УДК 531.383

©2013. **А.В. Гладун**

УПРАВЛЕНИЕ И СТАБИЛИЗАЦИЯ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ СПУТНИКА С ПОМОЩЬЮ ДВУХ ГИРОДИНОВ

Исследуется задача управления и стабилизации спутника, который несет два гиродина. Получены управления, обеспечивающие остановку вращения и перевод спутника в противовращение в окрестности положения равновесия с заданной степенью точности. Построены управления, которые осуществляют стабилизацию нулевой угловой скорости спутника и стабилизацию спутника в направлении заданного орта. При построении исходная система уравнений приводится к системе специального вида, для которой стабилизация достигается путем выбора собственных чисел матрицы линейного приближения. Как мнимые, так и действительные части собственных чисел этой матрицы подбираются таким образом, чтобы минимизировать норму управления с обратной связью. Приведены результаты численного моделирования.

Ключевые слова: *спутник, гиродин, положение равновесия, управляемость по части переменных, стабилизируемость.*

1. Постановка задачи. Рассмотрим механическую систему, состоящую из спутника (носителя) и двух гиродинов, определенным образом расположенных на носителе. Спутник – твердое тело, гиродин – двухстепенная гироскопическая система, состоящая из ротора и гирокамеры. Ротор закреплен внутри гирокамеры и вращается с постоянной угловой скоростью. Пусть ротор является шаровым, а гирокамера динамически симметрична относительно своей оси вращения. Запишем уравнения движения твердого тела, несущего два ($s = 2$) гиродина [1], оси вращения которых параллельны и не совпадают ни с одной из координатных осей. Обозначим через $\boldsymbol{l}_j$, $\boldsymbol{n}_j$ орты осей вращения гирокамеры и ротора j-го гиродина соответственно, $\boldsymbol{k}_j = \boldsymbol{l}_j \times \boldsymbol{n}_j$. Пусть $\boldsymbol{k}_{0j}, \boldsymbol{l}_{0j}, \boldsymbol{n}_{0j}$ – правая тройка взаимно ортогональных ортов, задающих начальное расположение гиродина в носителе. Углы поворота гирокамеры относительно носителя и ротора относительно гирокамеры отсчитываются от положения, в котором $(\boldsymbol{k}_j, \boldsymbol{l}_j, \boldsymbol{n}_j) = (\boldsymbol{k}_{0j}, \boldsymbol{l}_{0j}, \boldsymbol{n}_{0j})$. В качестве исходных ортов примем следующие

$$\boldsymbol{k}_{01} = \boldsymbol{k}_{02} = \left(\frac{6}{35}, \frac{6}{7}, -\frac{17}{35}\right)^*, \quad \boldsymbol{l}_{01} = -\,\boldsymbol{l}_{02} = \left(\frac{2}{7}, \frac{3}{7}, \frac{6}{7}\right)^*,$$

$$\boldsymbol{n}_{01} = -\,\boldsymbol{n}_{02} = \left(\frac{33}{35}, -\frac{2}{7}, -\frac{6}{35}\right)^*,$$

где $*$ – символ транспонирования. Тогда получаем уравнения движения носителя с двумя гиродинами в виде [2]

$$A_1\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\,\omega_2\omega_3 + \frac{3}{35}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{h_j}{J_j}\left((-1)^{j+1}\,11\sin q_j - 2\cos q_j\right)\xi_j\right) -$$

$$
-\frac{3}{7}(\xi_1-\xi_2)(2\omega_2-\omega_3)-\frac{2}{7}(u_1-u_2),
$$

$$
A_2\dot{\omega}_2=(A_3-A_1)\,\omega_1\omega_3+\frac{2}{7}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{h_j}{J_j}\left((-1)^j\,\sin q_j-3\cos q_j\right)\xi_j\right)+
$$

$$
+\frac{2}{7}(\xi_1-\xi_2)(3\omega_1-\omega_3)-\frac{3}{7}(u_1-u_2),
$$

$$
A_3\dot{\omega}_3=(A_1-A_2)\,\omega_1\omega_2+\frac{1}{35}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{h_j}{J_j}\left((-1)^j\,6\sin q_j+17\cos q_j\right)\xi_j\right)-
$$

$$
-\frac{1}{7}(\xi_1-\xi_2)(3\omega_1-2\omega_2)-\frac{6}{7}(u_1-u_2), \tag{1}
$$

$$
\dot{\xi}_1=\frac{h_1}{35}\Big(3\,(2\cos q_1-11\sin q_1)\,\omega_1+10\,(3\cos q_1+\sin q_1)\,\omega_2+
$$

$$
+(6\sin q_1-17\cos q_1)\,\omega_3\Big)+u_1,
$$

$$
\dot{\xi}_2=\frac{h_2}{35}\Big(3\,(2\cos q_2+11\sin q_2)\,\omega_1+10\,(3\cos q_2-\sin q_2)\,\omega_2-
$$

$$
-(6\sin q_2+17\cos q_2)\,\omega_3\Big)+u_2,
$$

$$
\dot{q}_1=\frac{\xi_1}{J_1}-\frac{1}{7}(2\omega_1+3\omega_2+6\omega_3),\quad \dot{q}_2=\frac{\xi_2}{J_2}+\frac{1}{7}(2\omega_1+3\omega_2+6\omega_3),
$$

