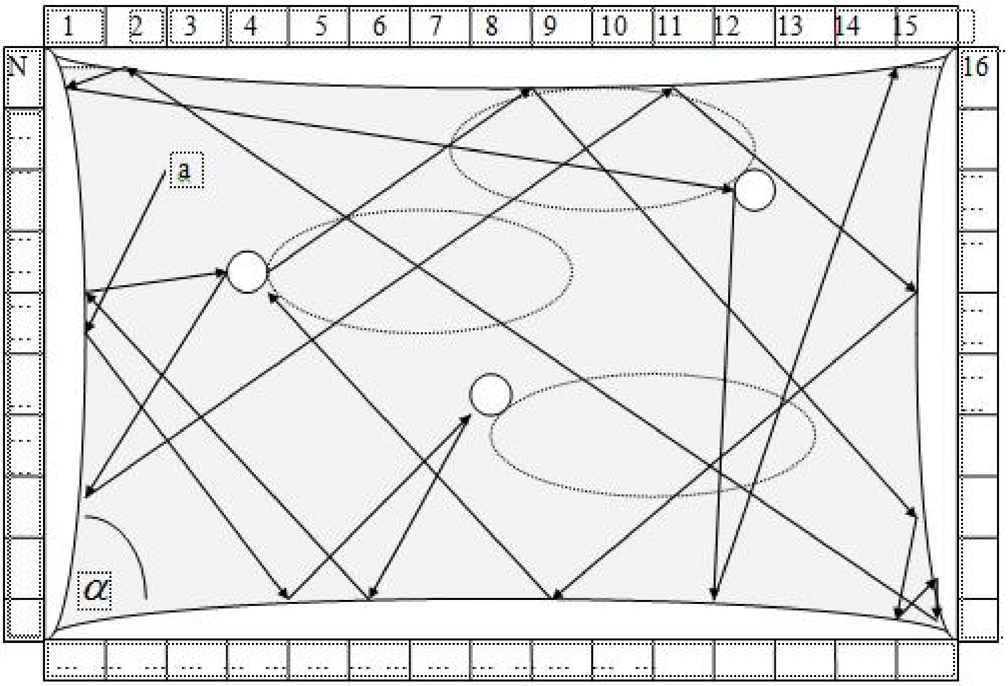

Рис. 2. Бильярд с перманентно изменяющимися радиусами кривизны бортов / Fig. 2. Billiards with permanently changing radii of curvature of the sides

В этих условиях хаотический режим возникает лишь в некоторых областях фазового пространства, как это показано на графике рисунка 3, который был получен по результатом анализа одного из экспериментов (Модель бильярдной задачи Дуброва, реализованная на ЭВМ [9]). Области притяжения на рисунке 3 – углы, образованные пересечением эллиптических кривых (бортов бильярда, например, угол α).

