УДК 531.38

©2013. **А.А. Возняк**

МАЯТНИКОВЫЕ ДВИЖЕНИЯ ГИРОСТАТА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ И ГИРОСКОПИЧЕСКИХ СИЛ В СЛУЧАЕ ПЕРЕМЕННОГО ГИРОСТАТИЧЕСКОГО МОМЕНТА

Получены условия существования маятниковых движений гиростата, для которых переменный гиростатический момент принадлежит плоскости, ортогональной оси вращения. Движение гиростата происходит в магнитном и электрическом полях под действием центральных ньютоновских сил. Указано решение уравнений движения, описываемое эллиптическими функциями времени.

Ключевые слова: *гиростатический момент, маятниковые движения, эллиптические функции.*

Введение. В динамике твердого тела наиболее полно изучены движения механических систем, называемых гиростатами, в случае постоянного гиростатического момента [1–3]. Если гиростатический момент зависит от времени, то уравнения движения гиростата становятся неавтономными дифференциальными уравнениями. Различные подходы в выводе и истолковании уравнений движения приведены в работах [4–7]. Наиболее интенсивно задача о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом изучается в последнее время. В случае, когда гиростатический момент направлен по некоторой, неизменно связанной с телом-носителем, оси, исследованы равномерные вращения гиростата [8, 9], регулярные прецессии [10–12], полурегулярные прецессии первого типа [13], прецессии общего вида [14] и др. движения [15–16].

Маятниковые движения представляют практический интерес, поскольку вращение гиростата происходит с нестационарной скоростью вокруг неподвижной в пространстве оси. Они исследованы только для случая, когда гиростатический момент коллинеарен собственной оси гиростата, а на гиростат действуют либо сила тяжести [15], либо потенциальные и гироскопические силы определенного класса [18]. Данная статья посвящена исследованию маятниковых движений гиростата в предположении, что гиростатический момент лежит в плоскости, ортогональной оси вращения гиростата.

1. Постановка задачи. Рассмотрим задачу о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил [3]. Примем следующие обозначения: $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ – вектор угловой скорости тела-носителя; $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)$ – единичный вектор оси симметрии силовых полей; $\boldsymbol{s} = (s_1, s_2, s_3)$ – вектор, направленный из неподвижной точки O гиростата в обобщенный центр масс; $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}$ $(\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), \boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3))$ – гиростатический момент; $A = (A_{ij})$ – тензор инерции гиростата; $B = (B_{ij})$, $C = (C_{ij})$ – постоянные симметричные матрицы третьего порядка. Без ограничения общности постановки задачи будем полагать

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 = 1, \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 + \beta_3^2 = 1, \qquad \boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta} = 0. \tag{1}$$

Уравнения движения гиростата запишем в виде

$$\begin{gathered} A\dot{\boldsymbol{\omega}} = (\lambda_1(t)\boldsymbol{\alpha} + \lambda_2(t)\boldsymbol{\beta}) \times \boldsymbol{\omega} - (\dot{\lambda_1}(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda_2}(t)\boldsymbol{\beta}) + \\ + A\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\omega} \times B\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{s} \times \boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu} \times C\boldsymbol{\nu}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\nu} \times \boldsymbol{\omega}, \tag{3}$$

где точка над переменными обозначает дифференцирование по времени t.

Первые интегралы уравнений (2), (3) таковы

$$\boldsymbol{\nu} \cdot \boldsymbol{\nu} = 1, \qquad (A\boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\lambda}) \cdot \boldsymbol{\nu} = k, \tag{4}$$

k – произвольная постоянная.

Маятниковыми движениями гиростата называются движения, при которых движение гиростата происходит вокруг неподвижной в пространстве оси, т. е. вектор угловой скорости гиростата имеет разложение

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\,\boldsymbol{э}, \qquad \frac{d\boldsymbol{э}}{dt} = \boldsymbol{0}, \tag{5}$$

где $\dot{\varphi}$ – скорость вращения гиростата, $\dfrac{d}{dt}$ – оператор абсолютной производной. В силу второго равенства из (5) орт **э** не изменяет своего положения в теленосителе. Пусть он совпадает с единичным вектором $\boldsymbol{a}$, тогда

$$\boldsymbol{\omega} = \dot{\varphi}\ \boldsymbol{a}. \tag{6}$$

Сформулируем постановку задачи: определить условия существования у системы дифференциальных уравнений (2), (3) векторного инвариантного соотношения (6). В качестве неизвестных функций выступают функции $\dot{\varphi}(t)$, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, $\nu_i(t)$ $(i = \overline{1,3})$. При этом постоянные параметры уравнения (2) либо заданы, либо подлежат определению на этапе требования совместности (2), (3), (6).