где $\boldsymbol{\omega}=(\omega_1,\omega_2,\omega_3)^*$ – вектор угловой скорости спутника, A_1, A_2, A_3 – обобщенные моменты инерции, $\boldsymbol{q}=(q_1,q_2)^*$ – вектор углов поворота гирокамер относительно носителя, $\boldsymbol{u}=(u_1,u_2)^*$– вектор управлений, $\boldsymbol{h}=(h_1,h_2)^*$, $\boldsymbol{J}=(J_1,J_2)^*$ – постоянные, задающие кинетические моменты гиродинов,

$$
\xi_j=J_j(\boldsymbol{l^*_{0j}},\boldsymbol{\omega})+J_j\dot{q}_j,\quad j=1,2.
$$

Рассмотрим в окрестности стационарных движений системы (1) задачу управления угловой скоростью спутника и задачу его стабилизации в направлении заданного орта.

2. Стационарные движения. Система уравнений (1) представляет собой автономную систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\dot{x}=f(x,u).
$$

Для того, чтобы найти ее стационарные движения, решим систему алгебраических уравнений

$$
f_i\left((\omega_1,\,\omega_2,\,\omega_3,\,\xi_1,\,\xi_2,\,q_1,\,q_2)\,,(u_1,\,u_2)\right)=0,\quad i=1,\ldots,7.
$$

Считая, что
$$a = \frac{(-1)^n (h_2 - h_1)}{(J_1 + J_2)},$$
рассмотрим несколько случаев.

Случай 1. Пусть $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0$, тогда имеем положение равновесия
$$\boldsymbol{x} = \left(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ q_1^{(0)},\ q_2^{(0)}\right), \qquad q_1^{(0)},\ q_2^{(0)} \equiv \mathrm{const}. \tag{2}$$

Случай 2. Полагая $\omega_2 = 0$, $\omega_3 = 0$, получаем равномерные вращения
$$\boldsymbol{x} = \left(\frac{-7}{3\sqrt{5}}\,a,\ 0,\ 0,\ \frac{-2}{3\sqrt{5}}\,a\,J_1,\ \frac{-2}{3\sqrt{5}}\,a\,J_2,\ \operatorname{arctg}\frac{2}{11} + \pi n,\right.$$
$$\left. -\operatorname{arctg}\frac{2}{11} + \pi n\right), \quad n \in Z.$$

Случай 3. Полагая $\omega_1 = 0$, $\omega_3 = 0$, имеем равномерные вращения
$$\boldsymbol{x} = \left(0,\ \frac{7}{2\sqrt{10}}\,a,\ 0,\ \frac{3}{2\sqrt{10}}\,a\,J_1,\ \frac{3}{2\sqrt{10}}\,a\,J_2,\ -\operatorname{arctg}3 + \pi n,\right.$$
$$\left. \operatorname{arctg}3 + \pi n\right), \quad n \in Z.$$

Случай 4. Полагая $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 0$, получаем равномерные вращения
$$\boldsymbol{x} = \left(0,\ 0,\ \frac{7}{\sqrt{13}}\,a,\ \frac{6}{\sqrt{13}}\,a\,J_1,\ \frac{6}{\sqrt{13}}\,a\,J_2,\ \operatorname{arctg}\frac{17}{6} + \pi n,\right.$$
$$\left. -\operatorname{arctg}\frac{17}{6} + \pi n\right), \quad n \in Z.$$

3. Управление по части переменных. Рассмотрим задачу управления угловой скоростью спутника с помощью двух гиродинов. Задача управления угловой скоростью состоит в нахождении такого кусочно-непрерывного (далее допустимого) управления $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t) = (u_1,\, u_2)$, $t \in [t_0,\, t_1]$, что соответствующее ему движение системы (1) удовлетворяет условиям
$$\boldsymbol{\omega}\,(t_0) = \boldsymbol{\omega}^{(\mathbf{0})}, \qquad \boldsymbol{\omega}\,(t_1) = \boldsymbol{\omega}^{(\mathbf{1})}. \tag{3}$$

Для решения этой задачи достаточно управляемости системы (1) по части переменных, среди которых будут присутствовать ω_1, ω_2, ω_3. Будем решать задачу управления угловой скоростью твердого тела с помощью двух гиродинов по линейному приближению.