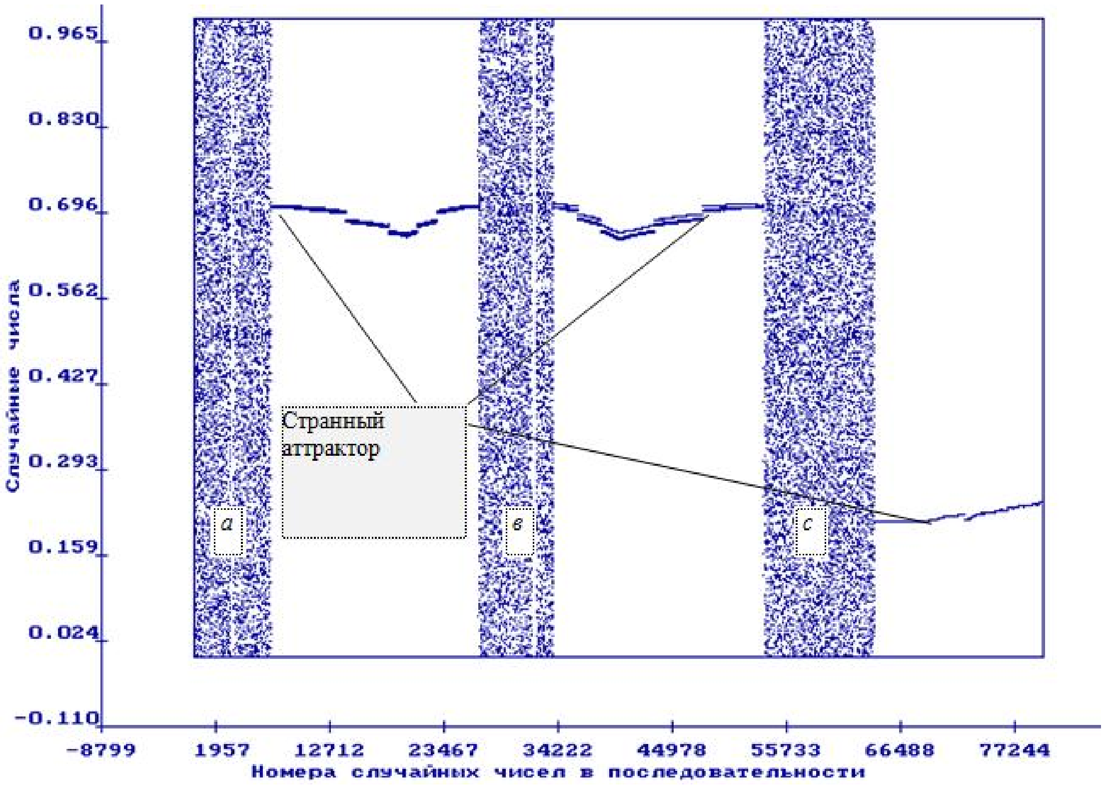

Рис. 3. Результаты экспериментов, полученных на модели бильярдной задачи, поставленной на ЭВМ / Fig. 3. The experimental results obtained on the model of the billiard problem posed by computer

В момент попадания изображающей точки в площадь, ограниченную этим углом, она все более в него углубляется, отражаясь от эллиптических бортов. Изображающая точка находится в пределах этой «притягивающей» области до тех пор, пока радиус кривизны эллиптических бортов не начнет согласно программе уменьшаться, и когда он достигнет некоторого критического значения, изображающая точка выходит из этой области и хаотический режим возобновляется. Этот режим представлен областями *а, в* и *с* на графике рисунка 3. Если не запоминать начальные условия, то после того, как система перейдет к стационарному состоянию, будет невозможно указать, из какой именно начальной точки (на рисунке 3 точка «а») она попала в аттрактор. Можно лишь утверждать, что начальные условия находились в области притяжения.

Как уже отмечалось, если выделить некоторую замкнутую область фазового пространства, то с течением времени она будет непрерывно деформироваться, сохраняя свой объем или уменьшая его. Уменьшение этого объема характеризует процессы самоорганизации. Если количество точек, попадающих в эту область, отождествить с ее объемом, то, при относительно длительном испытании, можно проверить наличие процесса самоорганизации в выбранной области.

Модель, описывающая такие системы, обладает чувствительностью к начальным условиям и имеет две близкие траектории, которые с течением времени будут удаляться друг от друга. Как сравнить в этом случае результаты теории с экспериментом? Малая неточность в определении начального состояния системы приводит к тому, что различия между траекторией, предсказанной теоретически, и экспериментальными данными будут расти. Причина этого явления – не недостатки модели, а природа изучаемых явлений.

Выводы

Выходом из сложившейся ситуации является сравнение не траектории изображающей точки модели и объекта на одни и те же моменты времени, а некоторых более сложных характеристик, определяющих внутренние свойства изучаемых процессов.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ / REFERENCES

1. Чернавский Д. С. Синергетика и информация. Динамическая теория хаоса / Д. С. Чернавский. – Москва : Наука, 2001. – 105 с.

