УДК 531.38

©2014. **Т.Н. Астахова**

# ОБ ИССЛЕДОВАНИИ ЗАДАЧИ СТАБИЛИЗАЦИИ ИНТЕГРАТОРА БРОКЕТТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ОБРАТНОЙ СВЯЗИ

С помощью функции Ляпунова описано предельное поведение решений управляемых систем. Рассмотрена система Брокетта с четырьмя управлениями, для которой решена задача стабилизации. Исследованы свойства $\pi_\tau$-решения на интервале гладкости функции управления $[0, \tau]$.

**Ключевые слова:** *система Брокетта, управляемая функция Ляпунова, ряд Вольтерры, $\pi_\tau$-решение.*

В настоящее время задача стабилизации программных движений управляемых систем, подчиненных неголономным связям, занимает особое место в исследовании движения механических систем. Среди различных решений проблемы стабилизации наиболее общим и корректным признан подход А.М. Ляпунова. Ляпуновым было предложено использование вспомогательных функций, что позволяет исследовать устойчивость, не находя самих решений уравнений, что доказывает эффективность прямого метода Ляпунова. Однако построение данной вспомогательной функции представляет некоторую трудность.

Р. Брокетт в работе [1] представил модельный пример вполне управляемой системы, которая, однако, не удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости. В данной работе рассмотрена задача стабилизации нелинейной системы Брокетта, которая не может быть стабилизирована классическим управлением.

В последующем изложении будем использовать “$\pi$-решения”, введенные в работе [2], и прямой метод Ляпунова.

**1. Описание предельного поведения решений с помощью функции Ляпунова.** Следуя работе [3], покажем, что для системы вида

$$\dot{x} = \sum_{i=1}^{m} u_i f_i(x), \quad u \in \mathbb{R}^m,\ x \in \mathbb{R}^n, \tag{1}$$

ни в какой окрестности $B$ точки $x = 0$ не существует управляемой функции Ляпунова (в смысле определения управляемой функции Ляпунова из [4]), если $f_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$ и

$$\operatorname{rank}(f_1(0), f_2(0), \ldots, f_m(0)) = m < n.$$

Система (1) не удовлетворяет необходимому условию стабилизируемости Брокетта (см. [5]). Для проверки этого факта перепишем систему (1) в виде

$$\dot{x} = u_1 f_1(x) + \cdots + u_m f_m(x) = uF(x). \tag{2}$$

Действительно, отображение $(x, u) \mapsto F(x)u$ не содержит окрестности нуля в своем образе, когда оно ограничено достаточно малой окрестностью нуля. Теперь переопределим $F$:

$$F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix},$$

где $F_1(x)$ – невырожденная матрица размерности $m \times m$ для всех $x$ из некоторой окрестности $B(0, \varepsilon)$. Тогда из условия

$$\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x)u \\ F_2(x)u \end{pmatrix}$$

следует $u = 0$, откуда $a = 0$. Итак, вектор $\begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix}$ не принадлежит образу $F(x)u$ ни при каком $a \neq 0$, т. е. необходимое условие стабилизируемости Брокетта не выполнено.

По теореме Артстейна [6, p. 1166], для системы (1) не существует управляемой функции Ляпунова. Несмотря на отсутствие функции Ляпунова для системы (1), построим управление, обеспечивающее экспоненциальную сходимость решений $x(t)$ системы (1) к $x = 0$ при $t \to +\infty$. Для достижения этой цели предположим, что задана определенно-положительная функция $V(x)$, $V \in C^1(\mathbb{R}^n)$, для которой при произвольном $x^0 \in \mathbb{R}^n$ возможно подобрать управление вида $u = u^0(t)$, $t \in [0, \tau]$, удовлетворяющее свойству

$$x(\tau; x^0, u^0) = x^0 - \gamma \nabla V(x^0), \quad \gamma > 0. \tag{3}$$

При $x^0 \neq 0$ и достаточно малом $\gamma$ из свойства (3) следует неравенство

$$V(x(\tau; x^0, u^0)) < V(x^0).$$

Здесь $x(t; x^0, u)$ – решение системы (1) с начальным условием $x = x^0$ при $t = 0$ и управлением $u = u(t)$.

Продолжая такой процесс для $t = \tau;\ 2\tau;\ 3\tau; \ldots$, будем определять последовательность точек $x^j$ и функции управления $u = u^j(t)$, $j = 1, 2, \ \ldots$ , из условий

$$x(\tau; x^j, u^j) = x^j - \gamma \nabla V(x^j),$$
$$x^{j+1} = x(\tau; x^j, u^j), \quad j = 0, 1, 2, \ \ldots \ .$$

В результате получим монотонную последовательность

$$V(x^0) > V(x^1) > V(x^2) > \ldots \ .$$

Отсюда, при некоторых дополнительных предположениях, докажем экспоненциальное стремление $x^j$ к $x = 0$ при $j \to \infty$.

Для дальнейших построений будем использовать понятие “$\pi_\tau$-решения”, которое расширяет определение “$\pi$-решений”, введенное в [2].

***Определение* 1.** Для заданных $\tau > 0$ функции обратной связи $h: [0,+\infty) \times D \to U$ назовем $\pi_\tau$-решением системы (1) абсолютно непрерывную на полуинтервале $[0,+\infty)$ функцию $x(t) \in D$, которая удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{x}(t) = f\left(x(t), h(t, x(t_j))\right), \quad t \in (t_j, t_{j+1}),$$

при всех $j = 0, 1, 2, \ldots$ .

**2. Стабилизация интегратора Брокетта с m=4 управлениями.** Построим нестационарную функцию обратной связи $u = h(t,x)$ для системы следующего вида [1]:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1, \\ \dot{x}_2 = u_2, \\ \dot{x}_3 = u_3, \\ \dot{x}_4 = u_4, \\ \dot{x}_5 = x_1 u_2 - x_2 u_1, \\ \dot{x}_6 = x_1 u_3 - x_3 u_1, \\ \dot{x}_7 = x_1 u_4 - x_4 u_1, \\ \dot{x}_8 = x_2 u_3 - x_3 u_2, \\ \dot{x}_9 = x_2 u_4 - x_4 u_2, \\ \dot{x}_{10} = x_3 u_4 - x_4 u_3, \end{cases} \tag{4}$$

где $x \in \mathbb{R}^{10}$, $u \in \mathbb{R}^4$.

Для синтеза обратной связи воспользуемся семейством функций управления следующего вида:

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + a_{12}\cos(k_{12}\omega t) + a_{13}\cos\left(k_{13}\omega t\right) + a_{14}\cos\left(k_{14}\omega t\right), \\ u_2 = u_2^0 + a_{12}\sin\left(k_{12}\omega t\right) + a_{23}\cos\left(k_{23}\omega t\right) + a_{24}\cos\left(k_{24}\omega t\right), \\ u_3 = u_3^0 + a_{13}\sin\left(k_{13}\omega t\right) + a_{23}\sin\left(k_{23}\omega t\right) + a_{34}\cos\left(k_{34}\omega t\right), \\ u_4 = u_4^0 + a_{14}\sin\left(k_{14}\omega t\right) + a_{24}\sin\left(k_{24}\omega t\right) + a_{34}\sin\left(k_{34}\omega t\right), \quad t \in [0,\tau], \end{cases} \tag{5}$$

где $u_i^0 \in \mathbb{R}$, $a_{jl} \in \mathbb{R}$, $k_{jl} \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, $1 \le i \le 4$, $1 \le j < l \le 4$, $\omega = 2\pi/\tau$.