Исследуем систему (1) на управляемость по переменным ω_1, ω_2, ω_3, ξ_1, ξ_2 в окрестности положения равновесия (2). Сделаем замену переменных

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = \omega_2, \quad x_3 = \omega_3, \quad x_4 = \xi_1, \quad x_5 = \xi_2, \quad x_6 = q_1 - q_1^{(0)}, \quad x_7 = q_2 - q_2^{(0)}$$

и линеаризуем полученную из (1) систему в положении равновесия $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_7) = 0$. Первые пять уравнений системы линейного приближения не зависят от x_6, x_7 и имеют вид

$$\begin{aligned}
A_1\dot{x}_1 &= \frac{3}{35}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{h_j}{J_j}\left((-1)^{j+1}\,11\sin q_j^{(0)} - 2\cos q_j^{(0)}\right)x_{j+3}\right) - \frac{2}{7}\left(u_1 - u_2\right),\\
A_2\dot{x}_2 &= \frac{2}{7}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{h_j}{J_j}\left((-1)^{j}\,\sin q_j^{(0)} - 3\cos q_j^{(0)}\right)x_{j+3}\right) - \frac{3}{7}\left(u_1 - u_2\right),\\
A_3\dot{x}_3 &= \frac{1}{35}\sum_{j=1}^{2}\left(\frac{h_j}{J_j}\left((-1)^{j}\,6\sin q_j^{(0)} + 17\cos q_j^{(0)}\right)x_{j+3}\right) - \frac{6}{7}\left(u_1 - u_2\right),\\
\dot{x}_4 &= \frac{h_1}{35}\Big(3\left(2\cos q_1^{(0)} - 11\sin q_1^{(0)}\right)x_1 + 10\left(3\cos q_1^{(0)} + \sin q_1^{(0)}\right)x_2 + \\
&\qquad + \left(6\sin q_1^{(0)} - 17\cos q_1^{(0)}\right)x_3\Big) + u_1,\\
\dot{x}_5 &= \frac{h_2}{35}\Big(3\left(2\cos q_2^{(0)} + 11\sin q_2^{(0)}\right)x_1 + 10\left(3\cos q_2^{(0)} - \sin q_2^{(0)}\right)x_2 - \\
&\qquad - \left(6\sin q_2^{(0)} + 17\cos q_2^{(0)}\right)x_3\Big) + u_2.
\end{aligned} \tag{4}$$

Пусть $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ – система (4), записанная в матричном виде, где

$$\boldsymbol{u} = (u_1, u_2), \quad \boldsymbol{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), \quad B = \left\{b^{\langle 1\rangle}, b^{\langle 2\rangle}\right\},$$

$$b^{\langle 1\rangle} = \left(-\frac{2}{7A_1}, -\frac{3}{7A_2}, -\frac{6}{7A_3}, 1, 0\right)^*, \quad b^{\langle 2\rangle} = \left(\frac{2}{7A_1}, \frac{3}{7A_2}, \frac{6}{7A_3}, 0, 1\right)^*.$$

Будем в дальнейшем полагать, что постоянные в системах уравнений (1) и (4) заданы следующим образом:

$$A_1 = 230, \quad A_2 = 310, \quad A_3 = 210, \quad J_1 = J_2 = 2, \quad h_1 = h_2 = 1000.$$

Рассмотрим матрицу $T = \{b^{\langle 1\rangle}, Ab^{\langle 1\rangle}, A^2b^{\langle 1\rangle}, A^3b^{\langle 1\rangle}, b^{\langle 2\rangle}\}$. Поскольку определитель матрицы T не равен нулю ($\det(T) \neq 0$) при

$$q_2^{(0)} \neq -q_1^{(0)} + \pi n, \tag{5}$$

то система (1) в случае (5) управляема по переменным ω_1, ω_2, ω_3, ξ_1, ξ_2 в окрестности положения равновесия (2).

Решение двухточечной задачи (3) с точностью $\varepsilon = 10^{-5}$ будем искать по рекуррентной формуле [3]

$$\boldsymbol{u}^{(k)}(t) = \Omega(t)\,\boldsymbol{p}^{(k)}, \tag{6}$$

$$\Omega(t) = \omega^*(t_1,t)M^{-1}, \quad \omega(t,\xi) = X(t,\xi)B, \quad M = \int\limits_{t_0}^{t_1} \omega(t_1,\xi) \quad \omega^*(t_1,\xi)\,d\xi,$$

$$\boldsymbol{p}^{(k)} = \boldsymbol{x}^{(1)} - X(t_1,t_0)\boldsymbol{x}^{(0)} + \sum_{i=0}^{k-1}\Big(\boldsymbol{x}^{(1)} - \boldsymbol{x}_i^{\text{н}}(t_1)\Big),$$

$\boldsymbol{x}_i^{\text{н}}(t_1)$ – точка, в которую попадает нелинейная система (1) под действием допустимого управления $\boldsymbol{u}^{(i)}(t)$ в момент времени t_1; $X(t,\xi)$ – фундаментальная матрица однородной системы уравнений, соответствующей системе линейного приближения (4).