Ранее маятниковые движения изучались для случаев постоянного гиростатического момента [2] и варианта $\boldsymbol{\lambda}(t) = \lambda(t)\boldsymbol{\alpha}$ [15] – переменного гиростатического момента.

2. Редукция системы (2), (3). Подставим выражение (6) в уравнения (2), (3)

$$\begin{gathered}\dot{\lambda_1}(t)\boldsymbol{\alpha} + \dot{\lambda_2}(t)\boldsymbol{\beta} = \dot{\varphi}\lambda_1(t)(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{a}) + \dot{\varphi}\lambda_2(t)(\boldsymbol{\beta}\times\boldsymbol{a}) - \\ -\ddot{\varphi}A\ \boldsymbol{a} + \dot{\varphi}^2(A\ \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}) + \dot{\varphi}(\boldsymbol{a}\times B\boldsymbol{\nu}) + \mathbf{s}\times\boldsymbol{\nu} + \boldsymbol{\nu}\times C\boldsymbol{\nu},\end{gathered} \tag{7}$$

$$\dot{\boldsymbol{\nu}} = \boldsymbol{\varphi}(\boldsymbol{\nu}\times\boldsymbol{a}). \tag{8}$$

Перейдем к интегрированию уравнения (8). Следуя методу [3], положим $\boldsymbol{a} = (0,0,1)$. Умножим обе части уравнения (8) скалярно на вектор $\boldsymbol{a}$. Тогда

$$\boldsymbol{\nu}\cdot\boldsymbol{a} = a_0 \quad (a_0 = \cos\theta_0). \tag{9}$$

Инвариантному соотношению (9), первому геометрическому интегралу из (4) и уравнению (8) удовлетворим, положив [3]

$$\nu_1 = a_0'\sin\varphi, \quad \nu_2 = a_0'\cos\varphi, \quad \nu_3 = a_0, \tag{10}$$

где $a_0' = \sin\theta_0$.

Известно [1, 2], что в классической задаче о движении тяжелого твердого тела маятниковое движение (6) происходит вокруг горизонтальной оси в пространстве, т. е. в (9), (10) угол $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. В данной статье априори не будем предполагать выполнение этого условия.

По предположению (1) векторы $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ составляют ортогональный базис. Запишем в этом базисе скалярные уравнения, вытекающие из (7):

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_1(t) = \gamma_3\dot{\varphi}\lambda_2(t) - \mu_0\ddot{\varphi} + \mu_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\mu_2\sin\varphi + \mu_3\cos\varphi + \mu_4) + \\ +\mu_5\sin 2\varphi + \mu_6\cos 2\varphi + \mu_7\sin\varphi + \mu_8\cos\varphi + \mu_9,\end{gathered} \tag{11}$$

$$\begin{gathered}\dot{\lambda}_2(t) = -\gamma_3\dot{\varphi}\lambda_1(t) - \varepsilon_0\ddot{\varphi} + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\varepsilon_2\sin\varphi + \varepsilon_3\cos\varphi + \varepsilon_4) + \\ +\varepsilon_5\sin 2\varphi + \varepsilon_6\cos 2\varphi + \varepsilon_7\sin\varphi + \varepsilon_8\cos\varphi + \varepsilon_9,\end{gathered} \tag{12}$$

$$\begin{gathered}\dot{\varphi}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) - \sigma_0\ddot{\varphi} + \sigma_1\dot{\varphi}^2 + \dot{\varphi}(\sigma_2\sin\varphi + \sigma_3\cos\varphi + \sigma_4) + \\ +\sigma_5\sin 2\varphi + \sigma_6\cos 2\varphi + \sigma_7\sin\varphi + \sigma_8\cos\varphi + \sigma_9 = 0.\end{gathered} \tag{13}$$