Рассмотрим определенно-положительную функцию

$$V(x) = \|x\|^2 \ge 0.$$

Покажем, что для любого $x^0 \in \mathbb{R}^{10}$ можно выбрать параметры $a_{jl}$, $k_{jl}$ и $u_i^0$ в управлении $u_i(t)$ вида (5) так, чтобы

$$x(\tau; x^0, u) = x^0 - \gamma \nabla V(x^0) = (1 - 2\gamma)x^0, \tag{6}$$

где $0 < \gamma < \dfrac{1}{2}$, $x(t; x^0, u)$ – решение системы (1) с управлением (5), удовлетворяющее начальному условию $x(0; x^0, u) = x^0$.

Решим уравнения (6) относительно переменных $u_i^0$, $a_{jl}$, полагая, что целочисленные параметры $k_{jl}$ удовлетворяют условию отсутствия резонанса

$$|k_{jl}| \neq |k_{qr}| \quad (j,l) \neq (q,r). \tag{7}$$

Используя управление (5) для $x(\tau; x^0, u)$, получим:

$$u_i^0 = -\frac{x_i^0 \omega\gamma}{\pi}, \qquad i = \overline{1,4}; \tag{8}$$

$$a_{12} = u_1^0 \pm \sqrt{{u_1^0}^2 + k_{12}\omega\left(x_2^0 u_1^0 - x_1^0 u_2^0 + u_5^0\right)}, \tag{9}$$

$$a_{23} = \frac{k_{23}}{2u_1^0}\left[\frac{a_{13}(a_{13} - 2u_1^0)}{k_{13}} + \frac{\gamma\omega^2 x_6^0}{\pi} + \omega(u_3^0 x_1^0 - u_1^0 x_3^0)\right], \tag{10}$$

где $a_{13}$ является корнем уравнения $\varphi_{13}(a_{13}) = 0$, а

$$\begin{aligned}\varphi_{13}(z) = {}& k_{12}k_{23}\pi^2 z^4 - 4\,k_{12}k_{23}\pi^2 u_1^0 z^3 + 2k_{12}\pi\Big(k_{13}k_{23}\omega(\gamma\omega x_6^0 - \pi(u_1^0 x_3^0 - u_3^0 x_1^0) - \\ & -2\pi u_1^0(k_{13}u_2^0 - k_{23}u_1^0))\Big) z^2 - 4k_{12}k_{13}k_{23}\pi\omega u_1^0\left(\pi(u_3^0 x_1^0 - u_1^0 x_3^0) + \gamma\omega x_6^0\right) z + \\ & +k_{13}^2\Big[k_{12}k_{23}\omega^2\Big(\pi^2({u_3^0}^2 {x_1^0}^2 + {u_1^0}^2 {x_3^0}^2) + 2\gamma\pi\omega x_6^0(u_3^0 x_1^0 - u_1^0 x_3^0) - 2\pi^2 u_1^0 u_3^0 x_1^0 x_3^0 + \\ & +\gamma^2\omega^2 {x_6^0}^2\Big) + 4k_{12}\pi\omega u_1^0\Big(\pi(\omega u_1^0 u_3^0 x_2^0 - u_2^0 u_3^0 x_1^0) + \gamma\omega(u_1^0 x_8^0 - u_2^0 x_6^0)\Big) + 8\pi^2 {u_1^0}^2 u_3^0 a_{12}\Big].\end{aligned}$$

Коэффициенты $a_{24}$ и $a_{34}$ принимают следующие значения:

$$\begin{aligned}a_{24} = {}& \Big(4k_{34}k_{23}k_{14}k_{13}k_{12}\pi u_1^0\Big(k_{14}\omega(\pi u_4^0 x_1^0 + \gamma\omega x_7^0 - \pi u_1^0 x_4^0) + \pi a_{14}(a_{14} - 2u_1^0)\Big)\Big)^{-1} \times \\ & \times\Big[2k_{12}k_{23}k_{13}k_{24}k_{14}k_{34}\pi\omega a_{14}(2(\pi({u_1^0}^2 x_4^0 - u_1^0 u_4^0 x_1^0) - \gamma\omega u_1^0 x_7^0) + a_{14}(\pi(u_4^0 x_1^0 + u_1^0 x_4^0) - \\ & -\gamma\omega x_7^0)) + k_{12}k_{23}k_{13}k_{34}k_{24}\pi^2 a_{14}^4 + k_{12}k_{23}k_{13}k_{24}k_{14}^2 k_{34}\omega^2(\gamma^2\omega^2 {x_7^0}^2 - 2u_4^0 u_1^0 x_1^0 x_4^0 \pi^2) + \\ & +4k_{12}k_{13}k_{23}k_{14}^2 k_{24}\pi\omega u_1^0(u_1^0(\pi u_4^0 x_3^0 + \gamma\omega x_{10}^0) - \pi u_3^0 u_4^0 - \gamma\omega u_3^0 x_7^0) + 8k_{14}^2\pi^2 {u_1^0}^2 u_4^0 \times \\ & \times\left(a_{23}k_{12}k_{13}k_{24} + a_{13}k_{12}k_{24}k_{23} - a_{12}k_{13}k_{23}k_{34}\right) + k_{12}k_{23}k_{13}k_{24}k_{14}^2 k_{34}\omega^2 {u_1^0}^2 {x_4^0}^2 \pi^2 + \\ & +4k_{23}k_{13}k_{34}k_{14}^2 k_{12}\pi\omega u_1^0(\pi u_2^0 u_4^0 x_1^0 + \gamma\omega u_2^0 x_7^0 - u_1^0(\pi u_4^0 x_2^0 - \gamma\omega x_9^0)) + \\ & +4a_{14}^2 k_{12}k_{13}k_{23}\pi^2 u_1^0(k_{14}(k_{34}u_2^0 - k_{24}u_3^0) - k_{24}k_{34}(a_{14} - u_1^0)\Big];\end{aligned} \tag{11}$$

$$a_{34}=\left(4k_{34}k_{23}k_{14}k_{13}k_{12}\pi u_1^0\Big(k_{14}\omega(\pi u_4^0x_1^0+\gamma\omega x_7^0-\pi u_1^0x_4^0)+\pi a_{14}(a_{14}-2u_1^0)\Big)\right)^{-1}\times$$
$$\times\Big[2k_{12}k_{13}k_{14}k_{23}k_{24}k_{34}\pi\omega a_{14}\Big((\pi u_4^0x_1^0+\gamma\omega x_7^0)a_{14}-2u_1^0(\pi u_4^0x_1^0+\gamma\omega x_7^0-\pi u_1^0x_4^0)\Big)+$$
$$+k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{34}\pi^2a_{14}^2\left(a_{14}^2-2u_1^0(\omega x_4^0+2u_1^0a_{14}-2u_1^0\right)+k_{12}k_{13}k_{14}^2k_{23}k_{24}k_{34}\;\omega^2\times$$
$$\Big(\gamma^2\omega^2x_7^{0\,2}-2\gamma\pi\omega(u_1^0x_4^0x_7^0-u_4^0x_1^0x_7^0)+\pi^2(u_4^{0\,2}x_1^{0\,2}+u_1^{0\,2}x_4^{0\,2}-2u_1^0u_4^0x_1^0x_4^0)\Big)+$$
$$+4k_{12}k_{13}k_{14}^2k_{23}k_{24}\pi\omega u_1^0\left(u_3^0(\gamma\omega x_7^0+\pi u_4^0x_1^0)-u_1^0(\pi u_4^0x_3^0-\gamma\omega u_1^0x_{10}^0)\right)-$$
$$-8k_{14}^2\pi^2u_1^{0\,2}u_4^0\left(k_{12}k_{13}k_{24}a_{23}+k_{12}k_{23}k_{24}a_{13}-k_{13}k_{23}k_{34}a_{12}\right)+$$
$$+\,4k_{12}k_{13}k_{14}^2k_{23}k_{34}\pi\omega u_1^0\left(u_2^0(\pi u_4^0\,x_1^0-\gamma\omega x_7^0)+u_1^0(\pi u_4^0x_2^0+\gamma\omega x_9^0)\right)-$$
$$-4k_{12}k_{13}k_{14}k_{23}\pi^2u_1^0a_{14}^2(k_{34}u_2^0-k_{24}u_3^0)\Big]\,, \qquad (12)$$

где $a_{14}$ является корнем уравнения восьмой степени $\varphi_{14}(a_{14})=0$ (см. п. 3).