Компоненты матрицы $\Omega(t)$ при $t_0 = 0$, $t_1 = 1$ имеют вид

$$\Omega_{ij}(t) = a_{ij}\cos(46.864(t-1)) + b_{ij}\sin(46.864(t-1)) + c_{ij}\cos(41.81(t-1)) + \\ + d_{ij}\sin(41.81(t-1)) + e_{ij} \qquad (i = 1,2;\ j = 1,\ldots,5)\,.$$

Пример 1. Остановка вращения. Пусть под воздействием внешних возмущений спутник приобрел некоторое вращение с небольшой угловой скоростью $\omega_1 = 0.07$, $\omega_2 = 0.1$, $\omega_3 = -0.2$. Построим управление, которое останавливает это вращение, а значит, соответствующее ему движение динамической системы (1) на отрезке $t \in [0,1]$ удовлетворяет условиям

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.07,\ 0.1,\ -0.2,\ -0.5,\ 0.4,\ \pi/6,\ \pi/3)^*, \\ \boldsymbol{x}^{(1)} = (0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ q_1,\ q_2)^*,$$

где q_1, q_2 – произвольные вещественные числа. Решая двухточечную задачу (3) по рекуррентной формуле (6) с точностью $\varepsilon = 10^{-4}$ с помощью пакета математических программ, на 13-ом шаге получаем

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = (0.12841,\ 0.12385,\ -0.03766,\ 2.82243,\ 0.08858)^*,$$
$$\boldsymbol{p}^{(13)} = (0.06341,\ 0.18737,\ -0.06036,\ 1.7551,\ 1.34022)^*,$$
$$u_1(t) = u_1^{(13)}(t) = -0.27\cos(46.864(t-1)) - 0.67\sin(46.864(t-1)) + \\ + 3.74\cos(41.81(t-1)) + 8.03\sin(41.81(t-1)) - 9.04,$$
$$u_2(t) = u_2^{(13)}(t) = 1.99\cos(46.864(t-1)) + 4.63\sin(46.864(t-1)) + \\ + 0.41\cos(41.81(t-1)) + 1.21\sin(41.81(t-1)) + 9.04,$$

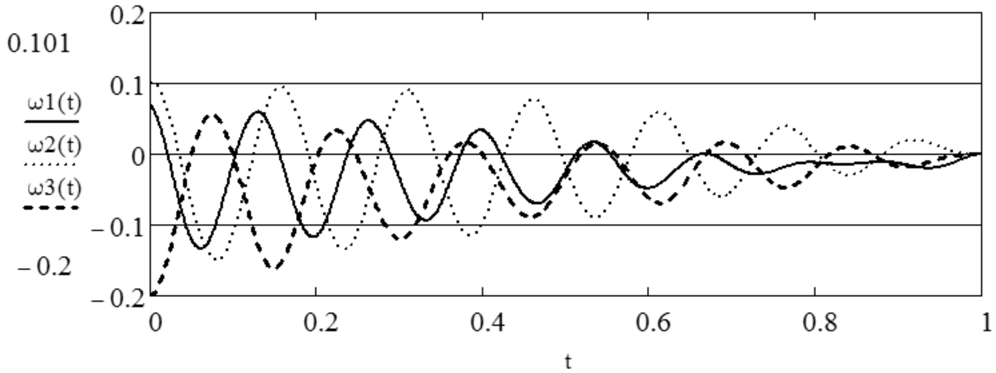

Рис. 1

Результаты численного моделирования применения построенных управлений для системы (1) приведены на рис. 1.

Пример 2. Перевод в противовращение. Пусть необходимо перевести спутник в противовращение, следовательно, найти такое управление, что соответствующее ему движение динамической системы (1) на отрезке $t \in [0,1]$ будет удовлетворять условиям

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (0.07,\ 0.1,\ -0.2,\ -5,\ 4,\ \pi/6,\ \pi/3)^*,$$
$$\boldsymbol{x}^{(1)} = (-0.07,\ -0.1,\ 0.2,\ 5,\ -4,\ q_1,\ q_2)^*,$$

где q_1, q_2 – произвольные вещественные числа.

Используя пакет математических программ, на 25-ом шаге с точностью $\varepsilon = 0.10^{-5}$ получаем

$$\boldsymbol{p}^{(0)} = (0.07293,\ 0.13944,\ 0.07172,\ 5.05697,\ -0.20589)^*,$$
$$\boldsymbol{p}^{(25)} = (-0.10009,\ 0.05215,\ 0.19838,\ -0.34345,\ 2.00979)^*,$$
$$u_1(t) = u_1^{(25)}(t) = -0.57\cos(46.864(t-1)) + 0.7\sin(46.864(t-1)) - \\ -0.74\cos(41.81(t-1)) - 1.66\sin(41.81(t-1)) - 17.93,$$
$$u_2(t) = u_2^{(25)}(t) = 3.86\cos(46.864(t-1)) - 4.97\sin(46.864(t-1)) - \\ -0.08\cos(41.81(t-1)) - 0.25\sin(41.81(t-1)) + 17.93.$$

Результаты численного моделирования применения построенных управлений для системы (1) приведены на рис. 2.