Здесь

$$\gamma_1 = \alpha_2\beta_3 - \alpha_3\beta_2, \quad \gamma_2 = \alpha_3\beta_1 - \alpha_1\beta_3, \quad \gamma_3 = \alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1, \tag{14}$$

$$\begin{gathered}\mu_0 = A_{13}\alpha_1 + A_{23}\alpha_2 + A_{33}\alpha_3, \quad \varepsilon_0 = A_{13}\beta_1 + A_{23}\beta_2 + A_{33}\beta_3, \\ \sigma_0 = A_{13}\gamma_1 + A_{23}\gamma_2 + A_{33}\gamma_3,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\mu_1 = \alpha_1 A_{23} - \alpha_2 A_{13}, \quad \varepsilon_1 = \beta_1 A_{23} - \beta_2 A_{13}, \quad \sigma_1 = \gamma_1 A_{23} - \gamma_2 A_{13},$$
$$\mu_2 = a_0'(\alpha_2 B_{11} - \alpha_1 B_{12}),\ \varepsilon_2 = a_0'(\beta_2 B_{11} - \beta_1 B_{12}),\ \sigma_2 = a_0'(\gamma_2 B_{11} - \gamma_1 B_{12}), \quad (16)$$
$$\mu_3 = a_0'(\alpha_2 B_{12} - \alpha_1 B_{22}),\ \varepsilon_3 = a_0'(\beta_2 B_{12} - \beta_1 B_{22}),\ \sigma_3 = a_0'(\gamma_2 B_{12} - \gamma_1 B_{22}),$$
$$\mu_4 = a_0(\alpha_2 B_{13} - \alpha_1 B_{23}),\ \varepsilon_4 = a_0(\beta_2 B_{13} - \beta_1 B_{23}),\ \sigma_5 = a_0(\gamma_2 B_{13} - \gamma_1 B_{23}),$$

$$\begin{aligned}
\mu_5 &= \frac{1}{2} a_0'^2 [\alpha_1 C_{13} - \alpha_2 C_{23} + \alpha_3 (C_{22} - C_{11})],\\
\mu_6 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (\alpha_1 C_{23} + \alpha_2 C_{13} - 2\alpha_3 C_{12}),\\
\mu_7 &= a_0'[-\alpha_1 a_0 C_{12} + \alpha_2 (s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \alpha_3 (s_2 - a_0 C_{23})],\\
\mu_8 &= a_0'[-\alpha_1 (s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \alpha_2 a_0 C_{12} + \alpha_3 (s_1 - a_0 C_{13})],\\
\mu_9 &= \frac{\alpha_1}{2}[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{23}] - \frac{\alpha_2}{2}[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{13}],
\end{aligned} \quad (17)$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon_5 &= \frac{1}{2} a_0'^2 [\beta_1 C_{13} - \beta_2 C_{23} + \beta_3 (C_{22} - C_{11})],\\
\varepsilon_6 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (\beta_1 C_{23} + \beta_2 C_{13} - 2\beta_3 C_{12}),\\
\varepsilon_7 &= a_0'[-\beta_1 a_0 C_{12} + \beta_2 (s_3 - a_0(C_{33} - C_{11})) - \beta_3 (s_2 - a_0 C_{23})],\\
\varepsilon_8 &= a_0'[-\beta_1 (s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \beta_2 a_0 C_{12} + \beta_3 (s_1 - a_0 C_{13})],\\
\varepsilon_9 &= \frac{1}{2}\beta_1[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{23}] - \frac{1}{2}\beta_2[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{13}],
\end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
\sigma_5 &= \frac{1}{2} a_0'^2 [\gamma_1 C_{13} - \gamma_2 C_{23} + \gamma_3 (C_{22} - C_{11})],\\
\sigma_6 &= \frac{1}{2} a_0'^2 (\gamma_1 C_{23} + \gamma_2 C_{13} - 2\gamma_3 C_{12}),\\
\sigma_7 &= a_0'[-\gamma_1 a_0 C_{12} + \gamma_2 (s_3 + a_0(C_{11} - C_{33})) + \gamma_3 (s_2 - a_0 C_{23})],\\
\sigma_8 &= a_0'[-\gamma_1 (s_3 - a_0(C_{33} - C_{22})) + \gamma_2 a_0 C_{12} + \gamma_3 (s_1 - a_0 C_{13})],\\
\sigma_9 &= \frac{1}{2}\gamma_1[2a_0 s_2 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{23}] - \frac{1}{2}\gamma_2[2a_0 s_1 + (a_0'^2 - 2a_0^2) C_{13}].
\end{aligned} \quad (19)$$

Если зависимость $\varphi = \varphi(t)$ будет задана, то соотношения (11), (12) представляют собой систему двух линейных дифференциальных уравнений относительно $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$, которая должна допускать инвариантное соотношение (13).