Из проведенных рассуждений вытекает следующее утверждение.

**Предложение 1.** *Предположим, что для заданных $\tau>0$, $0<\gamma<\dfrac{1}{2}$, $x^0\in\mathbb{R}^{10}$ параметры управления (5) удовлетворяют соотношениям (7)–(12). Тогда решение $x(t;x^0,u)$, $t\in[0,\tau]$, системы (4) с начальным условием $x(0)=x^0$ и управлением (5) удовлетворяет условию*

$$x(\tau;x^0,u)=(1-2\gamma)x^0. \qquad (13)$$

Выражения (8)–(12) могут быть использованы для задания параметров $u_i^0$, $a_{jl}$ при любом фиксированном $x^0\in\mathbb{R}^{10}$. Запишем представления (8)–(12) в виде

$$u_i^0=u_i^0(x^0),\quad a_{jl}=a_{jl}(x^0),\quad 1\le i\le 4,\quad 1\le j<l\le 4. \qquad (14)$$

Перепишем теперь функции управления (5) в виде обратной связи

$$u=h(t,x)=(h_1(t,x),h_2(t,x),h_3(t,x),h_4(t,x))^T:$$

$$h_i(t,x)=u_i^0(x)+\sum_{1\le j<l\le 4}a_{jl}(x)\left\{\delta_{ij}\cos\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau}t\right)+\delta_{il}\sin\left(\frac{2\pi k_{jl}}{\tau}t\right)\right\}, \qquad (15)$$
$$i=1,2,3,4.$$

Справедлива следующая теорема.

**Теорема 1.** *Пусть $0<\gamma<\dfrac{1}{2}$, $\tau>0$, и пусть управление с обратной связью $u=h(t,x)$ задано формулой (15), где функции $u_i^0(x)$ и $a_{jl}(x)$ определены соотношением (14), тогда для произвольного $x^0\in\mathbb{R}^{10}$ соответствующее $\pi_\tau$-решение $x(t)$ системы (4) с управлением (15) удовлетворяет неравенству*

$$\|x(t_j)\|\le e^{\lambda t_j}\|x^0\|,\quad t_j=j\tau,\quad j=0,1,2,\dots\;, \qquad (16)$$

*где* $\lambda = \dfrac{1}{\tau}\ln(1-2\gamma) < 0.$

Доказательство. Обозначим $\pi_\tau$-решение системы (4) с обратной связью (15) через $x(t)$. Пусть $V(x) = \|x\|^2$. По утверждению

$$x(\tau) = (1-2\gamma)x^0.$$

Вычислим значение функции $V(x)$ в каждой точке $x^n = x(n\tau)$, $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned}
V(x^1) &= \|x^1\|^2 = \|x^0(1-2\gamma)\|^2 \le \|x^0\|^2\|(1-2\gamma)\|^2 = V(x^0)\|1-2\gamma\|^2,\\
V(x^2) &= \|x^2\|^2 = \|x^0(1-2\gamma)^2\|^2 \le \|x^0\|^2\|(1-2\gamma)\|^4 = V(x^0)\|1-2\gamma\|^4,\\
&\vdots\\
V(x^n) &= \|x^n\|^2 = \|x^0(1-2\gamma)^n\|^2 \le \|x^0\|^2\|(1-2\gamma)\|^{2n} = V(x^0)\|1-2\gamma\|^{2n}.
\end{aligned}\tag{17}$$

Таким образом, $V(x^n) \le V(x^0)\|1-2\gamma\|^{2n}$, или

$$V(x^0) \ge \frac{1}{(1-2\gamma)^{2n}} \quad \text{при} \quad 0 < \gamma < \frac{1}{2}.$$

Следовательно,

$$\|x^n\|^2 = V(x^n) \le (1-2\gamma)^{2n}V(x^0) = (1-2\gamma)^{2n}\|x^0\|^2 \tag{18}$$

за время $n\tau$.

Пусть $\exp(2n\lambda\tau) = (1-2\gamma)^{2n}$ и $\gamma \in \left(0, \dfrac{1}{2}\right)$, $\ln(1-2\gamma) < 0$, а значит, и $\lambda < 0$.

Неравенство (18) доказывает утверждение теоремы. □

**3. Исследование свойств $\pi_\tau$-решений на интервалах гладкости функции управления.** Отметим, что неравенство (16) характеризует оценку $\pi_\tau$-решений в узлах разбиения $t = j\tau$. Исследуем поведение данных решений внутри интервалов $(j\tau, (j+1)\tau)$. Для этого воспользуемся разложением их в ряд Вольтерры [7].

Напомним, что указанное разложение решений системы (4) можно представить как $x(t) = V_0 + V_1(t) + V_2(t)$, где

$$V_0 = x^0, \quad V_1(t) = \sum_{i=1}^{m} f_i(x^0)\int_0^t u_i(s)ds,$$

$$\begin{aligned}
V_2(t) = \frac{1}{2}\sum_{i\le j}\left(\frac{\partial f_j(x^0)}{\partial x}f_i(x^0) + \frac{\partial f_i(x^0)}{\partial x}f_j(x^0)\right)\int_0^t u_i(s)ds\int_0^t u_j(s)ds+\\
+\frac{1}{2}\sum_{i<j}[f_i, f_j](x^0)\int_0^t\int_0^s \left(u_j(s)u_i(p) - u_i(s)u_j(p)\right)dpds, \quad t \ge 0.
\end{aligned}\tag{19}$$

Таким образом, получаем оценку вида $\|x(t)-V_0\| \le \|V_1(t)\|+\|V_2(t)\|$. Обозначим $S=\{(1,2),(1,3),(1,4),(2,3),(2,4),(3,4)\}$, $M(x^0)=\max_{1\le i\le 4}\|f_i(x^0)\|$.

Предположим, что функции $a_{jl}$ в (14), которые находятся путем решения алгебраических уравнений (8)–(12), удовлетворяют неравенствам

$$|a_{jl}| \le M_{jl}(x^0) \qquad (j,l)\in S. \tag{20}$$

Тогда, подставляя функцию управления (15) в (19), получим следующие оценки:

$$\|V_1(t)\| = \sum_{i=1}^4 \|f_i(x^0)\| \int_0^t |u_i(s)|ds \le 4M(x^0)\sum_{i=1}^4\int_0^\tau |u_i(s)|ds \le$$

$$\le 16M(x^0)\int_0^t \left(|u_i^0| + \sum_{(j,l)\in S}|a_{jl}|\left\{|\delta_{ij}|\left|\cos\frac{2\pi k_{jl}}{\tau}s\right| + |\delta_{jl}|\left|\sin\frac{2\pi k_{jl}}{\tau}s\right|\right\}\right)ds \le$$

$$\le 16M(x^0)\left(\frac{\gamma\omega}{\pi}\|x^0\| + 2\sum_{(j,l)\in S}M_{jl}(x^0)\right)t, \qquad t\in[0,\tau], \tag{21}$$

$$\|V_2(t)\| \le \left|\int_0^t\int_0^s\{u_j(s)u_i(p)-u_i(s)u_j(p)\}dpds\right| \le 2\int_0^t\int_0^s|u_j(s)u_i(p)|dpds \le$$

$$\le 2\left(|u_j^0| + 2\sum_{(j,l)\in S}|a_{jl}|\right)^2\frac{t^2}{2} \le \left(\frac{\gamma\omega}{\pi}\|x^0\| + 2\sum_{(j,l)\in S}M_{jl}(x^0)\right)^2 t^2, \qquad t\in[0,\tau]. \tag{22}$$