4. Стабилизация по части переменных. Рассмотрим по линейному приближению две задачи: стабилизации нулевой угловой скорости спутника и стабилизации спутника в направлении заданного орта с помощью двух гиродинов.

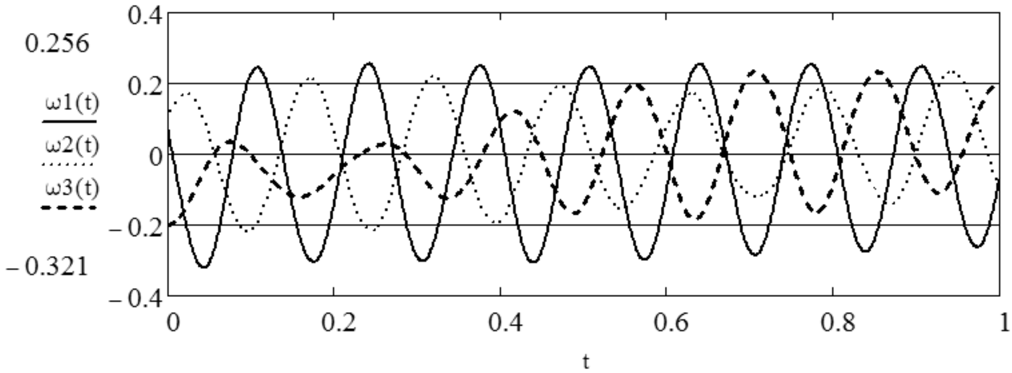

Рис. 2

Стабилизация нулевой угловой скорости. Для этого необходимо стабилизировать положение равновесия (2) динамической системы (1). Линеаризуя так же, как в предыдущем пункте, систему (1) в положении равновесия (2), получаем систему линейного приближения (4). Построим управления u_1, u_2, решающие задачу стабилизации положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ для системы (4). Полагая, что $u_2 = 0$, сделаем замену переменных: $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$,

$$T = \left\{ b^{\langle 1\rangle},\, Ab^{\langle 1\rangle},\, A^2 b^{\langle 1\rangle},\, A^3 b^{\langle 1\rangle},\, A^4 b^{\langle 1\rangle} \right\}.$$

Поскольку матрица T невырожденная, то система (4) управляема с помощью одного управления u_1 и после замены переменных примет вид

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d_1} u_1,$$

где $P = T^{-1}AT$, $\boldsymbol{d_1} = T^{-1}b^{\langle 1\rangle}$, $\boldsymbol{d_1} = (1,0,0,0,0)^*$. Или, более подробно:

$$\begin{pmatrix} \dot y_1 \\ \dot y_2 \\ \dot y_3 \\ \dot y_4 \\ \dot y_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & -3840245.8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -3944.788 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} u_1. \tag{7}$$

Стабилизирующее управление для системы (7) будем строить по формуле $u_1 = \boldsymbol{c}^* \boldsymbol{y}$ [4],

$$\boldsymbol{c} = T^{(-1)*} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_4 & p_3 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{-1} (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{v}), \tag{8}$$

где $\boldsymbol{p} = (0,\ -3944.788,\ 0, -3840245.8,\ 0)^*$ – последний столбец матрицы P в системе (7), а $\boldsymbol{v}$ – вектор коэффициентов соответствующего системе (7) характеристического уравнения

$$\lambda^5 + v_1\lambda^4 + v_2\lambda^3 + v_3\lambda^2 + v_4\lambda + v_5 = 0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения через

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \qquad \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i, \qquad \lambda_5 = \alpha_3.$$

Стабилизация в направлении заданного орта. Пусть орт $\boldsymbol{s}_0$, неизменный в абсолютной системе координат, задает направление, в котором должен быть направлен спутник. Направление спутника определяется ортом $\boldsymbol{r}_0$. Орт $\boldsymbol{r}_0$ занимает неизменное положение в системе координат $Oxyz$, жестко связанной со спутником. Будем считать, что требуется стабилизировать движение спутника, при котором он находится в положении равновесия (2) и орт $\boldsymbol{r}_0$ совпадает с ортом $\boldsymbol{s}_0$. Для решения задачи ориентации носителя в заданном направлении необходимо добавить к уравнениям (1), описывающим движение спутника с двумя гиродинами, еще три уравнения [5]

$$\dot{s}_1 = s_2\omega_3 - s_3\omega_2 \qquad (123). \tag{9}$$

Составим уравнения возмущенного движения системы (1), (9), перейдя к новым переменным

$$x_1 = \omega_1, \quad x_2 = \omega_2, \quad x_3 = \omega_3, \quad x_4 = \xi_1, \quad x_5 = \xi_2, \quad x_6 = s_1 - r_1^{(0)},$$
$$x_7 = s_2 - r_2^{(0)}, \quad x_8 = s_3 - r_3^{(0)}, \quad x_9 = q_1 - q_1^{(0)}, \quad x_{10} = q_2 - q_2^{(0)},$$

