

УДК 539.3:534.1

©2014. И.А. Моисеенко

ВОЛНЫ КРУЧЕНИЯ ВДОЛЬ ПОЛОГО ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНО-НЕОДНОРОДНОГО ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНОГО ЦИЛИНДРА С ЗАКРЕПЛЕННЫМИ ГРАНИЦАМИ

Получена и исследована аналитическая форма дисперсионных соотношений, описывающих спектры осесимметричных нормальных волн кручения в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах концентрического кольцевого сечения с жестко закрепленными граничными поверхностями. Описаны некоторые эффекты влияния параметров неоднородности и механической анизотропии на топологические картины дисперсионных спектров и кинематические характеристики бегущих нормальных волн варьируемой длины из низших мод спектров.

Ключевые слова: трансверсально-изотропный цилиндрический волновод, концентрическое кольцевое сечение, экспоненциальная радиальная неоднородность, осесимметричные нормальные волны кручения, дисперсионные спектры.

В работах по исследованию закономерностей процессов распространения нормальных упругих волн в трансверсально-изотропных цилиндрах кругового [1–7], кольцевого [8, 9] и составного кольцевого (многослойного) [10] сечения используется модель однородного по физико-механическим свойствам материала. Вместе с тем, с позиций расширения и углубления фундаментальных исследований, а также с учетом характера изменений свойств материалов цилиндрических элементов конструкций при применении различных технологий обработки, актуальными являются проблемы анализа спектров и свойств нормальных упругих волн вдоль полых непрерывно-неоднородных по радиальной координате анизотропных цилиндров, в том числе трансверсально-изотропных цилиндров с экспоненциальной радиальной неоднородностью физико-механических свойств. Целью настоящей работы является получение и анализ дисперсионных зависимостей для одного из классов волновых процессов в протяженных экспоненциально-неоднородных трансверсально-изотропных цилиндрах концентрического кольцевого сечения с жестко закрепленными граничными поверхностями.

1. Постановка задачи. Рассматривается бесконечно протяженный трансверсально-изотропный упругий цилиндр концентрического кольцевого сечения ширины $2h$ с внутренним радиусом $r_0 - h$ и внешним радиусом $r_0 + h$, имеющий жестко закрепленные граничные поверхности. В цилиндрических координатах $Or\theta z$, вводимых с отнесением координатных переменных линейной размерности к нормирующему параметру $R_* = R$, рассматриваемое тело занимает область $V = \{r \in [r_0 - h, r_0 + h]; 0 \leq \theta \leq 2\pi, z \in (-\infty, \infty)\}$.

Динамическое деформирование цилиндра описывается системой диффе-

ренциальных уравнений движения

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{r\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{rz} - \frac{1}{r} \sigma_{\theta\theta} - \frac{\rho R_*^2}{c_*} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_r &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{\theta r}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{\theta\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta} - \frac{\rho R_*^2}{c_*} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\theta &= 0, \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{zr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \sigma_{z\theta} + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{zz} - \frac{\rho R_*^2}{c_*} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_z &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

где u_r, u_θ, u_z – компоненты отнесенного к нормирующему параметру R_* безразмерного вектора динамических упругих перемещений; $\sigma_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = r, \theta, z$) – компоненты отнесенного к нормирующему параметру c_* тензора динамических напряжений; ρ – плотность материала цилиндра; t – время. В исследуемом случае осесимметричных динамических деформаций кручения, характеризуемом полем волновых перемещений $u_\theta(r, z, t)$, $u_r = u_z = 0$ и полем динамических напряжений $\sigma_{r\theta}(r, z, t)$, $\sigma_{\theta z}(r, z, t)$, $\sigma_{rr} = \sigma_{rz} = \sigma_{\theta\theta} = \sigma_{zz} = 0$, следствием из системы (1) является уравнение

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \sigma_{\theta r}) + \frac{\partial}{\partial z} \sigma_{\theta z} + \frac{1}{r} \sigma_{r\theta} - \frac{\rho R_*^2}{c_*} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u_\theta = 0, \quad (2)$$