Для оценивания правых частей неравенств (21), (22) через $x^0$ воспользуемся соотношением (8):

$$|u_i^0| \le \frac{\gamma\omega}{\pi}|x_i^0| \le \frac{\gamma\omega}{\pi}\|x^0\|, \qquad i=\overline{1,4}. \tag{23}$$

Функцию $M_{12}(x^0)$ найдем с помощью представления (9):

$$|a_{12}| \le -|u_1^0| + \frac{1}{\pi}\sqrt{\gamma\omega\left(\frac{\omega}{\pi}\left(|x_1^0|^2 + 2k_{12}\pi^2|x_1^0x_2^0|\right) + k_{12}\pi\omega|x_5^0|\right)} \le$$

$$\le -\frac{\gamma\omega}{\pi}|x_1^0| + \frac{1}{\pi}\sqrt{\gamma\omega\left(\frac{\omega}{\pi}\left(|x_1^0|^2 + 2k_{12}\pi^2|x_1^0x_2^0|\right) + k_{12}\pi\omega|x_5^0|\right)} \le M_{12}(x^0),$$

где

$$M_{12}(x^0) = -\frac{\gamma\omega}{\pi}\|x^0\| + \frac{1}{\pi}\sqrt{\gamma\omega\|x^0\|\left(\frac{\gamma\omega}{\pi^2}\|x^0\| + |k_{12}|\omega\pi(2\|x^0\|+1)\right)}. \tag{24}$$

Функцию $M_{13}(x^0)$ построим с помощью верхней оценки корней алгебраического уравнения $\varphi_{13}(z)=0$:

$$
\begin{aligned}
&k_{12}k_{23}\pi^2 z^4 - 4\,k_{12}k_{23}\pi^2 u_1^0 z^3 + \\
&+2k_{12}\pi\left(k_{13}k_{23}\omega(\gamma\omega x_6^0 - \pi(u_1^0 x_3^0 - u_3^0 x_1^0) - 2\pi u_1^0(k_{13}u_2^0 - k_{23}u_1^0))\right) z^2 - \\
&-4k_{12}k_{13}k_{23}\pi\omega u_1^0\left(\pi(u_3^0 x_1^0 - u_1^0 x_3^0) + \gamma\omega x_6^0\right) z + \\
&+k_{13}^2\left[k_{12}k_{23}\omega^2\left(\pi^2(u_3^{0\,2} x_1^{0\,2} + u_1^{0\,2} x_3^{0\,2}) + 2\gamma\pi\omega x_6^0(u_3^0 x_1^0 - u_1^0 x_3^0) - \right.\right. \\
&\left.-2\pi^2 u_1^0 u_3^0 x_1^0 x_3^0 + \gamma^2\omega^2 x_6^{0\,2}\right) + 4k_{12}\pi\omega u_1^0\left(\pi(\omega u_1^0 u_3^0 x_2^0 - u_2^0 u_3^0 x_1^0) + \right. \\
&\left.\left. +\gamma\omega(u_1^0 x_8^0 - u_2^0 x_6^0)\right) + 8\pi^2 u_1^{0\,2} u_3^0 a_{12}\right] = 0.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

Приведем уравнение (25) к виду $z^4 + p_{13}^3 z^3 + p_{13}^2 z^2 + p_{13}^1 z + p_{13}^0 = 0$, где

$$
\begin{aligned}
&p_{13}^0 = k_{13}^2\omega^2 u_1^0(u_1^0 x_3^{0\,2} - 2u_3^0 x_1^0 x_3^0) + \frac{k_{13}^2}{\pi^2}\left(\pi\omega^2 u_3^{0\,2} x_1^{0\,2} + \gamma^2\omega^4 x_6^0 \omega^2\right) + \\
&+\frac{2\gamma\omega^3}{\pi}(u_3^0 x_1^0 x_6^0 - u_1^0 x_3^0 x_6^0) + \frac{k_{13}^2}{k_{12}k_{23}\pi^2} \times [8\pi^2 u_1^{0\,2} u_3^0 a_{12} + \\
&+4k_{12}\pi\omega u_1^0\left(\pi(u_1^0 u_3^0 x_2^0 - u_2^0 u_3^0 x_1^0) + \gamma\omega(u_1^0 x_8^0 - u_2^0 x_6^0)\right)];
\end{aligned}
$$

$$
p_{13}^1 = 4k_{13}\omega u_1^0(u_1^0 x_3^0 - u_3^0 x_1^0) - \frac{4}{\pi}k_{13}\gamma\omega^2 u_1^0 x_6^0;
$$

$$
p_{13}^2 = 2k_{13}\omega(u_3^0 x_1^0 - u_1^0 x_3^0) + \frac{2}{\pi}k_{13}\gamma\omega^2 x_6^0 - \frac{4k_{13}}{k_{23}}u_1^0 u_2^0 + u_1^{0\,2}; \quad p_{13}^3 = -4u_1^0.
$$

Обозначим через

$$
M_{13}(x^0) = \frac{\max\left(|p_{13}^1|, |p_{13}^2|, |p_{13}^3|\right)}{|p_{13}^0|} + 1,
\tag{26}
$$

тогда, по лемме о модуле старшего члена [8, с. 150], получим оценку

$$
|a_{13}| \le M_{13}(x^0).
\tag{27}
$$

Аналогично рассмотрим уравнение $\varphi_{14}(z)=0$ в виде

$$
z^8 + p_{14}^7 z^7 + p_{14}^6 z^6 + p_{14}^5 z^5 + p_{14}^4 z^4 + p_{14}^3 z^3 + p_{14}^2 z^2 + p_{14}^1 z + p_{14}^0 = 0,
$$