и линеаризуем полученную систему в положении равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$. Первые пять уравнений системы линейного приближения имеют вид (4). Добавляя к ним следующие два уравнения

$$\dot{x}_6 = r_2^{(0)}x_3 - r_3^{(0)}x_2, \qquad \dot{x}_7 = r_3^{(0)}x_1 - r_1^{(0)}x_3, \tag{10}$$

получаем систему семи уравнений (4), (10), которые не зависят от оставшихся трех переменных x_8, x_9, x_{10}. Переменная x_8 связана с переменными x_6, x_7 интегралом, так как $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 = 1$, поэтому стабилизация невозмущенного движения системы (4), (10) влечет за собой стабилизацию ориентации спутника в заданном направлении. Переменные x_9, x_{10} определяют не интересующие нас углы поворота гирокамер первого и второго гиродинов соответственно, поэтому могут быть отброшены.

Построим управления u_1, u_2, решающие задачу стабилизации по направлению для системы (4), (10). Пусть $\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$ система (4), (10), записанная в матричном виде. Рассмотрим матрицу

$$T = \left\{b^{\langle 1\rangle},\, Ab^{\langle 1\rangle},\, A^2b^{\langle 1\rangle},\, A^3b^{\langle 1\rangle},\, A^4b^{\langle 1\rangle}\, A^5b^{\langle 1\rangle},\, b^{\langle 2\rangle}\right\},$$

$$b^{\langle 1\rangle} = \left(-\frac{2}{7A_1}, -\frac{3}{7A_2}, -\frac{6}{7A_3}, 1, 0, 0, 0\right)^*, \; b^{\langle 2\rangle} = \left(\frac{2}{7A_1}, \frac{3}{7A_2}, \frac{6}{7A_3}, 0, 1, 0, 0\right)^*.$$

Поскольку матрица T – невырожденная, то система (4), (10) управляема с помощью управлений u_1, u_2, и после замены переменных $\boldsymbol{x} = T\boldsymbol{y}$ примет вид

$$\dot{\boldsymbol{y}} = P\boldsymbol{y} + \boldsymbol{d_1}u_1 + \boldsymbol{d_2}u_2, \tag{11}$$

где $P = T^{-1}AT$, $\boldsymbol{d_1} = T^{-1}b^{\langle 1\rangle}$, $\boldsymbol{d_2} = T^{-1}b^{\langle 2\rangle}$. Или, более подробно:

$$\begin{pmatrix}\dot{y}_1\\ \dot{y}_2\\ \dot{y}_3\\ \dot{y}_4\\ \dot{y}_5\\ \dot{y}_6\\ \dot{y}_7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0&0&0&0&0&0\\ 1&0&0&0&0&0&-1\\ 0&1&0&0&0&-3840245.8&0\\ 0&0&1&0&0&0&0\\ 0&0&0&1&0&-3944.6&0\\ 0&0&0&0&1&0&0\\ 0&0&0&0&0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\\ y_5\\ y_6\\ y_7\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{pmatrix}u_1 + \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\\0\\0\\1\end{pmatrix}u_2. \tag{12}$$

Последнее уравнение содержит только управление u_2. Тогда, выбирая $u_2 = -y_7$, получим асимптотическое стремление переменной y_7 к нулю. Так как $\boldsymbol{y} = T^{-1}\boldsymbol{x}$, то, вычисляя из обратной замены переменную y_7, имеем

$$\begin{aligned} u_2 = {} & 6.3265\omega_1 + 12.7906\omega_2 + 17.3292\omega_3 + 0.09627\xi_1 - 1.09627\xi_2 - \\ & - 170.035(s_1 - r_1^{(0)}) + 1530.3125(s_2 - r_2^{(0)}). \end{aligned} \tag{13}$$

Стабилизирующее управление для оставшейся части системы (4), (10) будем строить по формуле [4]

$$u_1 = \boldsymbol{c}^*\boldsymbol{y}, \quad \boldsymbol{c} = T^{(-1)*}\begin{pmatrix}1&0&\dots&0\\ p_1&1&\dots&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots\\ p_5&p_4&\dots&1\end{pmatrix}^{-1}(\boldsymbol{p} - \boldsymbol{v}), \tag{14}$$

где $\boldsymbol{p} = (0,\ -3944.6,\ 0, -3840245.8,\ 0,\ 0)^*$ – из предпоследнего столбца матрицы P системы (12), а $\boldsymbol{v}$ – вектор коэффициентов соответствующего системе характеристического уравнения

$$\lambda^6 + v_1\lambda^5 + v_2\lambda^4 + v_3\lambda^3 + v_4\lambda^2 + v_5\lambda + v_6 = 0.$$