а рассматриваемые граничные условия закрепления внутренней и внешней цилиндрических поверхностей имеют вид

$$(u_\theta)_{r=r_0-h} = (u_\theta)_{r=r_0+h} = 0. \quad (3)$$

Полагается, что трансверсально-изотропный материал цилиндра является экспоненциально-неоднородным [11–16] в радиальном направлении по всем своим физико-механическим свойствам, а его плотность ρ и отнесенные к c_* нормированные модули упругости c_{ij} описываются представлениями

$$\rho = \rho^{(0)} \exp(\lambda r), \quad c_{ij} = c_{ij}^{(0)} \exp(\lambda r), \quad (4)$$

в которых λ – действительнoзначный приведенный параметр неоднородности. При этом для характеристик тензора динамических напряжений $\sigma_{r\theta}$, $\sigma_{\theta z}$ в поле волн кручения зависимости от u_θ имеют вид

$$\sigma_{r\theta} = c_{66}^{(0)} \exp(\lambda r) \left(\frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} \right), \quad c_{66}^{(0)} = (c_{11}^{(0)} - c_{12}^{(0)}) / 2; \quad (5)$$

$$\sigma_{\theta z} = c_{44}^{(0)} \exp(\lambda r) \frac{\partial u_\theta}{\partial z}.$$

2. Получение аналитической формы дисперсионных соотношений. При построении решения рассматриваемой задачи используется предложенный в работе [9] прием перехода к обобщенной безразмерной кольцевой координате

$$x = (r - r_0) h^{-1}.$$

Для комплексной функции волновых упругих перемещений u_θ в исследуемых нормальных волнах с круговой частотой ω и нормированным волновым числом k вводится представление

$$u_\theta(r, z, t) = \tilde{u}_\theta(r) \exp(-i(\omega t - kz)). \quad (6)$$

С учетом соотношений (4)–(6) уравнение (2) приводится к виду

$$(\varsigma^2 \partial_\varsigma^2 + \varsigma \partial_\varsigma + \varsigma^2 - 1 + \kappa(\varsigma^2 \partial_\varsigma - \varsigma)) \tilde{u}_\theta(\varsigma) = 0, \quad (7)$$

где $\varsigma = \delta r$, $\partial_\varsigma = d/d\varsigma$, $\kappa = \lambda/\delta$, $\delta = \sqrt{\Omega^2 - \eta k^2}$,

$$\eta = c_{44}^{(0)}/c_{66}^{(0)}, \quad \Omega^2 = \rho^{(0)}\omega^2 R_*^2 / (c_* c_{66}^{(0)}).$$

Результатом перехода в уравнении (7) к переменной x с использованием соотношений

$$\varsigma = \delta(hx + r_0), \quad \partial_\varsigma = \tau^{-1} \partial_x, \quad \partial_x = d/dx, \quad \tau = h\delta$$

является уравнение

$$\left((1 + \varepsilon x)^2 (\partial_x^2 + \kappa \tau \partial_x + \tau^2) + \varepsilon (1 + \varepsilon x) (\partial_x - \kappa \tau) - \varepsilon^2 \right) \tilde{u}_\theta(x) = 0, \quad (8)$$

в котором $\varepsilon = hr_0^{-1}$. Граничные условия (3) при таком переходе принимают вид

$$\tilde{u}_\theta(\pm 1) = 0. \quad (9)$$

Решение дифференциального уравнения (8) отыскивается в форме степенного ряда

$$\tilde{u}_\theta(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(\alpha)} x^{m+\alpha} \quad \left(a_0^{(\alpha)} \neq 0 \right), \quad (10)$$