$$
\begin{aligned}
&p_{14}^0=\frac{{k_{14}}^4}{{k_{13}}^2{k_{23}}^2{k_{34}}^2\pi^4{k_{12}}^2{k_{24}}^2}\times\Bigg[\Bigg(\Big(l_4^4{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^4+8u_1^0u_4^0{k_{23}}^2k_{24}k_{34}\times\\
&\times l_4(l_2k_{34}+l_3k_{24}){k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^3+16{u_1^0}^2u_4^0\left[k_{13}{k_{23}}^2k_{24}k_{34}\left(l_4^2(a_{12}k_{12}k_{13}k_{34}+a_{13}k_{24}\right)+\right.\\
&+\left.\left(\left(l_3^2u_4^0k_{23}+l_4^2a_{23}k_{34}\right)k_{23}{k_{24}}^2+l_2^2u_4^0{k_{34}}^2{k_{23}}^2-2u_4^0l_3l_2k_{34}{k_{23}}^2k_{24}\right){k_{13}}^2\right){k_{12}}^2\Big]\omega^2+\\
&+64\Big[{u_1^0}^3{u_4^0}^2\left(l_2k_{34}-l_3k_{24}\right)a_{12}k_{12}{k_{13}}^2{k_{23}}^2k_{34}+\\
&+\Big({u_1^0}^3{u_4^0}^2\left(l_3k_{24}-l_2k_{34}\right)a_{13}k_{13}{k_{23}}^2k_{24}+\\
&+{u_1^0}^3{u_4^0}^2\left(l_3k_{24}-l_2k_{34}\right)a_{23}{k_{13}}^2k_{23}k_{24}\Big){k_{12}}^2\Big]\omega-\\
&-128{u_1^0}^4{u_4^0}^2l_5k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{34}a_{12}+64{u_1^0}^4{u_4^0}^2l_5^2{k_{12}}^2{k_{24}}^2\Bigg)\pi^4+\\
&+\Bigg(l_4^3x_7^0{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^5+8u_1^0\left(\left(u_1^0x_9^0l_4^2+x_7^0\left(2u_4^0l_4l_2-u_2^0l_4^2\right)\right){k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}+\right.\\
&+\left.\left(u_1^0x_{10}^0l_4^2+x_7^0(2u_4^0l_4l_3-u_3^0l_4^2\right)k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2\right){k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^4+\\
&+32{u_1^0}^2u_4^0\left(l_4a_{12}x_7^0{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}{k_{13}}^2k_{12}+\right.\\
&+\left(l_4a_{13}x_7^0k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2k_{13}-(l_8l_3+l_9l_2)k_{34}{k_{23}}^2k_{24}+l_6l_2{k_{34}}^2{k_{23}}^2+\right.\\
&+\left.\left.\left(x_7^0l_4a_{23}k_{34}k_{23}+l_7l_3{k_{23}}^2\right){k_{24}}^2\right){k_{13}}^2\right){k_{12}}^2\right)\gamma\,\omega^3+\\
&+64{u_1^0}^3u_4^0\left(\left(l_6a_{12}{k_{34}}^2{k_{23}}^2-l_7a_{12}k_{34}{k_{23}}^2k_{24}\right){k_{13}}^2k_{12}+\right.\\
&+\left(\left(l_7a_{13}{k_{23}}^2{k_{24}}^2-l_6a_{13}k_{34}{k_{23}}^2k_{24}\right)k_{13}+\right.\\
&+\left.\left.\left(l_7a_{23}k_{23}{k_{24}}^2-l_6a_{23}k_{34}k_{23}k_{24}\right){k_{13}}^2\right){k_{12}}^2\right)\gamma\,\omega^2\Bigg)\pi^3+\\
&+\Bigg(6{x_7^0}^2l_4^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\omega^6+\left(8u_1^0x_7^0\left(-2l_{11}l_4+u_4^0x_7^0l_{10}\right){k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}+\right.\\
&+\left.8u_1^0x_7^0\left(2l_7l_4+u_4^0x_7^0l_3\right)k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2\right){k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\omega^5+\\
&+\Big(16\,{k_{13}}^2{k_{23}}^2{k_{34}}^2{u_1^0}^2k_{12}k_{24}{x_7^0}^2u_4^0a_{12}+\Big(16\,k_{13}{k_{23}}^2k_{34}{u_1^0}^2{k_{24}}^2{x_7^0}^2u_4^0a_{13}+\\
&+\Big(16{u_1^0}^2l_6^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2-32{u_1^0}^2l_6\left(u_1^0x_{10}^0-u_3^0x_7^0\right)k_{34}{k_{23}}^2k_{24}+\\
&+\Big(16\,k_{23}k_{34}{u_1^0}^2{x_7^0}^2u_4^0a_{23}+16{u_1^0}^2l_7^2{k_{23}}^2\Big){k_{24}}^2\Big){k_{13}}^2\Big){k_{12}}^2\Big)\gamma^2\omega^4\Bigg)\pi^2+\\
&+\Bigg(4{x_7^0}^3l_4{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^3\omega^7+8u_1^0{x_7^0}^2\left(l_6{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}+\right.\\
&+\left.l_7k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2\right){k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^3\omega^6\Bigg)\pi+{k_{13}}^2{k_{23}}^2{k_{34}}^2{k_{12}}^2{k_{24}}^2\gamma^4\omega^8{x_7^0}^4+\\
&+64\,{k_{13}}^2{k_{23}}^2{k_{34}}^2{u_1^0}^4{u_4^0}^2{a_{12}}^2\Bigg];
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_{14}^1 = \frac{-8{k_{14}}^3 u_1^0 \omega}{k_{13}k_{23}k_{34}\pi^3 k_{12}k_{24}} \times \Bigl[\Bigl(l_4^3 {k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^2 + \\
&+ \bigl(4u_1^0u_4^0l_4l_3k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2 + 4u_1^0u_4^0l_2l_4{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}\bigr)\,{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega + \\
&+8{u_1^0}^2u_4^0l_4a_{12}{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}{k_{13}}^2k_{12} + \\
&+8{u_1^0}^2u_4^0\bigl(l_4a_{23}k_{34}k_{23}{k_{24}}^2{k_{13}}^2 + l_4a_{13}k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2k_{13}\bigr)\,{k_{12}}^2\Bigr)\,\pi^4 + \\
&+\Bigl(3x_7^0l_4^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^3 + \bigl(4u_1^0\bigl(l_7l_4 + u_4^0x_7^0l_3\bigr)\,k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2 + \\
&+4u_1^0\bigl(l_6l_4 - u_4^0x_7^0l_2\bigr)\,{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}\bigr)\,{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^2 + \\
&+\Bigl(8{u_1^0}^2u_4^0x_7^0\bigl((a_{13}k_{23} - a_{23}k_{13})k_{12}k_{24} + a_{12}k_{13}k_{23}k_{34}\bigr)\,k_{12}k_{13}k_{23}k_{24}k_{34}\gamma\,\omega\Bigr)\,\pi^3 + \\
&+\Bigl(3{x_7^0}^2l_4{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\omega^4 + \\
&+4u_1^0x_7^0\bigl(l_7k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2 + l_6{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}\bigr)\,{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\omega^3\Bigr)\pi^2 - \\
&-\omega^5{x_7^0}^3{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^3\pi\Bigr]\,;
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&p_{14}^2 = \frac{4{k_{14}}^2}{k_{13}k_{23}\pi^3k_{12}{k_{34}}^2{k_{24}}^2} \times \Bigl[\Bigl(-l_4^3k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^3 + \\
&+\bigl(2\bigl(u_1^0u_2^0l_4^2 + 2u_1^0u_4^0(u_2^0x_1^0l_4 + u_1^0x_4^0l_2)\bigr)\bigr)\,k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24} + \\
&+\Bigl(-6{u_1^0}^2l_4^2{k_{34}}^2 + 2\bigl(u_1^0u_3^0l_42 - 2u_1^0u_4^0l_4l_3\bigr)\,k_{14}k_{34}\Bigr)\,{k_{23}}^2{k_{24}}^2\Bigr)\,{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^2 - \\
&-8\Bigl(\Bigl(\Bigl(\Bigl(-{u_1^0}^3u_4^0l_2{k_{34}}^2 + {u_1^0}^2u_4^0\bigl(u_2^0l_3 + u_3^0l_2\bigr)\,k_{14}k_{34}\Bigr)\,{k_{23}}^2k_{24} - \\
&-{u_1^0}^2u_2^0u_4^0l_2k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2 + \Bigl(\Bigl(-{u_1^0}^2u_3^0u_4^0l_3k_{14} + {u_1^0}^3u_4^0l_3k_{34}\Bigr)\,{k_{23}}^2 + \\
&+{u_1^0}^2u_4^0l_4a_{23}k_{14}k_{23}k_{34}\Bigr)\,{k_{24}}^2\Bigr)\,{k_{13}}^2 + {u_1^0}^2u_4^0l_4a_{13}k_{14}k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2k_{13}\Bigr)\,{k_{12}}^2 + \\
&+{u_1^0}^2u_4^0l_4a_{12}k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}{k_{13}}^2k_{12}\Bigr)\,\omega + 16{u_1^0}^3u_4^0\bigl(\bigl(l_{12}k_{24} - u_2^0k_{14}k_{34}\bigr)\,a_{23}{k_{13}}^2k_{23}k_{24} + \\
&+\bigl(l_{12}k_{24} - k_{14}u_2^0k_{34}\bigr)\,a_{13}k_{13}{k_{23}}^2k_{24}\bigr)\,{k_{12}}^2 - \\
&-16{u_1^0}^3u_4^0\bigl(l_{12}k_{24} - k_{14}u_2^0k_{34}\bigr)\,a_{12}k_{12}{k_{13}}^2{k_{23}}^2k_{34}\Bigr)\,\pi^4 - \\
&-\Bigl(3l_4^2{k_{12}}^2{k_{13}}^2k_{14}{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{34}}^2\gamma\,\omega^4 + \bigl(4\bigl(u_1^0l_6l_4 + u_1^0u_4^0x_7^0l_2\bigr)\,k_{14}{k_{23}}^2k_{24}{k_{34}}^2 - \\
&-\Bigl(4\Bigl(u_1^0x_7^0(-u_4^0l_3 + u_3^0l_4) - {u_1^0}^2x_{10}^0l_4\Bigr)\,k_{14}k_{34} - 12x_7^0l_4{k_{34}}^2\Bigr)\,{k_{23}}^2{k_{24}}^2\Bigr)\,{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^3 - \\
&-\Bigl(\Bigl(\Bigl({u_1^0}^2\bigl(u_3^0\bigl(l_7k_{14} + l_{13}k_{34}\bigr)\,{k_{23}}^2 - k_{14}u_4^0x_7^0a_{23}k_{34}k_{23}\bigr)\,{k_{24}}^2 + \\
&+{u_1^0}^2u_2^0l_6k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2 + \Bigl(-{u_1^0}^3l_6{k_{34}}^2 - {u_1^0}^2\bigl(u_3^0l_6 + u_2^0l_7\bigr)\,k_{14}k_{34}\Bigr)\,{k_{23}}^2k_{24}\Bigr)\,{k_{13}}^2 + \\
&+{k_{14}}^5{u_1^0}^2u_4^0a_{13}x_7^0k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2k_{13}\Bigr)\,{k_{12}}^2 + \\
&+\ {k_{14}}^5{u_1^0}^2u_4^0a_{12}x_7^0{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}{k_{13}}^2k_{12}\Bigr)\,\gamma\,\omega^2\Bigr)\,\pi^3 - \\
&-\bigl(-3l_4k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\omega^5 + \\
&+\bigl(2u_1^0x_7^0\bigl(3u_1^0x_7^0k_{34} - 2u_1^0x_{10}^0k_{14} + 3u_3^0x_7^0k_{14}\bigr)\,k_{34}{k_{23}}^2{k_{24}}^2 + \\
&+2u_1^0x_7^0\bigl(3u_2^0x_7^0 - 2u_1^0x_9^0\bigr)\,k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}\bigr)\,{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\omega^4\bigr)\,\pi^2 + \\
&+k_{14}\omega^6{x_7^0}^3{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^3\pi\Bigr]\,;
\end{aligned}
$$