3. Об общем методе исследования (11)–(13). Запишем уравнения (11)–(13) в краткой форме

$$\dot{\lambda_1}(t) = \gamma_3 \dot{\varphi} \lambda_2(t) + F_1(t), \quad \dot{\lambda_2}(t) = -\gamma_3 \dot{\varphi} \lambda_1(t) + F_2(t), \quad (20)$$

$$\beta_3 \lambda_1(t) - \alpha_3 \lambda_2(t) + F_3(t) = 0, \quad (21)$$

где

$$F_1(t) = -\mu_0\ddot{\varphi}(t) + \mu_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\mu_2\sin\varphi(t) + \mu_3\cos\varphi(t) + \mu_4)+ \\ +\mu_5\sin 2\varphi(t) + \mu_6\cos 2\varphi(t) + \mu_7\sin\varphi(t) + \mu_8\cos\varphi(t) + \mu_9, \tag{22}$$

$$F_2(t) = -\varepsilon_0\ddot{\varphi}(t) + \varepsilon_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\varepsilon_2\sin\varphi(t) + \varepsilon_3\cos\varphi(t) + \varepsilon_4)+ \\ +\varepsilon_5\sin 2\varphi(t) + \varepsilon_6\cos 2\varphi(t) + \varepsilon_7\sin\varphi(t) + \varepsilon_8\cos\varphi(t) + \varepsilon_9, \tag{23}$$

$$F_3(t) = \frac{1}{\dot{\varphi}(t)}\big[-\sigma_0\ddot{\varphi}(t) + \sigma_1\dot{\varphi}^2(t) + \dot{\varphi}(t)(\sigma_2\sin\varphi(t) + \sigma_3\cos\varphi(t) + \sigma_4)+ \\ +\sigma_5\sin 2\varphi(t) + \sigma_6\cos 2\varphi(t) + \sigma_7\sin\varphi(t) + \sigma_8\cos\varphi(t) + \sigma_9\big]. \tag{24}$$

Вычислим первую и вторую производные от инвариантного соотношения (21) в силу уравнений (20):

$$\gamma_3(\alpha_3\lambda_1(t) + \beta_3\lambda_2(t)) + \frac{1}{\dot{\varphi}}(\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t)) = 0, \tag{25}$$

$$\gamma_3^2(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) - \frac{1}{\dot{\varphi}}\Big\{\gamma_3(\alpha_3 F_1(t) + \beta_3 F_2(t))+ \\ +\Big[\frac{1}{\dot{\varphi}}(\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t))\Big]^{\cdot}\Big\} = 0. \tag{26}$$

При изучении соотношений (21), (25), (26) необходимо учитывать обозначения (14)–(19) и (22)–(24) и структуру (21), (25), (26). Таким образом, необходимо рассмотреть три случая: $\alpha_3 = \beta_3 = 0$; $\gamma_3 = 0$, $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$; $\gamma_3 \neq 0$, $\alpha_3^2 + \beta_3^2 \neq 0$. В первом случае на основании (21) необходимо требовать, чтобы $F_3(t) = 0$ для любых значений t. Во втором случае, используя (25), получим уравнение

$$\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t) = 0. \tag{27}$$

Требование выполнения (27) для любых t приводит к условиям на параметры. Они обеспечивают существование инвариантного соотношения (21). В третьем случае в уравнение (26) можно внести выражение $\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)$, найденное из (21). Тогда получим уравнение $\Phi(t) = 0$, правая часть которого зависит только от времени. Для получения условий существования маятниковых движений следует потребовать, чтобы $\Phi(t) \equiv 0$ для любых t.

Замечание. Если зависимость $\varphi = \varphi(t)$ не задана, то указанные выше уравнения: $F_3(t) = 0$, $\beta_3 F_1(t) - \alpha_3 F_2(t) + \dot{F}_3(t) = 0$, $\Phi(t) = 0$ служат дифференциальными уравнениями на функцию $\varphi(t)$. После получения условий существования маятниковых движений функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ определяются из уравнений (20).