Обозначим корни характеристического уравнения через

$$\lambda_{1,2} = \alpha_1 \pm \beta_1 i, \qquad \lambda_{3,4} = \alpha_2 \pm \beta_2 i, \qquad \lambda_{5,6} = \alpha_3 \pm \beta_3 i.$$

5. Оптимизация управления в задачах стабилизации. Найдем компоненты вектора $\boldsymbol{c}$ коэффициентов управления, вычисляя их явно с помощью пакета математических программ. Для минимизации нормы стабилизирующего управления, минимизируем евклидову норму полученного вектора.

Стабилизация нулевой угловой скорости. Запишем функцию

$$g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{5} c_i^2$$

и найдем минимум функции $g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ в области $-500 \le \alpha_i \le -1$, $i = 1\ldots 3$, $-500 \le \beta_j \le 500$, $j = 1, 2$, методом сопряженных градиентов, начиная спуск с точки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -1$, $\beta_1 = \beta_2 = 10$. Получим при $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = -1.477$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_1 = 46.565$, $\beta_2 = -40.28$

$$\min(g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})) = 47055.6.$$

Подставляя найденные $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \beta_1,\ \beta_2$ в формулу управления (14), имеем

$$u_1 = 75.086\omega_1 + 49.658\omega_2 + 196.404\omega_3 - 4.99075\xi_1 + 18.7655\xi_2.$$

Результаты численного моделирования применения построенного управления u_1 при $u_2 = 0$ для стабилизации системы (1) с начальными условиями

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (1/14,\ -1/23,\ 1/15,\ -1/24,\ 1/13,\ \pi/6,\ \pi/3)$$

приведены на рис. 3.

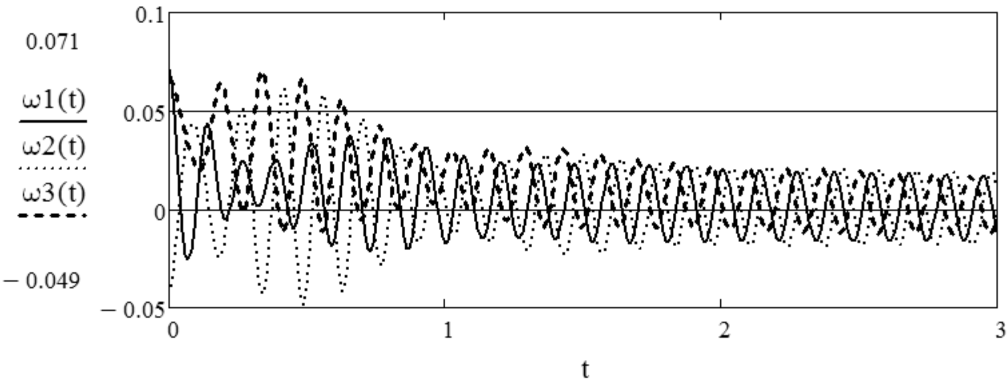

Рис. 3

В момент времени $t = 20$ фазовый вектор принимает значение

$$\boldsymbol{x}^{(1)} = (0.00295,\ -0.00213,\ 0.00061,\ -0.09936,\ -0.07506,\ 0.45566,\ 1.10076)\,.$$

Стабилизация в направлении заданного орта. Запишем функцию

$$g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}) = \sum_{i=1}^{6} c_i^2$$

и найдем минимум функции $g(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})$ в области $-500 \le \alpha_i \le -1$, $i = 1, \ldots, 3$, $-500 \le \beta_j \le 500$, $j = 1, \ldots, 3$, методом сопряженных градиентов, начиная спуск с точки $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = -5$, $\beta_1 = \beta_2 = -100$, $\beta_3 = 100$. Получим при $\alpha_1 = -3.24$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = -1$, $\beta_1 = -44.367$, $\beta_2 = 47.583$, $\beta_3 = 0.135 \cdot 10^{-8}$

$$\min(g(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta})) = 501175.387.$$

Подставляя α_1, α_2, α_3, β_1, β_2, β_3 в формулу управления (14), имеем

$$\begin{aligned} u_1 = &- 168.332\omega_1 + 402.505\omega_2 + 462.421\omega_3 - 8.247\xi_1 - 2.235\xi_2 - \\ &- 308.94(s_1 - r_1^{(0)}) - 38.24(s_2 - r_2^{(0)}). \end{aligned} \tag{15}$$

Результаты численного моделирования построенных управлений u_1 (15) и u_2 (13) для стабилизации системы (1), (9) с начальными условиями

$$\boldsymbol{x}^{(0)} = (1/45,\ -1/38,\ 1/56,\ 1/34,\ -1/51,\ 3/10,\ -7/10,\ \sqrt{42}/10,\ \pi/6,\ \pi/3)$$

в направлении орта $\boldsymbol{r}^{(0)} = (1/3,\ -2/3,\ 2/3)$ приведены на рис. 4–6.