$$p_{14}^{3}=\frac{-8k_{14}u_1^0}{k_{13}k_{23}k_{34}\pi^2k_{12}k_{24}}\times\Big[\Big(3l_4^2k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^2+$$
$$+\Big(\Big(4{u_1^0}^2l_4{k_{34}}^2+4\left(u_1^0u_4^0l_3-u_1^0u_3^0l_4\right)k_{14}k_{34}\Big){k_{23}}^2{k_{24}}^2+$$
$$+4\left(u_1^0u_4^0l_2-u_1^0u_2^0l_4\right)k_{14}{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}\big){k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega+$$
$$+8\,k_{14}{u_1^0}^2u_4^0a_{12}{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}{k_{13}}^2k_{12}+8{u_1^0}^2u_4^0l_5{k_{12}}^2k_{13}k_{14}k_{23}{k_{24}}^2k_{34}\Big)\pi^4+$$
$$+\left(6x_7^0l_4{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^3+\left(4\left(-u_1^0x_7^0l_{12}+u_1^0k_{14}l_7\right){k_{23}}^2{k_{24}}^2k_{34}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+4u_1^0l_6k_{14}{k_{23}}^2k_{24}{k_{34}}^2\right){k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^2\right)\pi^3+3\,\pi^2k_{14}\omega^4{x_7^0}^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma^2\Big];$$

$$p_{14}^{4}=\frac{2}{k_{13}k_{23}\pi^2k_{12}{k_{34}}^2{k_{24}}^2}\times\Big[\Big(3l_4^2k_{14}^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega^2+$$
$$+\Big(\Big(24{u_1^0}^2l_4k_{14}{k_{34}}^2+4\left(u_1^0u_4^0l_3-2u_1^0u_3^0l_4\right)k_{14}^2k_{34}\Big){k_{23}}^2{k_{24}}^2+$$
$$+4\left(u_1^0u_4^0l_2-2u_1^0u_2^0l_4\right)k_{14}^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}\big){k_{13}}^2{k_{12}}^2\omega+$$
$$+8\,{k_{13}}^2{k_{23}}^2{k_{34}}^2{k_{14}}^2{u_1^0}^2u_4^0a_{12}k_{12}k_{24}+\Big(\Big(\Big(\Big(-8{u_1^0}^2l_{12}^2{k_{23}}^2+$$
$$+8\,k_{23}k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2u_4^0a_{23}\Big){k_{24}}^2+8\,{k_{23}}^2{k_{34}}^2{k_{14}}^2{u_1^0}^2{u_2^0}^2+$$
$$+16l_{12}k_{14}{k_{23}}^2k_{24}k_{34}\big){k_{13}}^2+8\,k_{13}{k_{23}}^2k_{34}{k_{14}}^2{u_1^0}^2{k_{24}}^2u_4^0a_{13}\Big){k_{12}}^2\Big)\pi^4+$$
$$+\left(6x_7^0l_4k_{14}^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2{k_{24}}^2{k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^3+\left(4u_1^0\left(l_6-2u_2^0x_7^0\right)k_{14}^2{k_{34}}^2{k_{23}}^2k_{24}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\Big(4u_1^0\left(l_7-2u_3^0x_7^0\right)k_{14}^2k_{34}+24\,k_{14}{u_1^0}^2x_7^0{k_{34}}^2\Big){k_{23}}^2{k_{24}}^2\right){k_{13}}^2{k_{12}}^2\gamma\,\omega^2\right)\pi^3+$$
$$+3\,{k_{13}}^2{k_{23}}^2{k_{34}}^2{k_{14}}^2\pi^2{k_{12}}^2{k_{24}}^2\gamma^2\omega^4{x_7^0}^2\Big];$$

$$p_{14}^{5}=\frac{8{u_1^0}^2}{k_{24}k_{34}}\left(k_{14}k_{34}u_2^0-k_{24}k_{34}u_1^0+k_{14}k_{24}u_3^0\right)-\frac{24}{\pi}k_{14}\omega u_1^0\left(\pi l_4+\gamma\omega x_7^0\right);$$
$$p_{14}^{6}=-\frac{4}{\pi}\omega k_{14}\left(\pi l_4+\gamma\omega^2x_7^0\right)+\frac{8}{k_{24}k_{34}}u_1^0\left(k_{14}k_{34}u_2^0+k_{14}k_{24}u_3^0-3k_{24}k_{34}u_1^0\right);$$
$$p_{14}^{7}=-8u_1^0,$$

где $\quad l_2=u_1^0x_2^0-u_2^0x_1^0,\qquad l_3=u_1^0x_3^0-u_3^0x_1^0,\qquad l_4=u_4^0x_1^0-u_1^0x_4^0,$

$$l_5=a_{13}k_{23}+a_{23}k_{13},\quad l_6=u_1^0x_9^0-u_2^0x_7^0,\qquad l_7=u_1^0x_{10}^0-u_3^0x_7^0,$$
$$l_8=u_1^0x_9^0-u_2^0,\qquad l_9=u_1^0x_{10}^0-u_3^0,\qquad l_{10}=u_4^0x_2^0-u_2^0x_4^0,$$
$$l_{11}=u_1^0x_9^0+u_2^0x_7^0,\qquad l_{12}=u_3^0k_{14}-u_1^0k_{34},\qquad l_{13}=u_1^0x_7^0-u_1^0x_{10}^0.$$