4. Один случай разрешимости уравнений (11)–(13). В задаче о движении тяжелого твердого тела с неподвижной точкой известны три варианта маятниковых движений: вращательное движение; колебание относительно вертикали; асимптотическое движение, при котором центр масс при $t \to \infty$ стремится занять верхнее положение равновесия. В данной статье в силу того, что $\dot{\varphi}(t)$ в формулы (25), (26) входит в качестве знаменателя, рассмотрим случай, когда маятниковое движение является вращением относительно некоторой оси в пространстве. Пусть

$$\dot{\varphi} = \sqrt{p_0 + p_1 \cos\varphi}, \tag{28}$$

где p_0, p_1 – параметры, удовлетворяющие условию $p_0 > p_1 > 0$. Тогда из уравнения (28) получим

$$\begin{aligned} &\varphi = 2\mathrm{am}\varkappa_0 t, && \sin\varphi = 2\mathrm{sn}\varkappa_0 t\mathrm{cn}\varkappa_0 t, \\ &\cos\varphi = 1 - 2\mathrm{cn}^2\varkappa_0 t, && \dot{\varphi} = 2\varkappa_0\mathrm{dn}\varkappa_0 t, \end{aligned} \tag{29}$$

где $\mathrm{am}\varkappa_0 t$, $\mathrm{sn}\varkappa_0 t$, $\mathrm{cn}\varkappa_0 t$, $\mathrm{dn}\varkappa_0 t$ – эллиптические функции времени. Значение $\varkappa_0$ и модуль эллиптических функций k_* таковы

$$\varkappa_0 = \frac{1}{2}\sqrt{p_0 + p_1}, \quad k_*^2 = \frac{2p_1}{p_0 + p_1}. \tag{30}$$

Пусть $\gamma_3 \neq 0$, введем вместо $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ новую переменную $\rho(t)$:

$$\lambda_1(t) = \rho(t)\sin\gamma_3\varphi(t), \quad \lambda_2(t) = \rho(t)\cos\gamma_3\varphi(t). \tag{31}$$

На основании (28), (31) из (11)–(13) имеем

$$\begin{gathered} \dot{\rho}(t)\sin\gamma_3\varphi(t) = (\mu_2\sin\varphi(t) + \mu_3\cos\varphi(t) + \mu_4)\sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi(t)} + \\ +\mu_5\sin 2\varphi(t) + \mu_6\cos 2\varphi(t) + \mu_7^*\sin\varphi(t) + \mu_8^*\cos\varphi(t) + \mu_9^*, \end{gathered} \tag{32}$$

$$\begin{gathered} \dot{\rho}(t)\cos\gamma_3\varphi(t) = (\varepsilon_2\sin\varphi(t) + \varepsilon_3\cos\varphi(t) + \varepsilon_4)\sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi(t)} + \\ +\varepsilon_5\sin 2\varphi(t) + \varepsilon_6\cos 2\varphi(t) + \varepsilon_7^*\sin\varphi(t) + \varepsilon_8^*\cos\varphi(t) + \varepsilon_9^*, \end{gathered} \tag{33}$$

$$\begin{gathered} \dot{\varphi}(\beta_3\lambda_1(t) - \alpha_3\lambda_2(t)) + (\sigma_2\sin\varphi(t) + \sigma_3\cos\varphi(t) + \sigma_4)\sqrt{p_0 + p_1\cos\varphi(t)} + \\ +\sigma_5\sin 2\varphi(t) + \sigma_6\cos 2\varphi(t) + \sigma_7^*\sin\varphi(t) + \sigma_8^*\cos\varphi(t) + \sigma_9^*. \end{gathered} \tag{34}$$

Здесь

$$\begin{gathered} \mu_7^* = \mu_7 + \frac{\mu_0 p_1}{2}, \quad \mu_8^* = \mu_8 + \mu_1 p_1, \quad \mu_9^* = \mu_9 + \mu_1 p_0, \\ \varepsilon_7^* = \varepsilon_7 + \frac{\varepsilon_0 p_1}{2}, \quad \varepsilon_8^* = \varepsilon_8 + \varepsilon_1 p_1, \quad \varepsilon_9^* = \varepsilon_9 + \varepsilon_1 p_0, \\ \sigma_7^* = \sigma_7 + \frac{\sigma_0 p_1}{2}, \quad \sigma_8^* = \sigma_8 + \sigma_1 p_1, \quad \sigma_9^* = \sigma_9 + \sigma_1 p_0. \end{gathered} \tag{35}$$

В уравнениях (32)–(34) функции $\varphi(t)$, $\sin\varphi(t)$, $\cos\varphi(t)$ имеют значения (29).