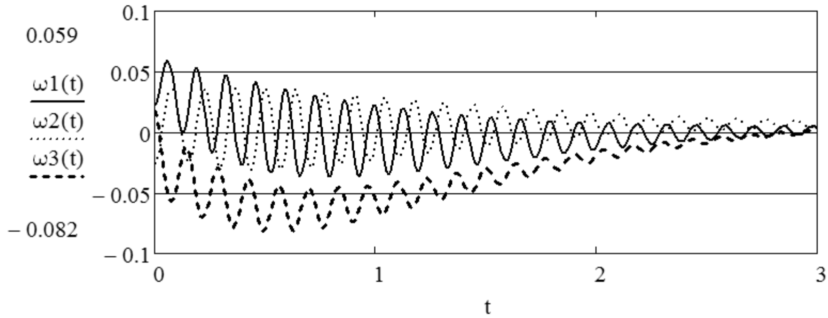

Рис. 4

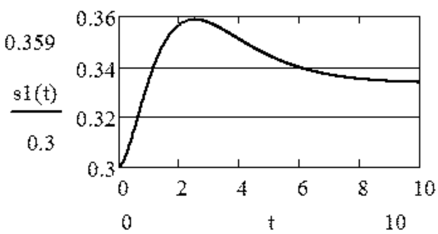

Рис. 5

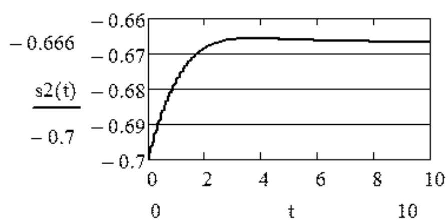

Рис. 6

В момент времени $t = 10$ фазовый вектор системы (1), (9) принимает значение

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}^{(1)} = (&0.0001376;\ 0.000116,\ 0.000359,\ -0.000024,\ 0.000017, \\ &0.33374,\ -0.666628,\ 0.666502,\ 0.563971,\ 0.998416). \end{aligned}$$

Таким образом, показана возможность решения по линейному приближению задач управления и стабилизации вращательного движения спутника с помощью двух гиродинов. Решения получены с заданной степенью точности в окрестности положения равновесия.

1. *Смирнов Е.Я., Павлинов В.Ю., Щербаков П.П., Юрков А.В.* Управление движением механических систем. – Л.: Изд-во ЛГУ, 1985. – 313 с.
2. *Гладун А.В.* Стабилизация ориентации твердого тела с помощью гиродинов // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2005.– **10**. – С. 32–38.
3. *Гладун А.В.* Управление вращательным движением твердого тела с помощью двух спарок гиродинов // Тр. ИПММ НАН Украины. – 1999. – **4**. – С. 44–51.
4. *Красовский Н.Н.* Теория управления движением. – М.: Наука, 1968. – 476 с.
5. *Зубов В.И.* Лекции по теории управления. – М.: Наука, 1975. – 496 с.

A.V. Gladun

Control and stabilization of the rotational motion of a satellite by means of two gyrodins

The problem of control and stabilization of a satellite carrying two gyrodins is investigated. The control laws to provide stopping the rotation and reverse a satellite to the opposite rotation in a neighborhood of the equilibrium position are constructed with a given degree of accuracy. The control laws that provide zero angular velocity stabilization or stabilization of a satellite in a given direction are constructed. For these constructions the initial system is reduced to a special-kind system that is stabilizable by the choice of eigenvalues for the linear approximation matrix. Both real and imaginary parts of eigenvalues are selected in a way to minimize the norm of feedback control. The results of numerical simulation are presented.

Keywords: *satellite, rigid body, control, stabilization, gyrodin, equilibrium position, linear approximation.*

О.В. Гладун

Керування і стабілізація обертального руху супутника за допомогою двох гіродинів

Досліджується задача керування і стабілізації супутника, який несе два гіродини. Отримано керування, що забезпечують зупинку обертання і переведення супутника в протилежне обертання в околі положення рівноваги із заданим ступенем точності. Побудовано керування, які здійснюють стабілізацію нульової кутової швидкості супутника і стабілізацію супутника в напрямку заданого орта. При побудові вихідна система рівнянь зводиться до системи спеціального виду, для якої стабілізація досягається шляхом вибору власних чисел матриці лінійного наближення. Як уявні, так і дійсні частини власних чисел цієї матриці підбираються таким чином, щоб мінімізувати норму керування із зворотним зв'язком. Наведено результати чисельного моделювання.

Ключові слова: *супутник, гіродин, стан рівноваги, керованість за частиною змінних, стабілізовність.*

Национальный техн. ун-т, Донецк
Получено 10.10.13
gladun@online.dn.ua