подстановка которого в (8) приводит к рекуррентной системе соотношений

$$\alpha(\alpha - 1) a_0^{(\alpha)} = 0; \quad (11)$$

$$\alpha \left((\kappa \tau + 2\varepsilon \alpha - \varepsilon) a_0^{(\alpha)} + (1 + \alpha) a_1^{(\alpha)} \right) = 0; \quad (12)$$

$$\begin{aligned}
 & (2\tau\epsilon\kappa\alpha + \alpha^2\epsilon^2 - \tau\epsilon\kappa + \tau^2 - \epsilon^2) a_0^{(\alpha)} + (1 + \alpha) (\tau\kappa + 2\epsilon\alpha + \epsilon) a_1^{(\alpha)} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + (1 + \alpha) (2 + \alpha) a_2^{(\alpha)} = 0, \\
 & \tau\epsilon (\epsilon\kappa\alpha - \epsilon\kappa + 2\tau) a_0^{(\alpha)} + (2\tau\epsilon\kappa\alpha + \epsilon^2\alpha^2 + \tau\epsilon\kappa + 2\epsilon^2\alpha + \tau^2) a_1^{(\alpha)} + \\
 & \qquad \qquad \qquad + (2 + \alpha) (\tau\kappa + 2\epsilon\alpha + 3\epsilon) a_2^{(\alpha)} + (3 + \alpha) (2 + \alpha) a_3^{(\alpha)} = 0; \\
 & \tau^2\epsilon^2 a_{m-4}^{(\alpha)} + \tau\epsilon (\epsilon\kappa(m + \alpha - 4) + 2\tau) a_{m-3}^{(\alpha)} + (m^2\epsilon^2 + 2m\tau\epsilon\kappa + 2m\epsilon^2\alpha + \\
 & + 2\tau\epsilon\kappa\alpha + \epsilon^2\alpha^2 - 4m\epsilon^2 - 5\tau\epsilon\kappa - 4\epsilon^2\alpha + \tau^2 + 3\epsilon^2) a_{m-2}^{(\alpha)} + \\
 & + (m - 1 + \alpha) (2m\epsilon + \tau\kappa + 2\epsilon\alpha - 3\epsilon) a_{m-1}^{(\alpha)} + (m + \alpha) (m - 1 + \alpha) a_m^{(\alpha)} = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad (m = 4, 5, \dots).
 \end{aligned}$$

Соотношение (11) определяет условие существования нетривиальных решений в рядах (10) для уравнения (8) – допустимые значения параметра $\alpha \in \{0, 1\}$. При этом для случая $\alpha = 0$ в соотношениях (11) и (12) имеется произвол в определении как $a_0^{(0)}$, так и $a_1^{(0)}$, что, в частности, позволяет задать $a_1^{(0)} = 0$. Таким образом, с заданием $a_0^{(0)} = 1$, $a_1^{(0)} = 0$ и $a_0^{(1)} = 1$ для решений уравнения (8) получено представление в виде комбинации базисных частных решений

$$\tilde{u}_\theta(x) = b_0\varphi_0(x) + b_1\varphi_1(x), \quad (13)$$

где $\varphi_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(0)} x^m$, $\varphi_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m^{(1)} x^{m+1}$, b_j ($j = 0, 1$) – произвольные постоянные коэффициенты. Использование выражения (13) при формулировке граничных условий (9) приводит в итоге к дисперсионным соотношениям вида

$$F_c(\delta, \lambda, r_0, h) = \varphi_0(1)\varphi_1(-1) - \varphi_0(-1)\varphi_1(1) = 0, \quad \Omega = \sqrt{\delta^2 + \eta k^2}. \quad (14)$$

Все ряды в представлениях $\varphi_0(x)$ и $\varphi_1(x)$ являются абсолютно и равномерно сходящимися.

3. Результаты численных исследований. Форма дисперсионного соотношения (14) позволяет последовательно использовать результаты анализа параметрической зависимости $\delta(\lambda)$ и соотношения $\Omega(k, \lambda, \eta) = \sqrt{\delta(\lambda)^2 + \eta k^2}$ для исследования факторов влияния параметра неоднородности λ и показателя степени механической анизотропии материала цилиндра η на структуры дисперсионных спектров изучаемых волн. При этом следует отметить, что значения $\delta(\lambda)$ по физическому смыслу являются критическими частотами для мод бегущих нормальных волн рассматриваемого типа. Результаты расчетов зависимостей $\delta(\lambda)$ в диапазоне $\lambda \in [-2.0, 2.0]$ для цилиндра с закрепленной граничной поверхностью и приведенными геометрическими параметрами $r_0 = 3.0$, $h = 1.0$ представлены на рис. 1.