Теперь обозначим через

$$M_{14}=\frac{\max\left(|p_{14}^1|,|p_{14}^2|,|p_{14}^3|,|p_{14}^4|,|p_{14}^5|,|p_{14}^6|,|p_{14}^7|\right)}{|p_{14}^0|}+1,\tag{28}$$

тогда, по лемме о модуле старшего члена [8, с. 150], получим оценку

$$|a_{14}| \le M_{14}(x^0). \tag{29}$$

С помощью полученных неравенств оценим коэффициент $a_{23}$ в формуле (10):

$$a_{23} = -\frac{a_{13}k_{23}}{k_{13}} + \frac{a_{13}^2 k_{23}}{2k_{13}u_1^0} + \frac{k_{23}\gamma\omega^2 x_6^0}{2\pi u_1^0} + \frac{k_{23}\omega u_3^0 x_1^0}{2u_1^0} - \frac{k_{23}\omega x_3^0}{2},$$

$$|a_{23}| \le \left|\frac{a_{13}k_{23}}{k_{13}}\right| + \left|\frac{a_{13}^2 k_{23}}{2k_{13}u_1^0}\right| + \left|\frac{k_{23}\gamma\omega^2 x_6^0}{2\pi u_1^0}\right| + \left|\frac{k_{23}\omega u_3^0 x_1^0}{2u_1^0}\right| + \left|\frac{k_{23}\omega x_3^0}{2}\right| \le M_{23}(x^0),$$

где

$$M_{23}(x^0) = \left|\frac{k_{23}}{k_{13}}\right| M_{13}(x^0) + \frac{|k_{23}|\omega}{2} + \left|\frac{k_{23}}{k_{13}}\right| \frac{\pi}{2\gamma\omega} M_{13}^2(x^0)\|x^0\|^{-1} + |k_{23}|\omega\|x^0\|. \tag{30}$$

Используя формулу (11), получим оценку для коэффициента $a_{24}$:

$$|a_{24}| \le M_{24}(x^0),$$

где

$$M_{24}(x^0) = \Big(2|k_{14}|\gamma\omega^2\|x^0\|^2 + (|k_{14}|\gamma\omega^2 + 2\gamma\omega M_{14}(x^0))\|x^0\| + \pi M_{14}(x^0)^2\Big)^{-1} \times$$
$$\Bigg[\frac{|k_{24}|\pi}{|k_{14}|} M_{14}(x^0)^2 + \frac{|k_{24}|\pi^2 M_{14}(x^0)^2}{4|k_{14}|\gamma\omega\|x^0\|} + \Big(|k_{24}|\gamma\omega^2 M_{14}(x^0) + 2|k_{24}|\pi\omega M_{14}(x^0)^2 +$$
$$+ \frac{|k_{14}k_{24}|\gamma^2\omega^3}{\pi} M_{14}(x^0)^2 + \frac{|k_{14}k_{24}|\gamma\omega^3}{4} + \frac{2|k_{14}|\gamma^2\omega^2}{\pi} M_{12}(x^0) + \gamma\omega M_{14}(x^0)^2 +$$
$$+ \frac{|k_{24}|\gamma\omega}{|k_{34}|} M_{14}(x^0)^2\Big)\|x^0\| + \Big(2|k_{24}|\gamma\omega^2 M_{14}(x^0) + \frac{|k_{14}k_{24}|\gamma^2\omega^3(k_{34}+1)}{|k_{34}|\pi} +$$
$$+ \frac{2|k_{14}k_{34}|\gamma^2\omega^3}{|k_{34}|\pi} + \frac{2|k_{14}k_{24}|\gamma^2\omega^2}{|k_{23}k_{34}|\pi}(M_{13}(x^0) + M_{23}(x^0))\ )\ \|x^0\|^2 +$$
$$+ (\ \frac{5|k_{14}k_{24}k_{34}|\gamma\pi\omega^3 + 8|k_{14}k_{24}|\gamma\omega^2(|k_{34}| + \gamma\omega) + 16|k_{14}k_{34}|\gamma^2\omega^3}{8|k_{34}|\pi}\Big)\|x^0\|^3\Bigg]. \tag{31}$$

Аналогично, получаем оценку для коэффициента $a_{34}$:

$$|a_{34}| \le M_{34}(x^0),$$

где

$$M_{34}(x^0) = \Big(\pi M_{14}(x^0)^2 + (|k_{14}|\gamma\omega^2 + 2\gamma\omega M_{14}(x^0))\|x^0\| + 2|k_{14}|\gamma\omega^2\|x^0\|^2\Big)^{-1} \times$$

$$\times\Bigg(\frac{|k_{34}|\pi\omega M_{14}(x^0)^2}{2\gamma} + \frac{|k_{34}|\pi M_{14}(x^0)^3}{|k_{14}|} + \frac{4|k_{34}|\pi^2 M_{14}(x^0)^4}{|k_{14}|\gamma\omega\|x^0\|} + \Big(|k_{34}|\gamma\omega^2 M_{14}(x^0) +$$

$$+\frac{|k_{34}|\pi\omega M_{14}(x^0)^2}{2}+\frac{|k_{34}|\pi\omega M_{14}(x^0)^2}{2|k_{14}|}+\frac{|k_{34}|\gamma\omega M_{14}(x^0)^2}{|k_{14}|}+\frac{|k_{14}k_{34}|\gamma\omega^3}{4}+$$
$$+\frac{|k_{34}|\gamma\omega M_{14}(x^0)^2}{|k_{24}|}+\frac{M_{14}(x^0)^2}{2}\Big)\|x^0\|+\Big((|k_{34}|+1)\gamma\omega^2 M_{14}(x^0)+$$
$$+|k_{14}k_{34}|\gamma\omega^3+\frac{2|k_{14}|\gamma^2\omega^3}{\pi}+\frac{2|k_{14}|\gamma^2\omega^2 M_{23}(x^0)}{|k_{23}|}+\frac{2|k_{14}|\gamma^2\omega^2 M_{13}(x^0)}{|k_{13}|\pi}+$$
$$+\frac{2|k_{14}k_{34}|\gamma^2\omega^2 M_{12}(x^0)}{|k_{12}k_{24}|\pi}+\frac{2|k_{14}k_{34}|\gamma^3\omega^3}{|k_{24}|\pi}\Big)\|x^0\|^2+\Big(\frac{|k_{14}k_{34}|\pi\omega^2}{4}+$$
$$+\frac{2|k_{14}k_{34}|\gamma\omega}{|k_{12}k_{24}|}+\frac{2|k_{14}k_{34}|\gamma^3\omega^3}{|k_{12}k_{24}|\pi^2}+\frac{2|k_{14}|\gamma^2\omega^3}{\pi}+\frac{2|k_{14}k_{34}|\gamma^2\omega^3}{|k_{24}\pi|}\Big)\|x^0\|^3\Bigg). \tag{32}$$

Из неравенств (21), (22), (23) вытекает следующая оценка:

$$\|x(t)-x^0\|\leq 16M(x^0)\left[\frac{\gamma\omega}{\pi}\|x^0\|+2\sum_{(j,l)\in S}M_{jl}(x^0)\right]t+$$
$$+\left[\frac{\gamma\omega}{\pi}\|x^0\|+2\sum_{(j,l)\in S}M_{jl}(x^0)\right]^2 t^2, \tag{33}$$

где $M_{jl}(x^0)$ заданы формулами (24)–(32) соответственно.