Исключим $\dot{\rho}(t)$ из уравнений (32), (33). Тогда получим уравнение, из которого вытекает

$$(\mu_2-\varepsilon_3)\sin(1+\gamma_3)\varphi+(\mu_3+\varepsilon_2)\cos(1+\gamma_3)\varphi+(\mu_2+\varepsilon_3)\sin(1-\gamma_3)\varphi+ \\ +(\mu_3-\varepsilon_2)\cos(1-\gamma_3)\varphi+2\mu_4\cos\gamma_3\varphi-2\varepsilon_4\sin\gamma_3\varphi=0, \tag{36}$$

$$\begin{gathered}(\mu_5-\varepsilon_6)\sin(2+\gamma_3)\varphi+(\mu_6+\varepsilon_5)\cos(2+\gamma_3)\varphi+\\ +(\mu_5+\varepsilon_6)\sin(2-\gamma_3)\varphi+(\mu_6-\varepsilon_5)\cos(2-\gamma_3)\varphi+\\ +(\mu_7^*-\varepsilon_8^*)\sin(1+\gamma_3)\varphi+(\mu_8^*+\varepsilon_7^*)\cos(1+\gamma_3)\varphi+\\ +(\mu_7^*+\varepsilon_8^*)\sin(1-\gamma_3)\varphi+(\mu_8^*-\varepsilon_7^*)\cos(1-\gamma_3)\varphi+\\ +2\mu_9^*\cos\gamma_3\varphi-2\varepsilon_9^*\sin\gamma_3\varphi=0.\end{gathered} \tag{37}$$

Рассмотрим случай, когда в уравнениях (36), (37) $\gamma_3=1$. В силу равенств $\boldsymbol{\gamma}=\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$, $(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\cdot\boldsymbol{a}=1$ можно считать, что $\alpha_1=1$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$, $\beta_1=0$, $\beta_2=1$, $\beta_3=0$. Значения (14)–(19) упрощаются:

$$\begin{gathered}\gamma_3=1,\quad \mu_0=A_{13},\quad \varepsilon_0=A_{23},\quad \sigma_0=A_{33},\quad \mu_1=A_{23},\quad \varepsilon_1=-A_{13},\\ \sigma_1=0,\quad \mu_2=-a_0'B_{12},\quad \varepsilon_2=a_0'B_{11},\quad \sigma_2=0,\quad \mu_3=-a_0'B_{22},\\ \varepsilon_3=a_0'B_{12},\quad \sigma_3=0,\quad \mu_4=-a_0B_{23},\quad \varepsilon_4=a_0B_{13},\quad \sigma_4=0,\\ \mu_5=\frac{1}{2}a_0'^2C_{13},\quad \mu_6=\frac{1}{2}a_0'^2C_{23},\quad \mu_7=-a_0a_0'C_{12},\\ \mu_8=-a_0'[s_3-a_0(C_{33}-C_{22})],\quad \mu_9=\frac{1}{2}[2a_0s_2+(a_0'^2-2a_0^2)C_{23}],\\ \varepsilon_5=-\frac{1}{2}a_0'^2C_{23},\quad \varepsilon_6=\frac{1}{2}a'^2C_{13},\quad \varepsilon_7=a_0'[s_3-a_0(C_{33}-C_{11})],\\ \varepsilon_8=a_0C_{12},\quad \varepsilon_9=-\frac{1}{2}[2a_0s_1+(a_0'^2-2a_0^2)C_{13}],\quad \sigma_5=\frac{1}{2}a_0'^2(C_{22}-C_{11}),\\ \sigma_6=-a_0'^2C_{12},\quad \sigma_7=a_0'(s_2-a_0C_{23}),\quad \sigma_8=a_0'(s_1-a_0C_{13}),\quad \sigma_9=0.\end{gathered} \tag{38}$$

Поскольку $\alpha_3=0$, $\beta_3=0$, то из уравнения (34) в силу (35), (38) следует

$$C_{12}=0,\quad C_{22}=C_{11},\quad s_1=a_0C_{13}, \tag{39}$$

$$p_1=\frac{2a_0'}{A_{33}}(s_2-a_0C_{23}). \tag{40}$$

Из уравнений (36), (37) при $\gamma_3=1$ в силу (38), (39) получаем

$$B_{12}=0,\quad B_{11}=0,\quad B_{22}=0,\quad a_0B_{13}=0,\quad a_0B_{23}=0, \tag{41}$$

$$A_{23} = 0, \quad A_{13} = 0, \tag{42}$$

$$s_1 = 0, \quad a_0 s_2 + (a_0'^2 - a_0^2)C_{23} = 0, \quad s_3 - a_0(C_{33} - C_{11}) = 0, \quad C_{13} = 0. \tag{43}$$