Представленные зависимости являются немонотонными, что в большей степени характерно для случая волн низшей моды. Их анализ показывает: в рассмотренном интервале изменения параметра неоднородности λ его влияние является достаточно мягким и существенно снижается по мере роста номера моды бегущих волн. В частности, рост значений $\delta(2.0)$ по отношению к $\delta(-2.0)$ составляет в случае первой моды спектра 32.0%, в случае второй моды – 9.9%, а в случае пятой моды – лишь 1.7%. Сами зависимости $\delta(\lambda)$ в рассматриваемом случае являются немонотонными и имеют локальные минимумы в окрестности точки $\lambda = -1.0$.

Различия в топологических картинах распределений пяти низших действительных ветвей спектров для закрепленных цилиндров с идентичными параметрами неоднородности $\lambda = 2.0$ и различающимися показателями механической анизотропии $\eta = 1/3$ и $\eta = 3$ соответственно характеризуют рис. 2 и рис. 3.

Специфика рассмотренного варианта закона неоднородности физико-механических свойств материала волновода влечет за собой неизменность параметров скоростей объемных сдвиговых волн при любых значениях показателя λ . В свою очередь, это обуславливает идентичность асимптотик мод распространяющихся нормальных волн кручения в высокочастотном коротковолновом диапазоне при любых значениях показателя λ .

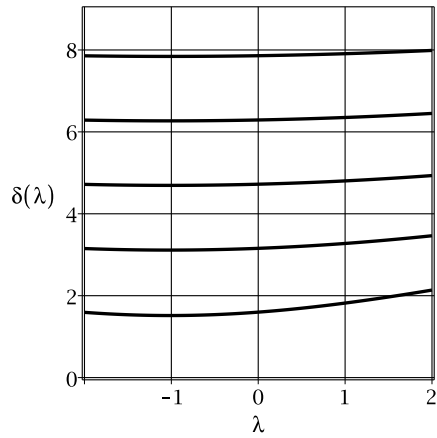


Рис. 1

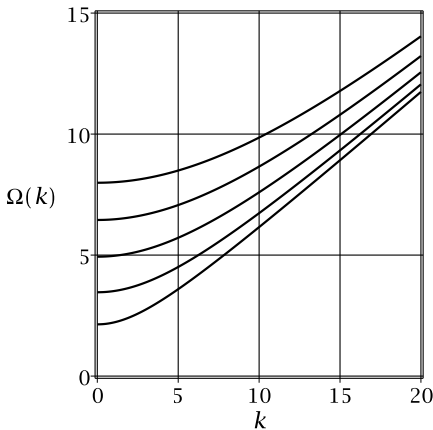


Рис. 2

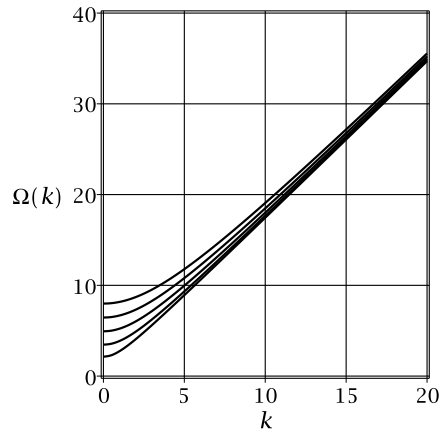


Рис. 3

Различия кинематических форм упругих колебательных перемещений в исследуемых волнах для цилиндров с различными показателями экспоненциальной неоднородности характеризуют, в частности, распределения относительных интенсивностей динамических крутильных перемещений $V_\theta(x) = \tilde{u}_\theta(x) / \max_{x \in [-1,1]} |\tilde{u}_\theta(x)|$ в сечении волновода для моментов времени, соответствующих началу периода волновых колебаний. Подобные распределения в цилиндрах с альтернативными показателями радиальной неоднородности $\lambda = -2.0$ и $\lambda = 2.0$ соответственно приведены на рис. 4 для волн первой моды и на рис. 5 для волн пятой моды. Особенностью приведенных распределений, дающих представление об изменениях локализации областей повышенной интенсивности волновых колебаний, является неизменность положения узловых точек анализируемых форм.