Chernavskiy D. S. *Sinergetika i informaciya. Dinamicheskaya teoriya haosa* [Synergetics and Information. Dynamic chaos theory]. Moscow: Nauka Publ., 2001. 105 p. (in Russian).

https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%A7%D0%B5%D1%80%D0%BD%D0%B0%D0%B2%D1%81%D0%BA%D0%B8%D0%B9,_%D0%94%D0%BC%D0%B8%D1%82%D1%80%D0%

B8%D0%B9_%D0%A1%D0%B5%D1%80%D0%B3%D0%B5%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87

2. Шеннон К. Работы по теории информации и кибернетике / К. Шеннон. – Москва : Изд-во иностр. лит., 1963. – 830 с.

Shennon K. *Raboty po teorii informacii i kibernetike* [Works on information theory and cybernetics]. Moscow : Foreign Lit. Publ., 1963. 830 p. (in Russian).
http://www.dissercat.com/content/kombinatorno-informatsionnaya-otsenka-slozhnosti-pri-sinteze-diskretnykh-upravlyayushchikh-u

3. Бир С. Кибернетика и управление производством / С. Бир. – Москва : Наука, 1963. – 276 с.

Bir S. *Kibernetika i upravlenie proizvodstvom* [Cybernetics and production management]. Moscow : Nauka Publ., 1963. 276 p. (in Russian).
http://www.newlibrary.ru/book/bir_st_/kibernetika_i_upravlenie_proizvodstvom.html

4. Колмогоров А. Н. Теория информации и теория алгоритмов / А. Н. Колмогоров. – Москва : Наука, 1987. – 304 с.

Kolmogorov A. N. *Teoriya informacii i teoriya algoritmov* [Theory and information theory of algorithms]. Moscow : Nauka Publ., 1987. 304 p. (in Russian).
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9A%D0%BE%D0%BB%D0%BC%D0%BE%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B5%D0%B9_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87

5. Журбенко И. Г. Определение критической длины последовательности псевдослучайных чисел / И. Г. Журбенко, И. А. Кожевникова, О. В. Клиндоухова // Вероятностно-статистические методы исследования. – Москва : Изд-во МГУ, 1983. – С. 18–39.

Zhurbenko I. G., Kozhevnikova I. A., Klindoukhova O. V. *Opredelenie kriticheskoj dliny posledovatel'nosti psevdosluchajnyh chisel* [Determination of the critical length of the pseudo-random number]. Probabilistic and statistical research methods. Moscow : MGU Publ., 1983. Pp. 18–39. (in Russian).
http://www. dopovidi.nas.gov.ua/2011-02/11-02-13.pdf

6. Бусленко Н. П. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) / Н. П. Бусленко, Д. И. Голенко, И. М. Соболь и др. – Москва : Физматгиз, 1962. – 332 с.

Buslenko N. P., Golenko D. I., Sobol' I. M. & oth. *Metod statisticheskih ispytanij (metod Monte-Karlo)* [Method of statistical tests (Monte Carlo)]. Moscow : Fizmatgiz Publ., 1962. 332 p. (in Russian).
http://lib.uni-dubna.ru/biblweb/search/rubrsearch.asp?ID=259&allcount=269&dbeg=251

7. Браун Дж. Методы Монте-Карло [Текст] / Дж. Браун // Современная математика для инженеров. Под ред. Э. Ф. Беккенбаха. – Москва : Изд-во иностр. лит., 1958. – 500 с.

Braun Dzh. *Metody Monte-Karlo [Tekst]* [Monte Carlo Methods [Text]]. Contemporary Mathematics for Engineers. Edited by E. F. Bekkenbah. Moscow : Foreign Lit. Publ., 1958. 500 p. (in Russian).
http://journals.uran.ua/eejet/article/view/18728

8. Бусленко Н. П. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло) и его реализация в цифровых машинах / Н. П. Бусленко, Ю. А. Шрейдер. – Москва : Физматгиз, 1961. – 226 с.