Применяя неравенство (33) к $\pi_\tau$-решению $x(t)$ на отрезке $t\in[j\tau,(j+1)\tau]$ с $x(j\tau)$ вместо $x^0$, убеждаемся в справедливости следующего утверждения.

**Предложение 2.** *Для произвольного $x^0\in\mathbb{R}^{10}$ соответствующее $\pi_\tau$-решение $x(t)$ системы (4) с управлением вида (15) удовлетворяют неравенствам*

$$\|x(t)-x(j\tau)\|\leq \tilde{K}_1(x(j\tau))(t-j\tau)+\tilde{K}_2(x(j\tau))(t-j\tau)^2, t\in[j\tau,(j+1)\tau], \tag{34}$$

*где*

$$\tilde{K}_1(\xi)=16M(\xi)\left(\frac{\gamma\omega}{\pi}\|\xi\|+2\sum_{(j,l)\in S}M_{jl}(\xi)\right),$$
$$\tilde{K}_2(\xi)=\left(\frac{\gamma\omega}{\pi}\|\xi\|+2\sum_{(j,l)\in S}M_{jl}(\xi)\right)^2.$$

**4. Численная реализация предложенного метода стабилизации.** В качестве примера рассмотрим систему (4) с начальным условием

$$x_j(0)=1,\quad j=\overline{1,10}. \tag{35}$$

Пусть $\tau = 2\pi$ и $\gamma = 0.1$, таким образом $\omega = 1$. Положим $k_{12} = -1$, $k_{13} = -2$, $k_{14} = -3$, $k_{23} = -4$, $k_{24} = -5$, $k_{34} = -6$ с учетом условия (7). Тогда семейство управлений (5) запишется в виде

$$\begin{cases} u_1 = u_1^0 + a_{12}\cos(\omega t) + a_{13}\cos(2\,\omega t) + a_{14}\cos(3\,\omega t)\,, \\ u_2 = u_2^0 - a_{12}\sin(\omega t) + a_{23}\cos(4\,\omega t) + a_{24}\cos(5\,\omega t)\,, \\ u_3 = u_3^0 - a_{13}\sin(2\,\omega t) - a_{23}\sin(4\,\omega t) + a_{34}\cos(6\,\omega t)\,, \\ u_4 = u_4^0 - a_{14}\sin(3\,\omega t) - a_{24}\sin(5\,\omega t) - a_{34}\sin(6\,\omega t)\,. \end{cases} \tag{36}$$

Используя формулы (8)–(12), получаем, что в момент времени $\tau$ решение $x(t)$ системы (4) с управлением (36) удовлетворяет условию (13) при следующих значениях параметров $u_i^0$ и $a_{jl}$:

$$\begin{gathered} u_i^0 = -0.03183098862, \quad \text{для } i = \overline{1,4}; \\ a_{12} = 0.1493987012; \quad a_{13} = -0.3149430880; \\ a_{14} = 0.2470670983; \quad a_{23} = -0.486232832; \\ a_{24} = 0.3863832320; \quad a_{34} = 0.1245101915. \end{gathered}$$

Определяя обратную связь $u = h(t,x)$ по формулам (15), найдем соответствующее $\pi_\tau$-решение $x(t)$ системы (4) на отрезке $t \in [0, 20\tau]$, $\tau = 2\pi$, с помощью численного интегрирования.

Экспоненциальный характер стремления к нулю функции $x(t)$ в точках $t_j = 2\pi j$, $j = \overline{0,10}$, проиллюстрирован в таблице:

*Значения* $\|x(t)\|$ *в точках* $t_j = 2\pi j$

| $t_j$ | 0 | $2\tau$ | $4\tau$ | $6\tau$ | $8\tau$ | $10\tau$ | $12\tau$ | $14\tau$ | $16\tau$ | $18\tau$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|x(t_j)\|$ | 3.16 | 2.53 | 2.025 | 1.62 | 1.3 | 1.04 | 0.83 | 0.67 | 0.53 | 0.43 |
| $\ln\left(\frac{\|x(t_j)\|}{t_j}\right)$ | – | $-0.9$ | $-1.8$ | $-2.1$ | $-2.9$ | $-3.4$ | $-3.8$ | $-4.2$ | $-4.5$ | $-4.9$ |

**Заключение.** Предложена схема построения управления, которая обеспечивает убывание функции Ляпунова на решениях в фиксированные моменты времени. При использовании нестационарной функции обратной связи $u = h(t,x)$ вида (15) для интегратора Брокетта в случае четырех управлений решена задача стабилизации. Найдены значения коэффициентов $a_{jl}$, $k_{jl}$ и начальные управления $u_i^0$, удовлетворяющие уравнению (6), что сформулировано в виде утверждения. Доказана экспоненциальная оценка (16) для $\pi_\tau$-решения на узлах разбиения $t = j\tau$. Также исследованы свойства $\pi_\tau$-решений на интервалах гладкости функции управления $[0,\tau]$. На основе предложенного подхода представлена численная реализация метода стабилизации для интегратора Брокетта (4).

1. *Brockett R.W.* Control Theory and Singular Riemannian Geometry // New Directions in Applied Mathematics. / P.J. Hilton, G.S. Young, Eds. – New York: Springer, 1981. – P. 11–27.
2. *Астахова Т.Н., Зуев А.Л.* Стабилизация нелинейных систем в классе функций управления с дискретными переключениями // Уч. записки Таврического Национального ун-та им. В.И. Вернадского. Сер. Физ.-мат. науки, 2011. – **24(63)**, № 3. – С. 1–9.
3. *Sontag E.D.* Mathematical Control Theory: Deterministic Finite Dimensional Systems. – New York: Springer-Verlag, 1998. – 531 p.
4. *Brockett R.W.* Asymptotic stability and feedback stabilization // Differential Geometric Control Theory / R.S. Millman, H.J. Sussmann, Eds. – Boston: Birkhäuser, 1983. – P. 181–191.
5. *Sontag E.D.* Stability and Stabilization: Discontinuities and the Effect of Disturbances // Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control : Proc. NATO Advanced Study Institute. – Montreal: Kluwer, 1998. – P. 551–598.
6. *Artstein Z.* Stabilization with relaxed controls // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. – 1983. – **7**, № 11. – P. 1163–1173.
7. *Астахова Т.Н., Зуев А.Л.* Задача планирования движения для класса нелинейных систем с тригонометрическими функциями управления // Динамические системы. – 2013. – **3(31)**, № 1–2. – С. 159–167.
8. *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1968. – 431 с.

**T.N. Astakhova**

### On the investigation of stabilization problem of Brockett integrator by using time-dependent feedback

The limiting behavior of control led system solutions is described by means of Lyapunov function. We have also analyzed the Brockett system with four controls. The stabilization problem has been solved for this system. The $\pi_\tau$-solution properties are investigated for the smoothness interval of control function $[0, \tau]$.

**Keywords:** *Brockett system, control-Lyapunov function, Volterra series, $\pi_\tau$-solutions.*

**Т.М. Астахова**

### Про дослідження задачі стабілізації інтегратора Брокетта за допомогою нестаціонарного зворотного зв'язку

За допомогою функції Ляпунова описано граничну поведінку розв'язків керованих систем. Розглянуто систему Брокетта з чотирма керуваннями, для якої розв'язано задачу стабілізації. Досліджено властивості $\pi_\tau$-розв'язку на інтервалі гладкості функції керування $[0, \tau]$.

**Ключові слова:** *система Брокетта, керована функція Ляпунова, ряд Вольтерри, $\pi_\tau$-розв'язок.*

*Ин-т прикл. математики и механики НАН Украины, Донецк*
ctn_af@mail.ru

Получено 22.05.14