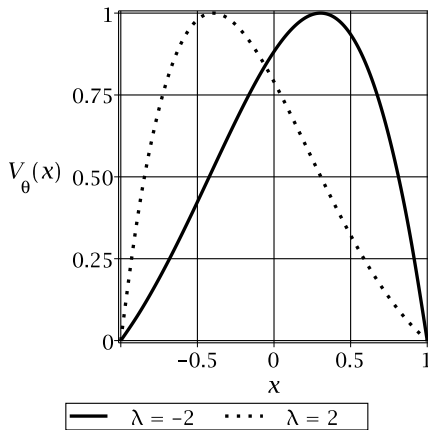


Рис. 4

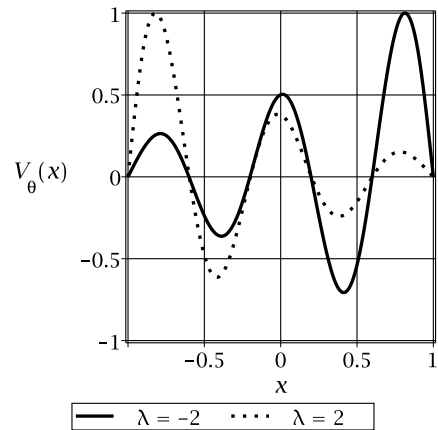


Рис. 5

Выводы. В результате проведенных исследований в форме степенного ряда с определяемыми из рекуррентных соотношений коэффициентами получено решение дифференциального уравнения, описывающего осесимметричные крутильные гармонические колебания бесконечно протяженного полого трансверсально-изотропного экспоненциально-неоднородного в радиальном направлении цилиндра. При построении решения использован прием перехода к обобщенным радиальным координатам в концентрической кольцевой области. Найденное решение использовано для получения дисперсионного уравнения, описывающего спектр нормальных волн кручения в рассматриваемом цилиндре с закрепленной внутренней и внешней граничной поверхностью. Для частного варианта геометрических параметров сечения цилиндра проанализирована параметрическая зависимость дисперсионных соотношений и топологии распределений действительных ветвей спектров от параметра неоднородности. На основе расчета нормированных форм крутильных волновых перемещений проиллюстрированы эффекты влияния показателя экспоненциальной неоднородности на кинематические характеристики исследуемых волн.

двум нормальных волн из различных мод спектра. Области использования результатов представленного исследования являются прочностные расчеты деталей машин, технологии ультразвуковой диагностики, акустоэлектроника.