Buslenko N. P., Shreyder Yu. A. *Metod statisticheskih ispytanij (metod Monte-Karlo) i ego realizaciya v cifrovyh mashinah* [The method of statistical tests (Monte Carlo) and its implementation in digital machines]. Moscow : Fizmatgiz Publ., 1961. 226 p. (in Russian).
http://sernam.ru/book_dm.php?id=84

9. Дубров Ю. И. Исследования имитационной модели «бильярдной задачи», а также ее применение в практике преподавания синергетики / Матер. междунар. науч. конф. «Математика. Компьютер. Образование» [26–31 января, 1998 г., Россия]. – Дубна, 1998. – С. 71–83.

Dubrov Yu. I. *Issledovaniya imitatsionnoy modeli «bilyardnoy zadachi», a takzhe ee primenenie v praktike prepodavaniya sinergetiki* [Research simulation model "billiard problem", as well as its application in practice of teaching of synergy]. Mater. Intern. Scientific. Conf. "Mathematics. Computer. Education". Dubna. 26–31 of Jan., 1998. (Russia). Pp. 71–83. (in Russian).
http://journals.uran.ua/index.php/2312-2676/article/view/41126/0

10. Земляков А. Н. Математические бильярды / А. Н. Земляков, Г. А. Гальперин – Москва : Наука, 1990. – 290 с.

Zemlyakov A. N., Gal'perin G. A. Matematicheskiye bil'yardy [Mathematical billiards]. Moscow : Science Publ., 1990. 290 p. (in Russian).
http://sevntu.com.ua/cgi-bin/irbis64r_72/cgiirbis_64.exe?LNG=uk&Z21ID=&I21DBN=BOOK_PRINT&P21DBN=BOOK&S21STN=1&S21REF=&S21FMT=fullw_print&C21COM=S&S21CNR=&S21P01=0&S21P02=0&S21P03=S=&S21STR=%D0%90%D1%82%D0%BE%D0%BC%D0%BD%D0%B0%D1%8F%20%D1%84%D0%B8%D0%B7%D0%B8%D0%BA%D0%B0

11. Кориолис Г. Г. Математическая теория явлений бильярдной игры / Г. Г. Кориолис. – Москва : Гостехиздат, 1956. – 235 с.

Coriolis G. G. *Matematicheskaya teoriya yavlenij bil'yardnoj igry* [Mathematical Theory phenomena snooker]. Moscow : Gostekhizdat, 1956. 235 p. (in Russian).
http://publ.lib.ru/ARCHIVES/K/KORIOLIS_Gaspar_Gyustav/_Koriolis_G.G..html#002

12. Борахеостов В. Бильярды / В. Борахеостов // Наука и жизнь. – 1966. – №№ 2–4, 6, 11.

Borakheostov V. *Bil'yardy* [Billiards]. Science & Life, 1966. № № 2−4, 6, 11. (in Russian).
http://e-book.in.ua/zhurnaly/nauchniy-jurnal/31819-arhiv-zhurnalov-nauka-i-zhizn.html

13. Гальперин Г. А. Математические бильярды (бильярдные задачи и смежные вопросы математики и механики) / Г. А. Гальперин, А. Н. Земляков – Москва : Наука, 1990. – 288 с.

Gal'perin G. A., Zemlyakov A. N. *Matematicheskiye bil'yardy (bil'yardnyye zadachi i smezhnyye voprosy matematiki i mekhaniki)* [Mathematical billiards (billiard problem and related problems of mathematics and mechanics)]. Moscow : Science Publ., 1990. 288 p. (in Russian).
https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%97%D0%B5%D0%BC%D0%BB%D1%8F%D0%BA%D0%BE%D0%B2,_%D0%90%D0%BB%D0%B5%D0%BA%D1%81%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80_%D0%9D%D0%B8%D0%BA%D0%BE%D0%BB%D0%B0%D0%B5%D0%B2%D0%B8%D1%87

Статья поступила в редколлегию 10.11.2015

Принята к печати 12.11.2015