На основании равенств (39)–(43) с учетом функции $\sin\varphi(t)$ из (29) функцию $\rho(t)$ найдем из (32)

$$\rho(t) = \frac{2a_0'^2 C_{23}}{\varkappa_0 k_*^2} \mathrm{dn}\varkappa_0 t + C_0, \tag{44}$$

где C_0 – произвольная постоянная. Функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t)$ определим из (31):

$$\lambda_1(t) = 2\rho(t)\mathrm{sn}\varkappa_0 t\mathrm{cn}\varkappa_0 t, \quad \lambda_2(t) = \rho(t)(1 - 2\mathrm{cn}^2\varkappa_0 t). \tag{45}$$

Следовательно, $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$ – периодические функции времени с периодом $\dfrac{2K}{\varkappa_0}$, где K – полный эллиптический интеграл

$$K = \int\limits_0^{\pi/2} \frac{du}{\sqrt{1 - k_*^2 \sin^2 u}}.$$

Проанализируем условия (39)–(43). Из (42) следует, что ось вращения гиростата является главной осью. Для задачи о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом: $B_{ij} = 0$, $C_{ij} = 0$ $(i, j = \overline{1,3})$. Считая $s_1^2 + s_2^2 + s_3^2 \neq 0$, из (39), (41), (43) получим $a_0 = 0$, $p_1 = \dfrac{2s_2}{A_{33}}$, $s_1 = 0$, $s_3 = 0$. Эти условия показывают, что маятниковое движение происходит вокруг горизонтальной оси в неподвижном пространстве, а центр масс гиростата принадлежит главной плоскости эллипсоида инерции. При данном движении скорость собственного вращения (28) характеризуется условием $p_0 > s_2 > 0$, т. е. на параметр p_0 накладывается ограничение в виде неравенства.

Предположим, что либо $B_{13} \neq 0$, либо $B_{23} \neq 0$. Тогда из (41) получим $a_0 = 0$, т. е. вращение гиростата опять происходит вокруг горизонтальной оси в пространстве. Если $a_0 \neq 0$, то из (41) вытекают равенства

$$B_{23} = 0, \quad B_{13} = 0. \tag{46}$$

С учетом первых трех равенств из (41), равенства (46) показывают, что в матрице B только элемент B_{33} отличен от нуля.

Выясним роль элементов матрицы C в условиях (39), (43), (44). Если предполагать $a_0 = 0$, то матрица C будет иметь вид

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & 0 & 0 \\ 0 & C_{11} & 0 \\ 0 & 0 & C_{33} \end{pmatrix}, \tag{47}$$

вектор обобщенного центра масс $\mathbf{s}$ будет принадлежать главной плоскости эллипсоида инерции, а параметр p_1 примет значение $\dfrac{2s_2}{A_{33}}$. Если $a_0 \neq 0$, то матрица C, кроме C_{11} и C_{33}, будет содержать элемент C_{23}. При этом, в отличие от случая $a_0 = 0$, для которого $\rho(t) = C_0$, в исследуемом варианте функция $\rho(t)$ из (44) зависит от времени, а в качестве параметров в нее входят величины (30).

Заключение. Рассмотрена задача об условиях существования маятниковых движений гиростата с переменным гиростатическим моментом. Предполагается, что гиростатический момент принадлежит некоторой плоскости, неизменно связанной с телом-носителем. Установлены три дифференциальных уравнения на функции $\lambda_1(t), \lambda_2(t), \varphi(t)$. Предложен метод получения условий существования маятниковых движений, основанный на методе инвариантных соотношений. Для случая, когда маятниковое движение является вращением, описываемым эллиптическими функциями времени, а плоскость, содержащая гиростатический момент, ортогональна оси вращения гиростата, установлены новые условия существования рассматриваемых движений. Выполнен анализ этих условий, показана возможность маятниковых движений в случае, когда на гиростат действует только сила тяжести. Указан период функций $\lambda_i(t)$ $(i = 1, 2)$, $\varphi(t)$. Получены уравнения (см. (36), (37)), которые можно использовать для получения новых классов маятниковых движений (например, при условии $\gamma_3 = \dfrac{1}{2}$).