1. *Berliner M.J., Solecki R.* Wave propagation in fluid-loaded transversely isotropic cylinders. Part 1. Analytical formulation // *J. Acoustical Soc. Amer.* – 1996. – **99**. – P. 1841–1847.
2. *Frazer W.B.* Separable equations for a cylindrical anisotropic elastic waveguide // *J. of Sound and Vibration.* – 1980. – **72**. – P. 151–157.
3. *Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N.* Guided ultrasonic waves in composite cylinders // *Mech. of Composite Materials.* – 2007. – **43**, № 3. – P. 277–288.
4. *Honarvar F., Enjilela E., Sinclair A.N., Mirnezami S.A.* Wave propagation in transversely isotropic cylinders // *Intern. J. of Solids and Structures.* – 2007. – **44**. – P. 5236–5246.
5. *Mirsky I.* Wave propagation in transversely isotropic circular cylinders part I: Theory // *J. Acoustical Soc. Amer.* – 1964. – **36**. – P. 2106–2122.
6. *Wei J.P., Su X.Y.* Wave propagation in a piezoelectric rod of 6mm symmetry // *Intern. J. of Solids and Structures.* – 2005. – January, **42**. – P. 3644–3654.
7. *Winkel V., Oliviera J.E.B., Dai J.D., Jen C.K.* Acoustic wave propagation in piezoelectric fibers of hexagonal crystal symmetry // *IEEE Transactions on Ultrasonic, Ferroelectric and Frequency Control.* – 1995. – **42**. – P. 949–955.
8. *Моисеенко В.А., Сторожев В.И., Шульга Н.А.* Спектр нормальных волн в полом трансверсально-изотропном цилиндре // *Прикл. механика.* – 1984. – **20**, № 9. – С. 117–118.
9. *Шульга Н.А.* Распространение осесимметричных упругих волн в ортотропном полом цилиндре // *Прикл. механика.* – 1974. – **10**, № 9. – С. 14–18.
10. *Nayfeh A.H., Abdelrahman W.G., Nagy P.B.* Analyses of axisymmetric waves in layered piezoelectric rods and their composites // *J. Acoustical Soc. Amer.* – 2000. – **108**, № 4. – P. 1496–1504.
11. *Birman V., Byrd L.W.* Modeling and Analysis of Functionally Graded Materials and Structures // *Appl. Mech. Rev.* – 2007. – **60**, № 5. – P. 195–216.
12. *Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H., Zhang L.-L.* Dynamic stress around two holes in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // *Phil. Mag. Lett.* – 2010. – **90**. – P. 361–380.
13. *Fang X.-Q., Liu J.-X., Wang X.-H.* Dynamic stress from a cylindrical inclusion buried in a functionally graded piezoelectric material layer under electro-elastic waves // *Compos. Sci. Technol.* – 2009. – **69**. – P. 1115–1123.
14. *Fang X.-Q., Liu J.-X., Zhang L.-L., Kong Y.-P.* Dynamic stress from a subsurface cylindrical inclusion in a functionally graded material layer under anti-plane shear waves // *Mater. Struct.* – 2011. – **44**. – P. 67–75.
15. *Fang X.-Q.* Multiple scattering of electro-elastic waves from a buried cavity in a functionally graded piezoelectric material layer // *Intern. J. Solids Struct.* – 2008. – **45**. – P. 5716–5729.
16. *Miyamoto Y., Kaysser W.A., Rabin B.H. et al.* FGM: Design, processing and applications. – Dordrecht: Kluwer Academic, 1999. – 434 p.

I.A. Moiseyenko

Waves of torsion along the hollow exponentially inhomogeneous transversely isotropic cylinder with fixed boundaries

The analytical form of the dispersion relations for describing the spectrum of axisymmetric normal torsion waves in long exponentially inhomogeneous transversely isotropic cylinders having concentric annular cross-section with fixed boundary surfaces is obtained and investigated. Some effects of the influence of the parameters of heterogeneity and mechanical anisotropy on

the topology of the dispersion spectrums and kinematic characteristics of traveling normal waves of varying lengths from lower modes of spectra are presented.

Keywords: *transversely isotropic cylindrical waveguide, concentric annular cross-section, exponential radial inhomogeneous, axisymmetric normal waves of torsion, dispersion spectrums.*

І.О. Моїсеєнко

Хвилі крутіння уздовж порожнистого експоненціально-неоднорідного трансверсально-ізотропного циліндра із закріпленими границями

Отримано і досліджено аналітичну форму дисперсійних співвідношень, що описують спектри осесиметричних нормальних хвиль крутіння у видовжених експоненціально-неоднорідних трансверсально-ізотропних циліндрах концентричного кільцевого перерізу з жорстко закріпленими граничними поверхнями. Описано деякі ефекти впливу параметрів неоднорідності і механічної анізотропії на топологічні картини дисперсійних спектрів і кінематичні характеристики біжучих нормальних хвиль варійованої довжини з нижчих мод спектрів.

Ключові слова: *трансверсально-ізотропний циліндричний хвилевід, концентричний кільцевий переріз, експоненціальна радіальна неоднорідність, осесиметричні нормальні хвилі крутіння, дисперсійні спектри.*

Донецький національний ун-т
mian@i.ua

Получено 05.03.14