1. *Борисов А.В., Мамаев И.С.* Динамика твердого тела. – Ижевск: НИЦ "Регулярная и хаотическая динамика". – 2001. – С. 384.
2. *Горр Г.В., Кудряшова Л.В., Степанова Л.А.* Классические задачи динамики твердого тела. – Киев: Наук. думка, 1978. – 296 с.
3. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* Динамика гиростата, имеющего неподвижную точку. – Донецк: ДонНУ. – 2012. – 364 с.
4. *Liouville J.* Développements sur un chapitre de la Mécanique de Poisson // J math. pures et appl. – 1858. – **3**. – P. 1–25.
5. *Жуковский Н.Е.* О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью // Собр. соч. – Т. 1. – М., 1949. – С. 31–152.
6. *Румянцев В.В.* Об управлении ориентацией и о стабилизации спутника роторами // Вестн Моск. ун-та. Математика, механика. – 1970. – № 2. – С. 83–96.
7. *Харламов П.В.* Об уравнениях движения системы твердых тел // Механика твердого тела. – 1972. – Вып. 4. – С. 52–73.
8. *Дружинин Э.И.* О перманентных вращениях уравновешенного неавтономного гиростата // Прикл. математика и механика. – 1999. – **63**, вып. 5. – С. 825–826.
9. *Ковалева Л.М., Позднякович А.Е.* Равномерные вращения вокруг наклонной оси твердого тела с одним маховиком // Механика твердого тела. – 2000. – Вып. 30. – С. 100–105.
10. *Волкова О.С.* Регулярные прецессии тяжелого гиростата вокруг вертикальной оси // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2009. – **19**. – С. 30–35.
11. *Горр Г.В., Мазнев А.В.* О некоторых классах регулярной прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом относительно наклонной оси в обобщенной задаче динамики // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2010. – **21**. – С. 64–75.
12. *Мазнев А.В.* Регулярные прецессии гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Докл. НАН Украины. – 2011. – № 8. – С. 66–72.
13. *Возняк А.А.* Полурегулярные прецессии первого типа в задаче о движении гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Тр. ИПММ НАН Украины. – 2012. – **24**. – С. 45–57.

14. *Мазнев А.В.* Один случай прецессии общего вида гиростата с переменным гиростатическим моментом // Докл. НАН Украины. – 2012. – № 3. – С. 72–77.
15. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Маятниковые вращения тяжелого гиростата с переменным гиростатическим моментом // Механика твердого тела. – 2009. – Вып. 39. – С. 42–49.
16. *Волкова О.С., Гашененко И.Н.* Точные решения уравнений движения гиростата вокруг неподвижной точки // Современные проблемы математики, механики и информатики / Под ред. Н.Н. Кизиловой, Г.Н. Жолткевича. – Харьков: Изд-во: "Апостроф", 2011. – С. 74–84.
17. *Мазнев А.В., Котов Г.А.* Прецессионно-изоконические движения второго типа в задаче о движении гиростата с переменным гироскопическим моментом // Вісн. Донецького ун-ту. Сер. А. Природничі науки. – 2012. – Вип. 1. – С. 79–83.
18. *Мазнев А.В.* Прецессионные движения гиростата с переменным гиростатическим моментом под действием потенциальных и гироскопических сил // Механика твердого тела. – 2010. – Вып. 10. – С. 91–104.

A.A. Voznyak

The pendulum motions of a gyrostat under the action of potential and gyroscopic forces in the case of variable gyrostatic moment

The existence conditions for pendulum motions of a gyrostat are studied under the assumption that the variable gyrostatic moment belongs to the plane which is orthogonal to the rotation axis. A gyrostat moves in magnetic and electric fields under the action of central Newtonian forces. The particular solution of the motion equations is found and expressed in terms of elliptic functions of time.

Keywords: *gyrostatic moment, the pendulum motion, elliptic functions.*

А.О. Возняк

Маятникові рухи гіростата під дією потенціальних і гіроскопічних сил у випадку змінного гіростатичного моменту

Одержано умови існування маятникових рухів гіростата, для яких змінний гіростатичний момент належить площині, ортогональній вісі обертання. Рух гіростата відбувається в магнітному та електричному полях під дією центральних ньютонівських сил. Указано розв'язок рівнянь руху, що описується еліптичними функціями часу.

Ключові слова: *гіростатичний момент, маятникові рухи, еліптичні функції.*

Национальный ун-т экономики и торговли им. М. Туган-Барановского, Донецк

alina_voznyak@mail.ru

Получено 14.10.13